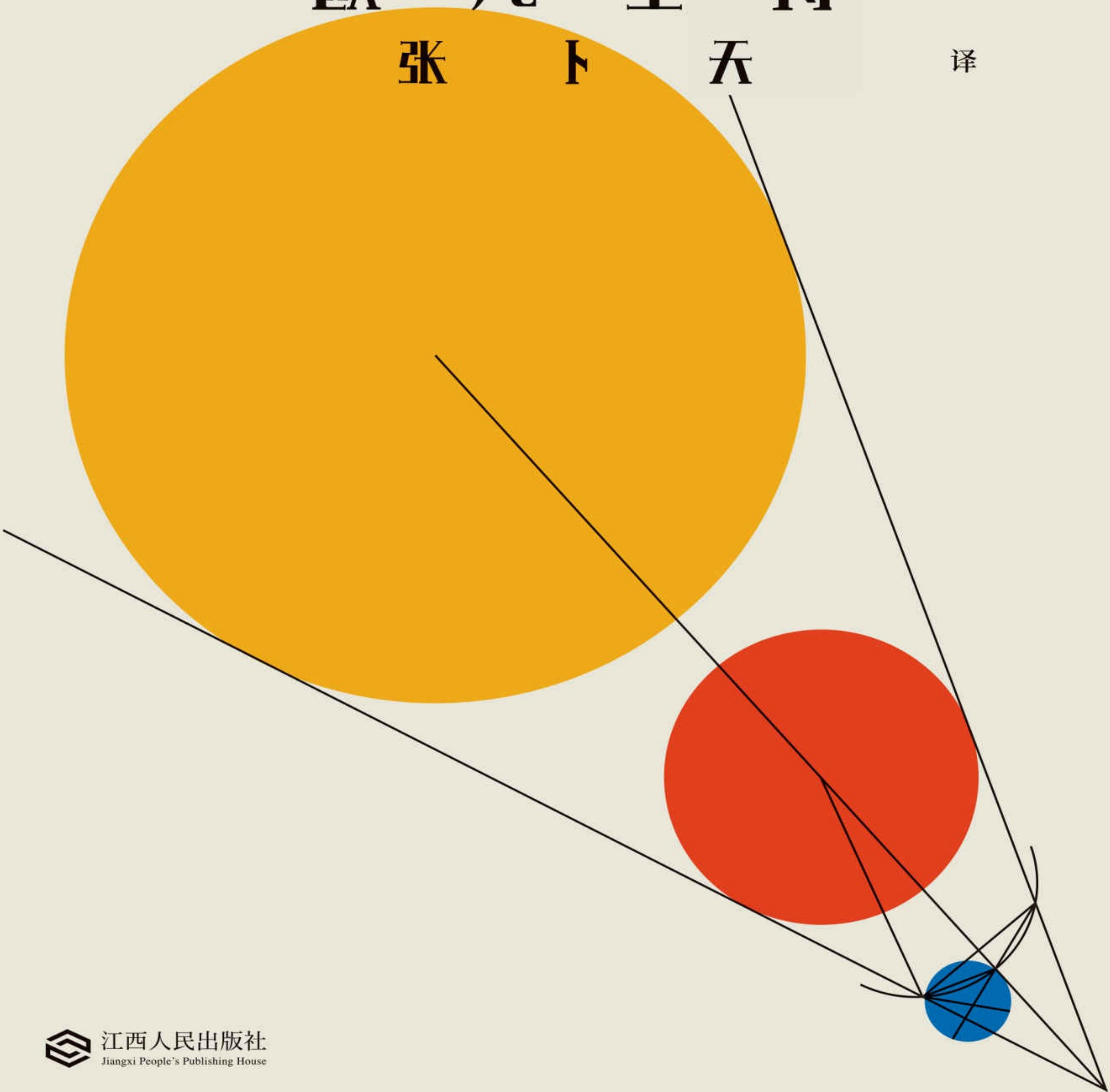
几何原本

〔古希腊〕欧几里得 著
张卜天 译



江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

目录 Contents

扉页
第一卷
定义 Definitions
公设 Postulates
公理 Common Notions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27

- 命题28
- 命题29
- 命题30
- 命题31
- 命题32
- 命题33
- 命题34
- 命题35
- 命题36
- 命题37
- 命题38
- 命题39
- 命题40
- 命题41
- 命题42
- 命题43
- 命题44
- 命题45
- 命题46
- 命题47
- 命题48

第二卷
- 定义 Definitions
- 命题 Proposition
  - 命题01
  - 命题02
  - 命题03
  - 命题04
  - 命题05
  - 命题06
  - 命题07
  - 命题08
  - 命题09
  - 命题10
  - 命题11
  - 命题12
  - 命题13

命题14
第三卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33

命题34
命题35
命题36
命题37
第四卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
第五卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11

命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
第六卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20

命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33
第七卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21

命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33
命题34
命题35
命题36
命题37
命题38
命题39
第八卷
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17

命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27
第九卷
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25

命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33
命题34
命题35
命题36
第十卷
定义 I Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23

命题24
命题25
命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33
命题34
命题35
命题36
命题37
命题38
命题39
命题40
命题41
命题42
命题43
命题44
命题45
命题46
命题47
定义 II Definitions
命题 Proposition
命题48
命题49
命题50
命题51
命题52
命题53
命题54
命题55
命题56
命题57
命题58

命题59
命题60
命题61
命题62
命题63
命题64
命题65
命题66
命题67
命题68
命题69
命题70
命题71
命题72
命题73
命题74
命题75
命题76
命题77
命题78
命题79
命题80
命题81
命题82
命题83
命题84
定义 III Definitions
命题 Proposition
命题85
命题86
命题87
命题88
命题89
命题90
命题91
命题92
命题93

命题94
命题95
命题96
命题97
命题98
命题99
命题100
命题101
命题102
命题103
命题104
命题105
命题106
命题107
命题108
命题109
命题110
命题111
命题112
命题113
命题114
命题115
第十一卷
定义 Definitions
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12

命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
命题19
命题20
命题21
命题22
命题23
命题24
命题25
命题26
命题27
命题28
命题29
命题30
命题31
命题32
命题33
命题34
命题35
命题36
命题37
命题38
命题39
第十二卷
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08

命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
第十三卷
命题 Proposition
命题01
命题02
命题03
命题04
命题05
命题06
命题07
命题08
命题09
命题10
命题11
命题12
命题13
命题14
命题15
命题16
命题17
命题18
译后记

扉页

几何原本

〔古希腊〕欧几里得　著
张卜天　译

江西人民出版社
Jiangxi People's Publishing House

图书在版编目（ＣＩＰ）数据
几何原本 / (古希腊) 欧几里得著; 张卜天译. -- 南昌 : 江西人民出版社, 2019.11
ISBN 978-7-210-11804-6
Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①欧… ②张… Ⅲ. ①欧氏几何 Ⅳ. ① O184
中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第247299号

《几何原本》
（古希腊) 欧几里得 著

责任编辑 冯雪松 韦祖建
出版发行 江西人民出版社
印刷 河北鹏润印刷有限公司
版次 2019年11月第1版 2019年11月第1次印刷
开本 787 毫米×1092 毫米 1/16
印张 30
印数 1-18,000
字数 530千字
书号 978-7-210-11804-6
定价 78.00元

赣版权登字**—01—2019—650**
版权所有 侵权必究

果麦文化 出品

第一卷

定义 Definitions[1]

01 / 点是没有部分的东西。

A *point* is that which has no part.

02 / 线是没有宽的长。

A *line* is breadthless length.

03 / 线之端是点。

The extremities of a line are points.

04 / 直线[2]是其上均匀放置着点的线。

A *straight* line is a line which lies evenly with the points on itself.

05 / 面是只有长和宽的东西。

A *surface* is that which has length and breadth only.

06 / 面之端是线。

The extremities of a surface are lines.

07 / 平面是其上均匀放置着直线的面。

A *plane surface* is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.

08 / 平面角是一个平面上两条线之间的倾斜，它们相交且不在一条直线上。

A *plane angle* is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.

09 / 且当夹这个角的线是直线时，这个角叫作直线角。

And when the lines containing the angle are straight, the angle is called *rectilineal*.

10 / 当一条直线与另一条直线交成的邻角彼此相等时，这些等角中的每一个都是直角，且称这条直线垂直于另一条直线。

When a straight line set up on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is *right*, and the straight line standing on the other is called a *perpendicular* to that on which it stands.

11 / 钝角是大于直角的角。

An *obtuse angle* is an angle greater than a right angle.

12 / 锐角是小于直角的角。

An *acute angle* is an angle less than a right angle.

13 / 边界是某个东西的端。

A *boundary* is that which is an extremity of anything.

14 / 形是由某一边界或若干边界所围成的东西。

A *figure* is that which is contained by any boundary or boundaries.

15 / 圆是由一条线所围成的平面形，其内有一点与这条线上的点连成的所有线段都相等；

A *circle* is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another;

16 / 且这个点叫作圆心。

And the point is called the *centre* of the circle.

17 / 圆的直径是任意一条过圆心作出且沿两个方向被圆周截得的直线，且该直线把圆二等分。

A *diameter* of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle.

18 / 半圆是由直径和它截得的圆周[3]所围成的图形。且半圆的心和圆心相同。

A *semicircle* is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it. And the centre of the semicircle is the same as that of the circle.

19 / 直线形是由直线围成的形，三边形是由三条直线围成的形，四边形是由四条直线围成的形，多边形是由四条以上直线围成的形。

Rectilineal figures are those which are contained by straight lines, *trilateral* figures being those contained by three, *quadrilateral* those contained by four, and *multilateral* those contained by more than four straight lines.

20 / 在三边形中，三边均相等的叫作等边三角形，只有两边相等的叫作等腰三角形，三边各不相等的叫作不等边三角形。

Of trilateral figures, an *equilateral triangle* is that which has its three sides equal, an *isosceles triangle* that which has two of its sides alone equal, and a *scalene triangle* that which has its three sides unequal.

21 / 此外，在三边形中，有一个直角的叫作直角三角形，有一个钝角的叫作钝角三角形，三个角均为锐角的叫作锐角三角形。

Further, of trilateral figures, a *right-angled triangle* is that which has a right angle, an *obtuse-angled triangle* that which has an obtuse angle, and an *acute-angled triangle* that which has its three angles acute.

22 / 在四边形中，等边且均为直角的叫作正方形，均为直角但不等边的叫作长方形，等边但非直角的叫作菱形，对角对边相等但不等边且非直角的叫作长菱形，其他四边形叫作不规则四边形。

Of quadrilateral figures, a *square* is that which is both equilateral and right-angled; an *oblong* that which is right-angled but not equilateral; a *rhombus* that which is equilateral but not right-angled; and a *rhomboid* that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called *trapezia*.

23 / 平行直线是同一平面上沿两个方向无定限延长、不论沿哪个方向都

不相交的直线。

Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

---

[1]欧几里得的希腊文本（第一个印刷版于1533年问世）中的定义、公设和公理本来是没有编号的。其定义是连续地叙述出来的，它更像是一篇讨论术语如何使用的序言，而不是充当后续命题的公理基础。这里我们遵循英译者托马斯·希思（Thomas L. Heath）所使用的格式。（译者注）

[2]按照现在的理解，直线是无限的，而希腊人所说的直线却是有限的，本书没有按照现在的理解把“直线”译成“线段”。此外，对于这个“直线”定义，其希腊文原文的含义非常模糊，历史上有着各种不同解读，希思给出的英译文也不够明确。有兴趣的读者可查阅希思所作的解说。（译者注）

[3]按照现在的理解，“圆周”是一个正圆，而希腊人所说的“圆周”却是圆的一部分，相当于现在所说的“弧”。本书没有按照现在的理解把“圆周”译成“弧”。（译者注）

公设 **Postulates**

1.从任一点到任一点可作一条直线

To draw a straight line from any point to any point.

2.一条有限直线可沿直线继续延长

To produce a finite straight line continuously in a straight line.

3.以任一点为心和任意距离可以作圆

To describe a circle with any centre and distance.

4.所有直角都彼此相等

That all right angles are equal to one another.

5.一直线与两条直线相交，若在同侧的两内角之和小于两直角，则这两条直线无定限延长后在该侧相交

That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right

angles.

公理 **Common Notions**

1.等于同量的量也彼此相等

Things which are equal to the same thing are also equal to one another.

2.等量加等量，其和相等

If equals be added to equals, the wholes are equal.

3.等量减等量，其差相等

If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.

4.彼此重合的东西彼此相等

Things which coincide with one another are equal to one another.

5.整体大于部分

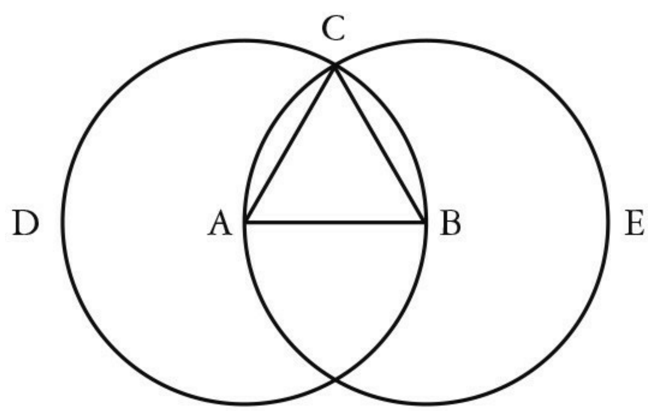
The whole is greater than the part.

命题 Proposition

命题01

在一给定的有限直线上作一个等边三角形。

On a given finite straight line to construct an equilateral triangle.



设AB是给定的有限直线。

于是，要求在直线AB上作一个等边三角形。

以A为圆心、AB为距离作圆BCD；

[公设3]

再以B为圆心、BA为距离作圆ACE；

[公设3]

从两圆的交点C到点A、点B连直线CA、CB。

[公设1]

现在，由于点A是圆CDB的圆心，所以AC等于AB。

[定义15]

又，由于点B是圆CAE的圆心，所以BC等于BA。

[定义15]

但已证明，CA也等于AB；

因此，直线CA、CB中的每一条都等于AB。

而等于同量的量也彼此相等；

[公理1]

因此，CA也等于CB。

因此，三条直线CA、AB、BC彼此相等。

因此，三角形ABC是等边的；且它是在给定的有限直线AB上作的。

这就是所要作的。（Q.E.F.）[1]

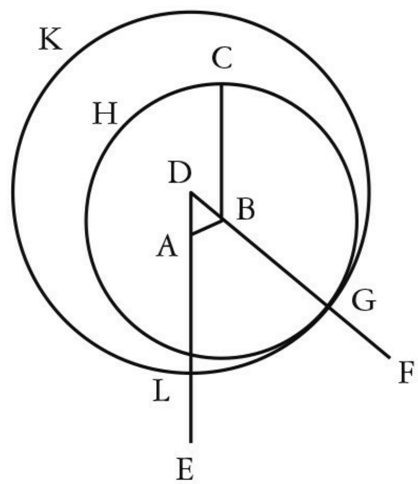
---

[1]Q.E.F.是拉丁文“quod erat faciendum”的缩写，即“这就是所要求（作）的”。（译者注）

命题**02**

从给定一点**[**作为端点**]**[1]作一直线等于给定的直线。

To place at a given point [as an extremity] a straight line equal to a given straight line.



设A为给定的点，BC是给定的直线。

于是，要求从点A（作为一个端点）作一直线等于给定的直线BC。

从点A到点B连直线AB；

[公设1]

在AB上作等边三角形DAB。

[I. 1]

延长DA、DB成直线AE、BF；

[公设2]

以B为圆心、BC为距离作圆CGH；

[公设3]

再以D为圆心、DG为距离作圆GKL。

[公设3]

于是，由于点B是圆CGH的圆心，所以

BC等于BG。

又，由于点D是圆GKL的圆心，所以

DL等于DG。

而DA等于DB；

因此，余量AL等于余量BG。

[公理3]

但已证明，BC等于BG；

因此，直线AL、BC都等于BG。

而等于同量的量也彼此相等。

[公理1]

因此，AL也等于BC。

这样便从给定的点A作出了直线AL等于给定的直线BC。

这就是所要作的。

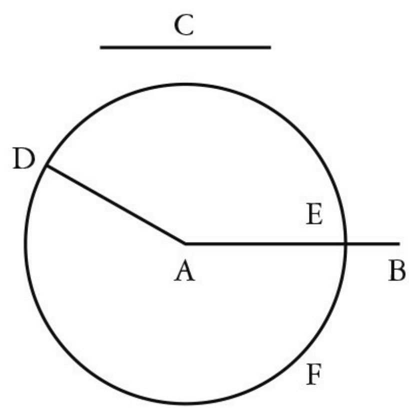
---

[1]本书中的方括号“[ ]”表示其中所括文字乃是希思提供的内容，它们能够帮助澄清，但并不见诸希腊文本。（译者注）

命题**03**

给定两条不等的直线，从较大的直线上截取一条直线等于较小的。

Given two unequal straight lines, to cut off from the greater a straight line equal to the less.



设AB、C是给定的两条不等的直线，且AB是其中较大的。

于是，要求从较大的AB上截取一条直线等于较小的C。

从点A作AD等于直线C；

[I. 2]

以A为圆心、AD为距离作圆DEF。

[公设3]

现在，由于点A是圆DEF的圆心，所以

AE等于AD。

[定义15]

又，C也等于AD。

因此，直线AE、C中的每一条都等于AD；

于是，AE也等于C。

[公理1]

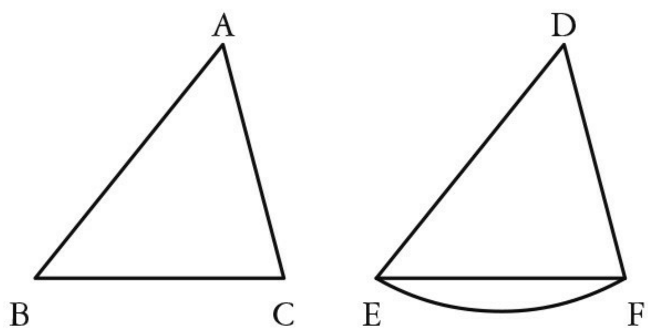
这样便从给定的两条直线AB、C中较大的AB上截取了AE等于较小的C。

这就是所要作的。

命题**04**

若一个三角形的两边分别等于另一个三角形的两边，且相等直线所夹的角相等，则这两个三角形的底等于底，三角形等于三角形，其余的角也分别等于其余的角，即等边所对的角。

If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and have the angles contained by the equal straight lines equal, they will also have the base equal to the base, the triangle will be equal to the triangle, and the remaining angles will be equal to the remaining angles respectively, namely those which the equal sides subtend.



设ABC、DEF是两个三角形，两边AB、AC分别等于两边DE、DF，即AB等于DE，AC等于DF，且角BAC等于角EDF。

我说，底BC也等于底EF，三角形ABC等于三角形DEF，其余的角分别等于其余的角，即等边所对的角，也就是角ABC等于角DEF，角ACB等于角DFE。

这是因为，如果把三角形ABC叠合到三角形DEF上，若点A被置于点D上，直线AB被置于DE上，于是因为AB等于DE，所以点B也与点E重合。

又，由于AB与DE重合，因为角BAC等于角EDF，所以直线AC也与DF重合；

于是，因为AC等于DF，所以点C也与点F重合。

但B也与E重合；

因此，底BC与底EF重合，

并且等于它。

[公理4]

于是，整个三角形ABC与整个三角形DEF重合，

并且等于它。

[公理4]

其余的角也与其余的角重合，并且等于它们，

角ABC等于角DEF，

角ACB等于角DFE。

[公理4]

这就是所要证明的。（Q.E.D.）[1]

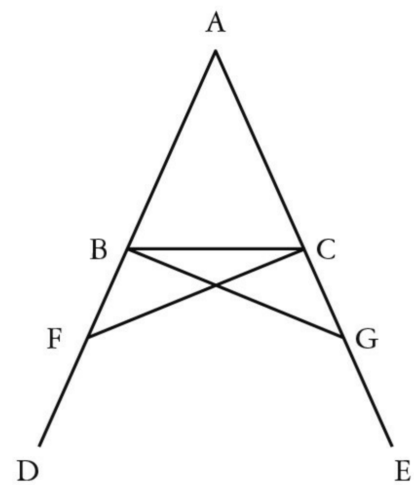
---

[1]Q.E.D.是拉丁文“quod erat demonstrandum”的缩写，即“这就是所要证明的”。（译者注）

命题**05**

在等腰三角形中，两底角彼此相等；又，若继续延长两腰，则底以下的两角也彼此相等。

In isosceles triangles the angles at the base are equal to one another,and, if the equal straight lines be produced further, the angles under the base will be equal to one another.



设ABC是一个等腰三角形，边AB等于边AC；

延长AB、AC成直线BD、CE。

[公设2]

我说，角ABC等于角ACB，角CBD等于角BCE。

在BD上任取一点F；

在较大的AE上截取AG等于较小的AF；

[I. 3]

连接FC、GB。

[公设1]

于是，由于AF等于AG，AB等于AC，所以

两边FA、AC分别等于两边GA、AB；

且它们夹着公共角FAG。

因此，底FC等于底GB，

且三角形AFC等于三角形AGB，

其余的角分别等于其余的角，即相等的边所对的角，

也就是说，角ACF等于角ABG，

角AFC等于角AGB。

[I. 4]

又，由于整个AF等于整个AG，且它们中AB等于AC，所以

余量BF等于余量CG。

但已证明，FC等于GB；

因此，两边BF、FC分别等于两边CG、GB；

且角BFC等于角CGB，

而底BC公用；

因此，三角形BFC也等于三角形CGB，其余的角也分别等于其余的角，即等边所对的角；

因此，角FBC等于角GCB，

角BCF等于角CBG。

因此，由于已经证明整个角ABG等于角ACF，其中角CBG等于角BCF，所以

其余的角ABC等于其余的角ACB；

它们都在三角形ABC的底以上。

但这也就证明了角FBC等于角GCB；

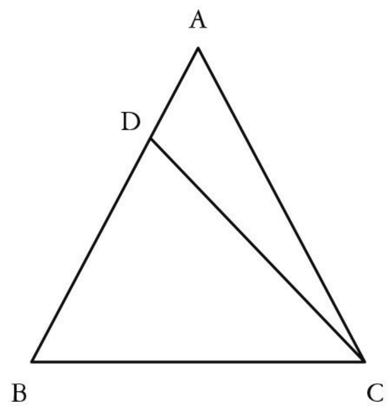
它们都在底以下。

这就是所要证明的。

命题**06**

若一个三角形中两角彼此相等，则等角所对的边也彼此相等。

If in a triangle two angles be equal to one another, the sides which subtend the equal angles will also be equal to one another.



设三角形ABC中，角ABC等于角ACB；

我说，边AB也等于边AC。

这是因为，若AB不等于AC，则其中有一个较大，

设AB较大；

从较大的AB上截取DB等于较小的AC；

连接DC。

于是，由于DB等于AC，

且BC公用，

两边DB、BC分别等于两边AC、CB；

且角DBC等于角ACB；

因此，底DC等于底AB，

且三角形DBC等于三角形ACB，即较小的等于较大的：这是荒谬的。

因此，AB并非不等于AC；

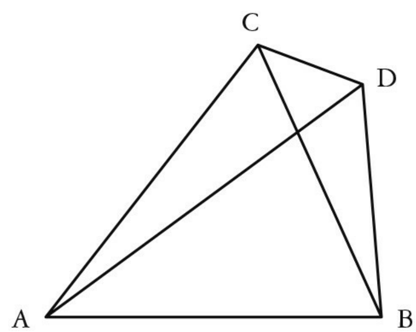
因此，AB等于AC。

这就是所要证明的。

命题**07**

在一直线上**[**从它的两个端点**]**作两条直线相交于一点，则不可能在该直线同侧**[**从它的两个端点**]**作另外两条直线相交于另一点，使得所作的两条直线分别等于前面两条直线，即分别等于与之有相同端点的直线。

Given two straight lines constructed on a straight line [from its extremities] and meeting in a point, there cannot be constructed on the same straight line [from its extremities], and on the same side of it, two other straight lines meeting in another point and equal to the former two respectively, namely each to that which has the same extremity with it.



这是因为，如果可能，在直线AB上作两条直线AC、CB，它们交于点C，

在AB同侧作另外两条直线AD、DB相交于另一点D，且这两条直线分别等于前面两条直线，即与之有相同端点的直线，

于是，CA等于与之有相同端点A的DA，

且CB等于与之有相同端点B的DB；

连接CD。

于是，由于AC等于AD，所以

角ACD也等于角ADC；

[I. 5]

因此，角ADC大于角DCB，

因此，角CDB比角DCB更大。

又，由于CB等于DB，所以

角CDB也等于角DCB。

但已证明，角CDB比角DCB更大：

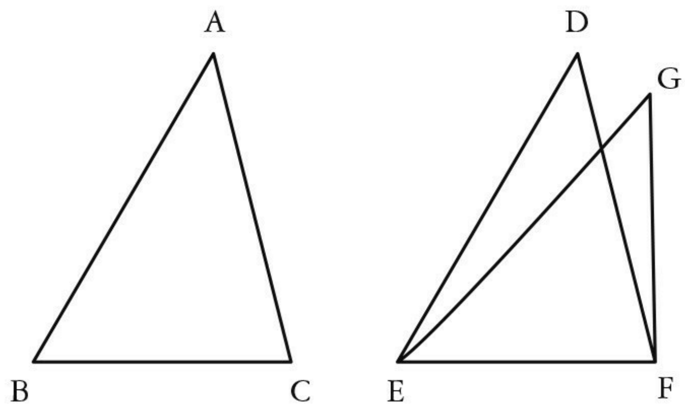
这是不可能的。

这就是所要证明的。

命题08

若一个三角形的两边分别等于另一个三角形的两边，前者的底等于后者的底，则相等直线所夹的角也相等。

If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, and have also the base equal to the base, they will also have the angles equal which are contained by the equal straight lines.



设ABC、DEF是两个三角形，两边AB、AC分别等于两边DE、DF，即AB等于DE，AC等于DF；又设它们的底BC等于底EF。

我说，角BAC也等于角EDF。

这是因为，如果把三角形ABC叠合到三角形DEF上，且点B被置于点E上，直线BC被置于EF上，于是因为BC等于EF，

点C也与F重合。

于是，由于BC与EF重合，所以

BA、AC也与ED、DF重合；

这是因为，如果底BC与底EF重合，而边BA、AC不与ED、DF重合，而是落在它们旁边，比如EG、GF，

那么，在一条直线上[从它的两个端点]作两条直线相交于一点，则能够在该直线同侧[从它的两个端点]作另外两条直线相交于另一点，使得所作的两直线分别等于前面两直线，即分别等于与之有相同端点的直线。

但它们是无法这样作出来的。

[I. 7]

因此，如果把底BC叠合到底EF上，而边BA、AC与ED、DF不重合：这是不可能的；

因此，它们重合，

于是，角BAC也与角EDF重合，

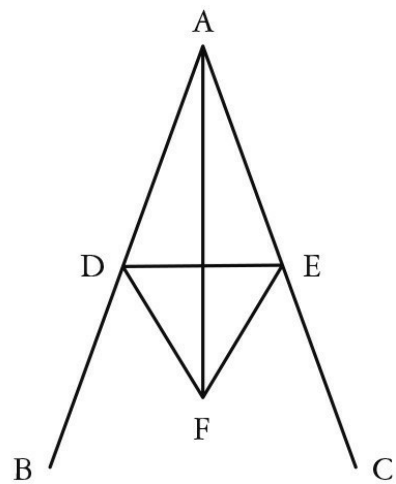
并且等于它。

这就是所要证明的。

命题09

将一个给定的直线角二等分。

To bisect a given rectilineal angle.



设角BAC是给定的直线角，

于是，要求将这个角二等分。

在AB上任取一点D;

在AC上截取AE等于AD;

[I. 3]

连接DE，

在DE上作等边三角形DEF;

连接AF。

我说，角BAC被直线AF二等分。

这是因为，AD等于AE，

AF公用，所以

两边DA、AF分别等于两边EA、AF。

而底DF等于底EF；

因此，角DAF等于角EAF。

[I. 8]

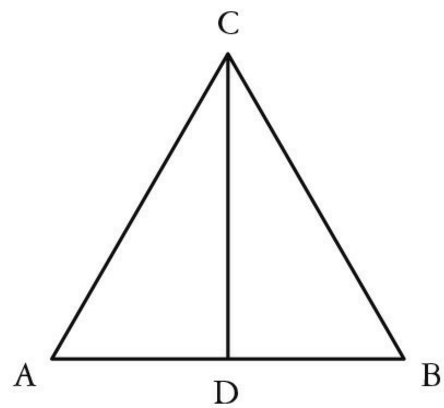
因此，给定的直线角BAC已被直线AF二等分。

这就是所要作的。

命题**10**

将一条给定的有限直线二等分。

To bisect a given finite straight line.



设AB为给定的有限直线。

于是，要求将有限直线AB二等分。

在AB上作等边三角形ABC，

[I. 1]

且设角ACB被直线CD二等分；

[I. 9]

我说，直线AB被二等分于点D。

这是因为，由于AC等于CB，且CD公用，所以

两边AC、CD分别等于两边BC、CD；

而角ACD等于角BCD；

因此，底AD等于底BD。

[I. 4]

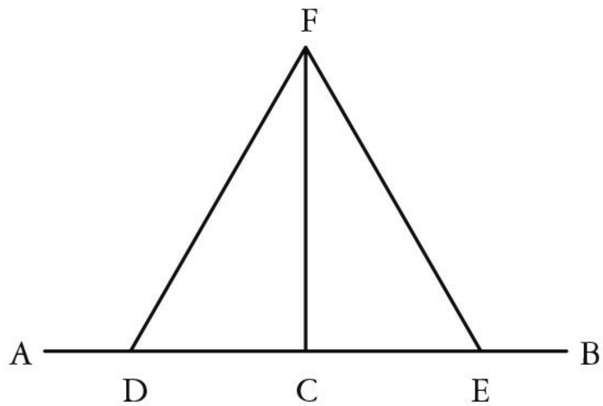
因此，给定的有限直线AB被二等分于点D。

这就是所要作的。

命题**11**

从给定直线上一给定点作一直线与给定直线成直角。

To draw a straight line at right angles to a given straight line from a given point on it.



设AB是给定的直线，C是其上的给定点。

于是，要求从点C作一直线垂直于直线AB。

在AC上任取一点D；

使CE等于CD；

[I.3]

在DE上作等边三角形FDE；

[I. 1]

连接FC；

我说，直线FC就是从给定直线AB上的给定点C作出的与直线AB垂直的直线。

这是因为，由于DC等于CE，且CF公用，

两边DC、CF分别等于两边EC、CF；

且底DF等于底FE；

因此，角DCF等于角ECF；

[I.8]

且它们是邻角。

但是，当一条直线与另一条直线相交成彼此相等的邻角时，这些等角中的每一个都是直角；

[定义10]

因此，角DCF、FCE中的每一个都是直角。

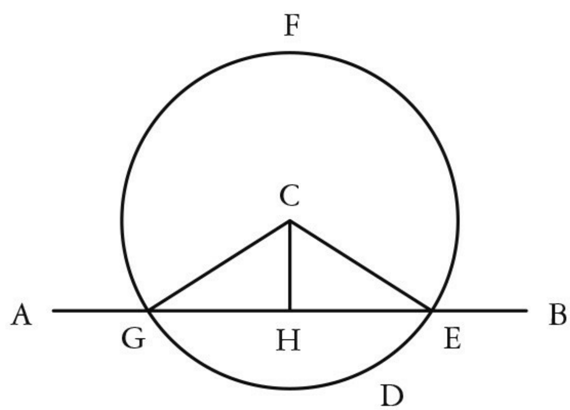
因此，直线CF就是从给定直线AB上的给定点C作出的与直线AB垂直的直线。

这就是所要作的。

命题**12**

从给定的无限直线外一给定点作该直线的垂线。

To a given infinite straight line, from a given point which is not on it, to draw a perpendicular straight line.



设AB为给定的无限直线，C是不在其上的给定点；

于是，要求从给定的无限直线AB外的给定点C作AB的垂线。

在直线AB的另一侧任取一点D，以C为圆心、CD为距离作圆EFG；

[公设3]

设直线EG被二等分于H，

[I. 10]

连接CG、CH、CE。

[公设1]

我说，CH就是从给定的无限直线AB外的给定点C所作的AB的垂线。

这是因为，由于GH等于HE，且HC公用，所以

两边GH、HC分别等于两边EH、HC；

且底CG等于底CE；

因此，角CHG等于角EHC。

[I. 8]

且它们是邻角。

但是，当一条直线与另一条直线交成的邻角彼此相等时，这些等角中的每一个都是直角，且称这条直线垂直于另一条直线。

[定义10]

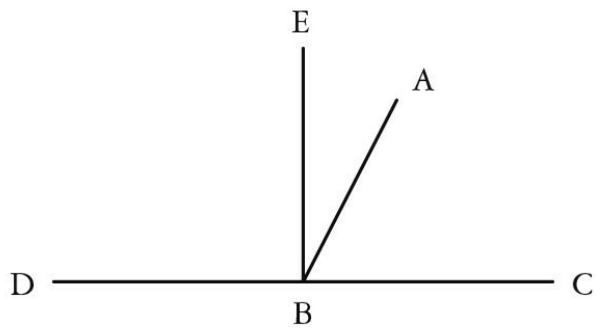
因此，CH就是从给定的无限直线AB外的给定点C所作的AB的垂线。

这就是所要作的。

命题**13**

一直线与另一直线交成的角，要么是两直角，要么其和等于两直角。

If a straight line set up on a straight line make angles, it will make either two right angles or angles equal to two right angles.



设任意直线AB与直线CD交成角CBA、ABD；

我说，角CBA、ABD要么是两直角，要么其和等于两直角。

现在，若角CBA等于角ABD，则它们是两直角。

[定义10]

但若不是，设BE是从点B作的与CD成直角的直线；

[I. 11]

因此，角CBE、EBD是两直角。

于是，由于角CBE等于两个角CBA、ABE之和，

给它们分别加上角EBD；

因此，角CBE、EBD之和等于三个角CBA、ABE、EBD之和。

[公理2]

又，由于角DBA等于两个角DBE、EBA之和，

给它们分别加上角ABC；

因此，角DBA、ABC之和等于三个角DBE、EBA、ABC之和。

[公理2]

但已证明，角CBE、EBD之和等于这三个角之和；

而等于同量的量也彼此相等；

[公理1]

因此，角CBE、EBD之和也等于角DBA、ABC之和。

但角CBE、EBD之和是两直角；

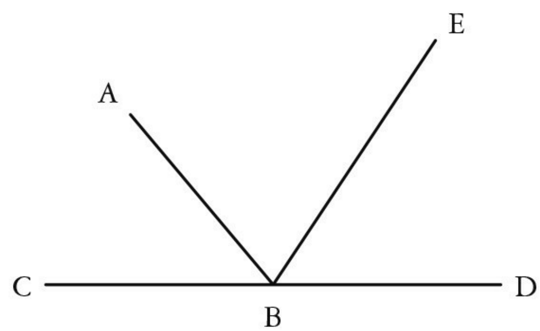
因此，角DBA、ABC之和也等于两直角。

这就是所要证明的。

命题**14**

若过任意直线上一点的两条直线不在该直线的同侧，且与该直线所成邻角之和等于两直角，则这两条直线在同一直线上。

If with any straight line, and at a point on it, two straight lines not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, the two straight lines will be in a straight line with one another.



设过任意直线AB上的点B有两条不在AB同侧的直线BC、BD成邻角ABC、ABD，其和等于两直角；

我说，BD与CB在同一直线上，

这是因为，如果BD和BC不在同一直线上，设BE和CB在同一直线上。

于是，由于直线AB与直线CBE相交，所以

角ABC、ABE之和等于两直角。

[I. 13]

但角ABC、ABD之和也等于两直角；

因此，角CBA、ABE之和等于角CBA、ABD之和。

[公设4和公理1]

从它们中分别减去角CBA；

因此，其余的角ABE等于其余的角ABD，

[公理3]

小角等于大角：这是不可能的。

因此，BE和CB不在同一直线上。

类似地，可以证明，除BD外也没有任何其他直线和CB在同一直线上。

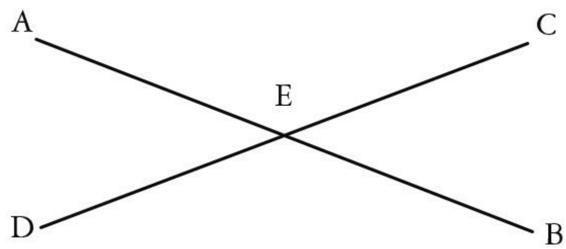
因此，CB和BD在同一直线上。

这就是所要证明的。

命题**15**

若两直线相交，则交成彼此相等的对顶角。

If two straight lines cut one another, they make the vertical angles equal to one another.



设直线AB、CD相交于点E；

我说，角AEC等于角DEB，且角CEB等于角AED。

这是因为，由于直线AE与直线CD相交，交成了角CEA、AED，所以

角CEA、AED之和等于两直角。

又，由于直线DE与直线AB相交，交成了角AED、DEB，所以

角AED、DEB之和等于两直角。

[I. 13]

但已证明，角CEA、AED之和等于两直角；

因此，角CEA、AED之和等于角AED、DEB之和。

[公设4和公理1]

从它们中分别减去角AED；

因此，其余的角CEA等于其余的角BED。

[公理3]

类似地，可以证明，角CEB也等于角DEA。

这就是所要证明的。

<推论（Porism） 由此显然可得，若两条直线相交，则在交点处交成的各角之和等于四直角。>[1]

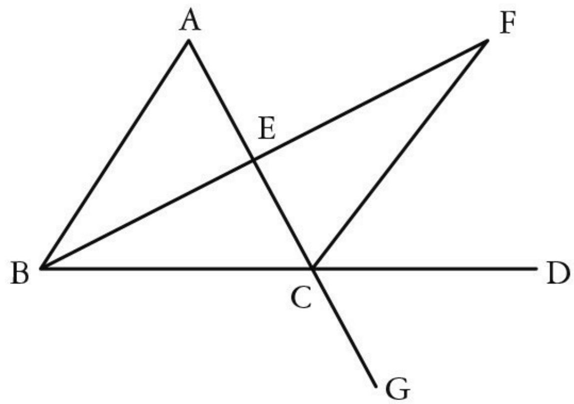
---

[1]本书中的尖括号“< >”表示其中所括文字被学者们视为某位早期编者所作的插补，即非欧几里得原作。此条推论在普罗克洛斯（Proclus，410—485）的时代即已见于抄本。（译者注）

命题**16**

在任意三角形中，若延长一边，则外角大于任一内对角。

In any triangle, if one of the sides be produced, the exterior angle is greater than either of the interior and opposite angles.



设ABC是一个三角形，延长它的一边BC到D；

我说，外角ACD大于内角CBA、BAC中的任何一个。

设AC被二等分于E，

[I. 10]

连接BE并沿直线延长到F；

使EF等于BE，

[I. 3]

连接FC，

[公设1]

延长AC到G。

[公设2]

于是，由于AE等于EC，BE等于EF，所以

两边AE、EB分别等于两边CE、EF；

且角AEB等于角FEC，因为它们是对顶角。

[I. 15]

因此，底AB等于底FC，三角形ABE等于三角形CFE，

且其余的角分别等于其余的角，即等边所对的角；

[I. 4]

因此，角BAE等于角ECF。

但角ECD大于角ECF；

[公理5]

因此，角ACD大于角BAE。

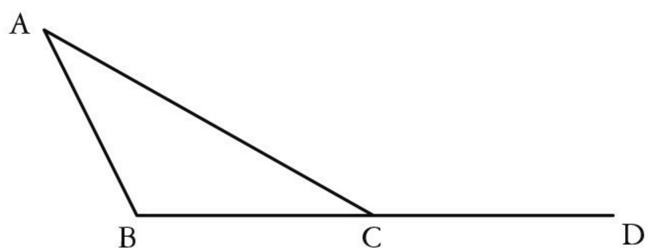
类似地也有，若BC被二等分，则可以证明，角BCG，即角ACD[I. 15]，大于角ABC。

这就是所要证明的。

命题**17**

在任意三角形中，任意两角之和小于两直角。

In any triangle,two angles taken together in any manner are less than two right angles.



设ABC是一个三角形；

我说，三角形ABC的任意两角之和小于两直角。

将BC延长到D。

[公设2]

于是，由于角ACD是三角形ABC的一个外角，所以它大于内对角ABC。

[I. 16]

给它们分别加上角ACB；

因此，角ACD、ACB之和大于角ABC、BCA之和。

但角ACD、ACB之和等于两直角。

[I. 13]

因此，角ABC、BCA之和小于两直角。

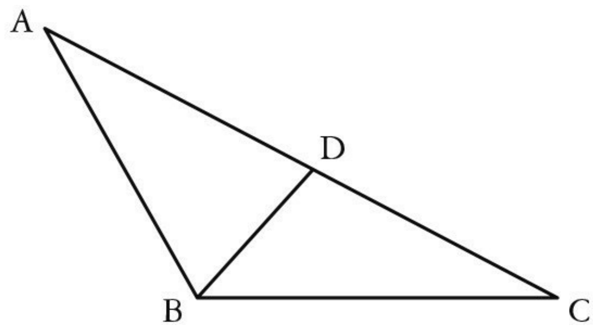
类似地，可以证明，角BAC、ACB之和也小于两直角，角CAB、ABC之和也是如此。

这就是所要证明的。

命题**18**

在任意三角形中，大边对大角。

In any triangle the greater side subtends the greater angle.



设在三角形ABC中，边AC大于AB；

我说，角ABC也大于角BCA。

这是因为，由于AC大于AB，取AD等于AB[I. 3]，连接BD，

于是，由于角ADB是三角形BCD的一个外角，所以

它大于内对角DCB。

[I.16]

但角ADB等于角ABD，这是由于边AB等于AD；

因此，角ABD也大于角ACB；

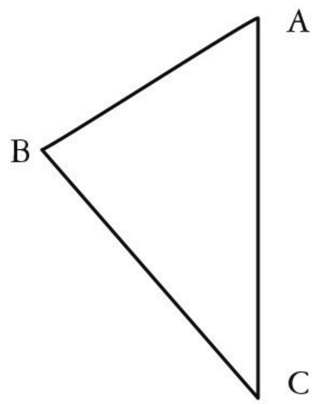
因此，角ABC比角ACB更大。

这就是所要证明的。

命题**19**

在任意三角形中，大角对大边。

In any triangle the greater angle is subtended by the greater side.



设在三角形ABC中，角ABC大于角BCA；

我说，边AC也大于边AB。

这是因为，若非如此，则AC等于或小于AB。

现在，AC不等于AB；

因为否则的话，角ABC也等于角ACB；

[I. 5]

但它并不等于；

因此，AC不等于AB。

AC也不小于AB，因为否则的话，角ABC也小于角ACB；

[I. 18]

但它并不小于；

因此，AC不小于AB。

已经证明，

AC也不等于AB。

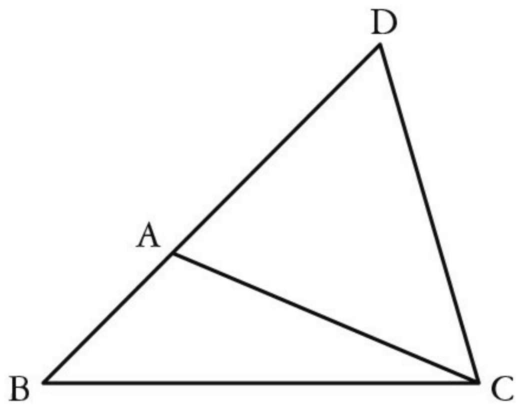
因此，AC大于AB。

这就是所要证明的。

命题**20**

在任意三角形中，任意两边之和大于其余一边。

In any triangle two sides taken together in any manner are greater than the remaining one.



设ABC为一个三角形；

我说，在三角形ABC中，任意两边之和大于其余一边，即

BA、AC之和大于BC，

AB、BC之和大于AC，

BC、CA之和大于AB。

这是因为，延长BA到点D，使DA等于CA，连接DC，

于是，由于DA等于AC，所以

角ADC也等于角ACD；

[I. 5]

因此，角BCD大于角ADC。

[公理5]

又，由于三角形DCB的角BCD大于角BDC，且大角对大边，

[I. 19]

因此，DB大于BC。

但DA等于AC；

因此，BA、AC之和大于BC。

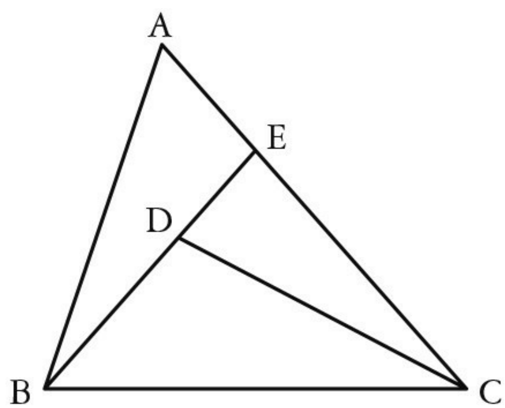
类似地，可以证明，AB、BC之和也大于CA，BC、CA之和也大于AB。

这就是所要证明的。

命题**21**

若从三角形一边的两个端点作两条直线交于三角形内，则这样作出的两条直线之和小于三角形其余两边之和，但夹角更大。

If on one of the sides of a triangle, from its extremities, there be constructed two straight lines meeting within the triangle, the straight lines so constructed will be less than the remaining two sides of the triangle, but will contain a greater angle.



在三角形ABC的一边BC上，从其端点B、C作两条直线BD、DC交于三角形ABC内；

我说，BD、DC之和小于三角形其余两边BA、AC之和，但所夹的角BDC大于角BAC。

这是因为，延长BD到E，

于是，由于在任意三角形中，两边之和大于第三边，

[I. 20]

因此，在三角形ABE中，两边AB、AE之和大于BE。

给它们分别加上EC；

因此，BA、AC之和大于BE、EC之和。

又，由于在三角形CED中，两边CE、ED之和大于CD，

给它们分别加上DB；

因此，CE、EB之和大于CD、DB之和。

[I. 20]

但已证明，BA、AC之和大于BE、EC之和；

因此，BA、AC之和比BD、DC之和更大。

又，由于在任意三角形中，外角大于内对角，

[I. 16]

因此，在三角形CDE中，

外角BDC大于角CED。

此外，同理，在三角形ABE中也有，

外角CEB大于角BAC。

但已证明，角BDC大于角CEB；

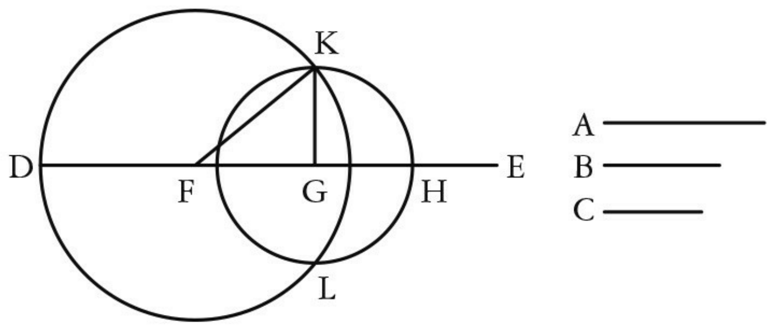
因此，角BDC比角BAC更大。

这就是所要证明的。

命题**22**

由分别等于三条给定直线的三条直线作一个三角形，则任意两条直线之和必定大于另一条直线。

Out of three straight lines, which are equal to three given straight lines, to construct a triangle: thus it is necessary that two of the straight lines taken together in any manner should be greater than the remaining one.



设三条给定直线是A、B、C，其中任意两条之和大于另一条，即

A、B之和大于C，

A、C之和大于B，

B、C之和大于A；

于是，要求由分别等于A、B、C的三条直线作一个三角形。

作一条直线DE，一端为D，但沿E的方向有无限长，

取DF等于A，FG等于B，GH等于C。

[I. 3]

以F为圆心、FD为距离作圆DKL；

又，以G为圆心、GH为距离作圆KLH；

连接KF、KG；

我说，三角形KFG就是由分别等于A、B、C的三条直线所作的三角形。

这是因为，由于点F是圆DKL的圆心，所以

FD等于FK。

但FD等于A；

因此，KF也等于A。

又，由于点G是圆LKH的圆心，所以

GH等于GK。

但GH等于C；

因此，KG也等于C。

而FG也等于B；因此，三条直线KF、FG、GK等于三条直线A、B、C。

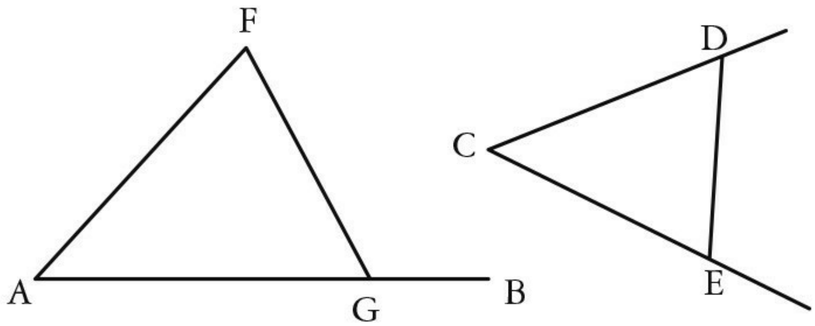
这样便由分别等于三条给定直线A、B、C的三条直线KF、FG、GK作出了三角形KFG。

这就是所要作的。

命题**23**

在给定的直线上并且在其上一点作一个直线角等于给定的直线角。

On a given straight line and at a point on it to construct a rectilineal angle equal to a given rectilineal angle.



设AB是给定的直线，A为其上一点，角DCE为给定的直线角；

于是，要求在给定的直线AB上并且在其上的点A作一个直线角等于给定的直线角DCE。

在直线CD、CE上分别任取点D、E；

连接DE，

由分别等于三条直线CD、DE、CE的三条直线作三角形AFG，取CD等于AF，CE等于AG，DE等于FG。

[I. 22]

于是，由于两边DC、CE分别等于两边FA、AG，且底DE等于底FG，所以

角DCE等于角FAG。

[I. 8]

这样便在给定的直线AB上并且在其上的点A作出了直线角FAG等于

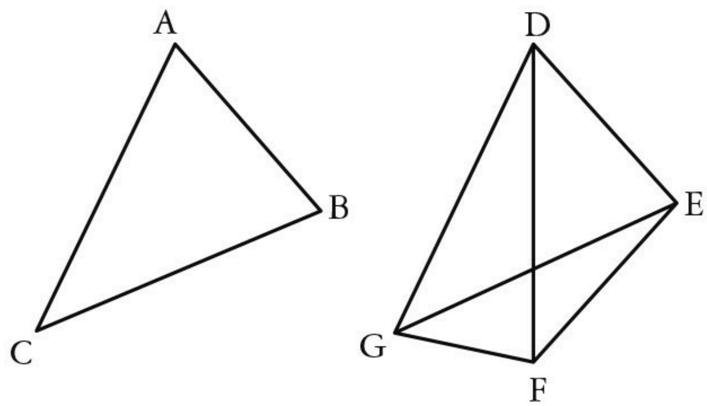
给定的直线角DCE。

这就是所要作的。

命题**24**

若一个三角形的两条边分别等于另一个三角形的两条边，但前者的夹角大于后者的夹角，则较大夹角所对的底也较大。

If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, but have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other, they will also have the base greater than the base.



设ABC、DEF是两个三角形，其中两边AB、AC分别等于两边DE、DF，即AB等于DE，AC等于DF，设A处的角大于D处的角；

我说，底BC也大于底EF。

这是因为，由于角BAC大于角EDF，在直线DE上取其上的点D作角EDG使之等于角BAC；

[I. 23]

取DG等于两直线AC或DF，连接EG、FG。

于是，由于AB等于DE，AC等于DG，所以

两边BA、AC分别等于两边ED、DG；

而角BAC等于角EDG；

因此，底BC等于底EG。

[I. 4]

又，由于DF等于DG，所以

角DGF也等于角DFG，

[I. 5]

因此，角DFG大于角EGF。

因此，角EFG比角EGF更大。

又，由于EFG是一个三角形，其中角EFG大于角EGF，而大角对大边，

[I. 19]

因此，边EG也大于EF。

但EG等于BC。

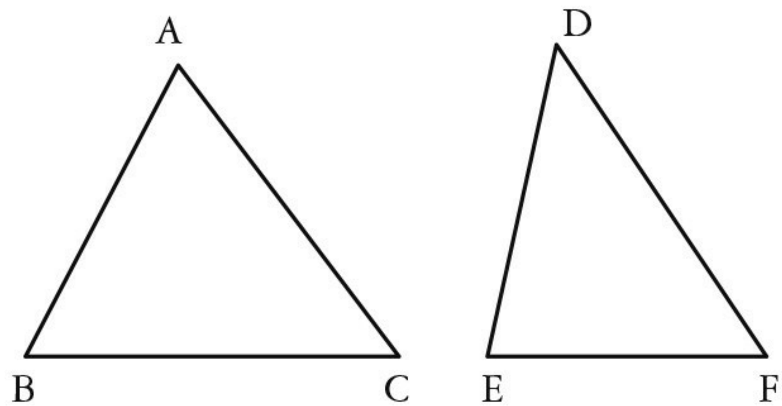
因此，BC也大于EF。

这就是所要证明的。

命题**25**

若一个三角形的两条边分别等于另一个三角形的两条边，但前者的底大于后者的底，则较大的底所对的角也较大。

If two triangles have the two sides equal to two sides respectively, but have the base greater than the base, they will also have the one of the angles contained by the equal straight lines greater than the other.



设ABC、DEF是两个三角形，其中两边AB、AC分别等于两边DE、DF，即AB等于DE，AC等于DF；

且设底BC大于底EF；

我说，角BAC也大于角EDF。

这是因为，若非如此，则角BAC要么等于，要么小于角EDF。

现在，角BAC不等于角EDF；因为否则的话，底BC也等于底EF，

[I. 4]

但它并不等于；

因此，角BAC不等于角EDF。

又，角BAC也不小于角EDF，

因为否则的话，底BC也小于底EF，

[I. 24]

但它并不小于；

因此，角BAC不小于角EDF。

但已证明，它们不相等；

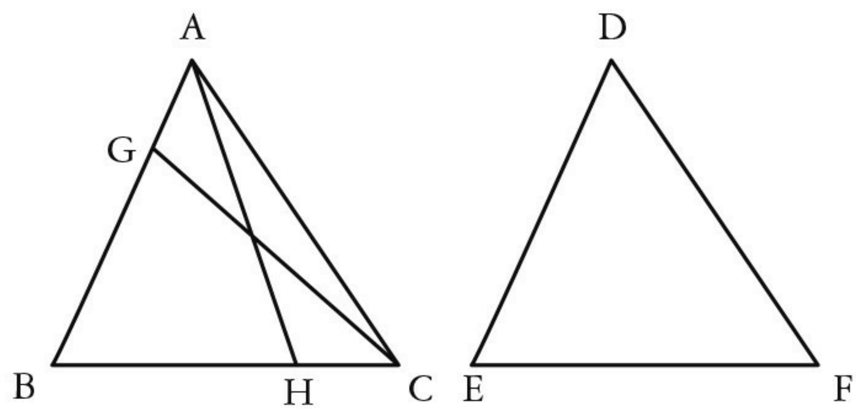
因此，角BAC大于角EDF。

这就是所要证明的。

命题**26**

若一个三角形的两个角分别等于另一个三角形的两个角，且前者的一边等于后者的一边，即这边要么是等角的夹边，要么是一个等角的对边，则它们其余的边也等于其余的边，其余的角也等于其余的角。

If two triangles have the two angles equal to two angles respectively, and one side equal to one side, namely, either the side adjoining the equal angles, or that subtending one of the equal angles, they will also have the remaining sides equal to the remaining sides and the remaining angle to the remaining angle.



设ABC、DEF是两个三角形，其中两角ABC、BCA分别等于两角DEF、EFD，即角ABC等于角DEF，角BCA等于角EFD；又设它们还有一边等于一边，先设是等角所夹的边，即BC等于EF；

我说，它们其余的边也分别等于其余的边，即AB等于DE，AC等于DF，其余的角也等于其余的角，即角BAC等于角EDF。

这是因为，如果AB不等于DE，那么其中一个较大。

设AB较大，取BG等于DE；连接GC。

于是，由于BG等于DE，BC等于EF，所以

两边GB、BC分别等于两边DE、EF；

而角GBC等于角DEF；

因此，底GC等于底DF，

三角形GBC等于三角形DEF，

其余的角等于其余的角，即等边所对的角相等；

[I. 4]

因此，角GCB等于角DFE。

但根据假设，角DFE等于角BCA；

因此，角BCG等于角BCA，

即小的等于大的：这是不可能的。

因此，AB并非不等于DE，

因此等于DE。

但BC也等于EF；

因此，两边AB、BC分别等于两边DE、EF，

而角ABC等于角DEF；

因此，底AC等于底DF，

且其余的角BAC等于其余的角EDF。

[I. 4]

又，设等角的对边相等，如AB等于DE；

我说，其余的边等于其余的边，即AC等于DF，BC等于EF，以及其余的角BAC等于其余的角EDF。

这是因为，如果BC不等于EF，那么其中一个较大。

如果可能，设BC较大，且设BH等于EF；连接AH。

于是，由于BH等于EF，且AB等于DE，所以

两边AB、BH分别等于两边DE、EF，

而它们所夹的角相等；

因此，底AH等于底DF，

三角形ABH等于三角形DEF，

其余的角等于其余的角，即等边所对的角相等；

[I. 4]

因此，角BHA等于角EFD。

但角EFD等于角BCA；

因此，在三角形AHC中，外角BHA等于内对角BCA：这是不可能的。

[I. 16]

因此，BC并非不等于EF，

因此等于它。

但AB也等于DE；

因此，两边AB、BC分别等于两边DE、EF，且它们所夹的角相等；

因此，底AC等于底DF，

三角形ABC等于三角形DEF，

且其余的角BAC等于其余的角EDF。

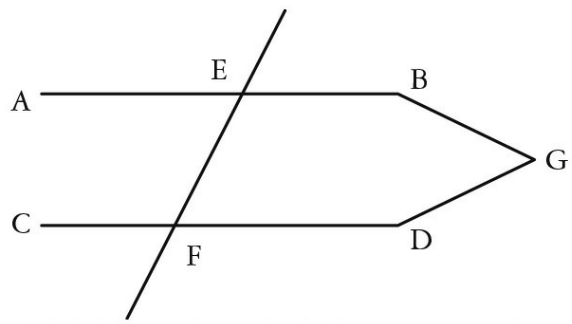
[I. 4]

这就是所要证明的。

命题**27**

若一直线与两条直线相交所成的错角彼此相等，则这两条直线彼此平行。

If a straight line falling on two straight lines make the alternate angles equal to one another, the straight lines will be parallel to one another.



设直线EF与两条直线AB、CD相交所成的错角AEF、EFD彼此相等;

我说，AB平行于CD。

因为否则的话，延长AB、CD时，它们要么在B、D方向，要么在A、C方向相交。设它们在B、D方向相交于G。

于是，在三角形GEF中，

外角AEF等于内对角EFG:

这是不可能的。

[I. 16]

因此，AB、CD延长后不会在B、D方向相交。

类似地，可以证明，它们也不会在A、C方向相交。

但不在任何一方相交的两条直线是平行的;

[定义23]

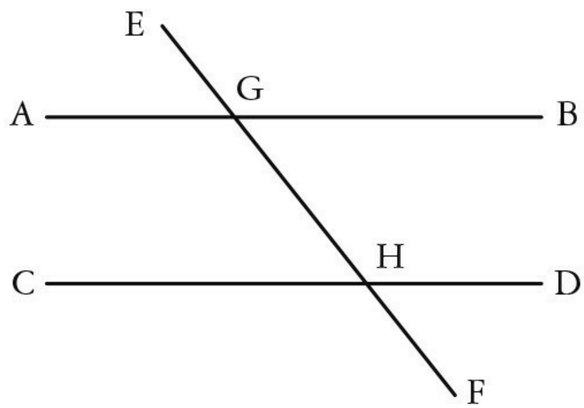
因此，AB平行于CD。

这就是所要证明的。

命题**28**

若一直线与两直线相交所成的外角等于同位内对角，或者同旁内角之和等于两直角，则这两条直线彼此平行。

If a straight line falling on two straight lines make the exterior angle equal to the interior and opposite angle on the same side, or the interior angles on the same side equal to two right angles, the straight lines will be parallel to one another.



设直线EF与两条直线AB、CD相交所成的同位角EGB与GHD相等，或者同旁内角即BGH、GHD之和等于两直角；

我说，AB平行于CD。

这是因为，由于角EGB等于角GHD，而角EGB等于角AGH，

[I. 15]

因此，角AGH也等于角GHD；

而它们是错角；

因此，AB平行于CD。

[I. 27]

又，由于角BGH、GHD之和等于两直角，而角AGH、BGH之和也等于两直角，

[I. 13]

所以角AGH、BGH之和等于角BGH、GHD之和。

从它们中分别减去角BGH；

因此，其余的角AGH等于其余的角GHD；而它们是错角；

因此，AB平行于CD。

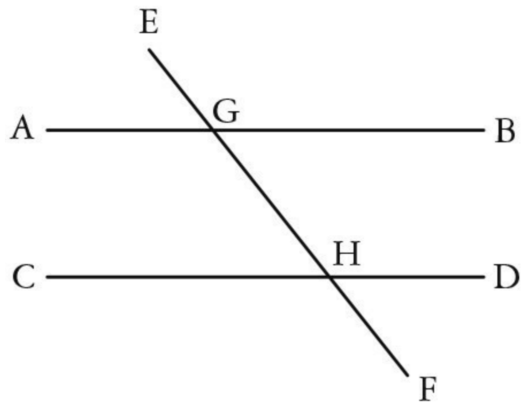
[I. 27]

这就是所要证明的。

命题**29**

一直线与平行直线相交所成的错角相等，外角等于同位内对角，且同旁内角之和等于两直角。

A straight line falling on parallel straight lines makes the alternate angles equal to one another, the exterior angle equal to the interior and opposite angle, and the interior angles on the same side equal to two right angles.



设直线EF与平行直线AB、CD相交。

我说，错角AGH、GHD相等，同位角EGB、GHD相等，且同旁内角即BGH、GHD之和等于两直角。

这是因为，如果角AGH不等于角GHD，则其中一个较大。

设角AGH较大。

给它们分别加上角BGH；

因此，角AGH、BGH之和大于角BGH、GHD之和。

但角AGH、BGH之和等于两直角；

[I. 13]

因此，角BGH、GHD之和小于两直角。

但两条直线无定限延长后在两个内角之和小于两直角的一侧相交；

[公设5]

因此，AB、CD若无定限延长会相交；

但它们并不相交，因为根据假设它们是平行的。

因此，角AGH并非不等于角GHD，因此等于它。

又，角AGH等于角EGB；

[I. 15]

因此，角EGB也等于角GHD。

[公理1]

给它们分别加上角BGH；

因此，角EGB、BGH之和等于角BGH、GHD之和。

[公理2]

但角EGB、BGH之和等于两直角；

[I. 13]

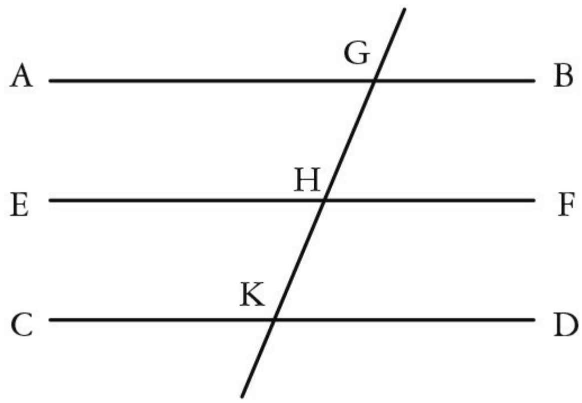
因此，角BGH、GHD之和等于两直角。

这就是所要证明的。

命题**30**

平行于同一直线的直线也彼此平行。

Straight lines parallel to the same straight line are also parallel to one another.



设直线AB、CD中的每一条都平行于EF；

我说，AB也平行于CD。

这是因为，设直线GK与它们相交。

于是，由于直线GK与平行直线AB、EF都相交，所以

角AGK等于角GHF。

[I. 29]

又，由于直线GK与平行直线EF、CD都相交，所以

角GHF等于角GKD。

[I. 29]

但已证明，角AGK也等于角GHF；

因此，角AGK也等于角GKD；

[公理1]

且它们都是错角。

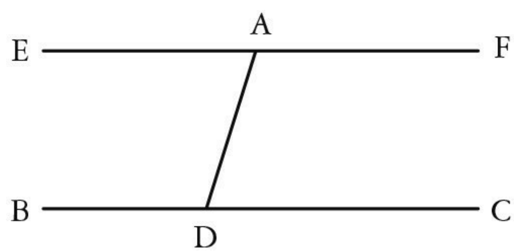
因此，AB平行于CD。

这就是所要证明的。

命题**31**

过给定点作一直线平行于给定直线。

Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.



设A是给定点，BC是给定直线；

于是，要求过点A作一直线平行于直线BC。

在BC上任意取一点D，连接AD；

在直线DA上并且在其上的点A作角DAE等于角ADC；

[I. 23]

作EA的延长线AF。

于是，由于直线AD与两条直线BC、EF交成彼此相等的错角EAD、ADC，

因此，EAF平行于BC。

[I. 27]

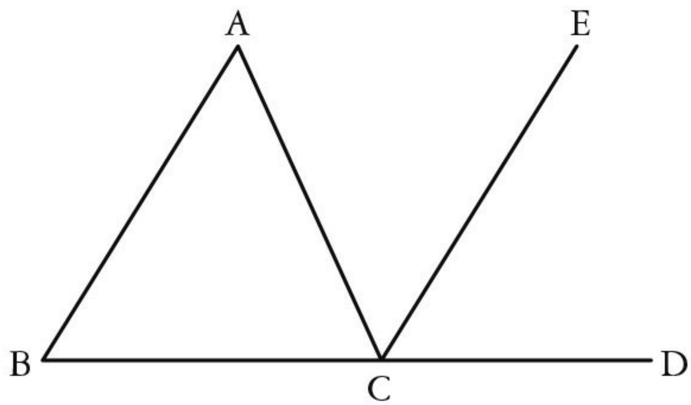
过给定点A，这样便作出了平行于给定直线BC的直线EAF。

这就是所要作的。

命题**32**

在任意三角形中，若延长一边，则外角等于两内对角之和，且三角形的三个内角之和等于两直角。

In any triangle, if one of the sides be produced, the exterior angle is equal to the two interior and opposite angles, and the three interior angles of the triangle are equal to two right angles.



设ABC是一个三角形，延长它的一边BC到D；

我说，外角ACD等于两个内对角CAB、ABC之和，且三角形的三个内角ABC、BCA、CAB之和等于两直角。

这是因为，过点C作CE平行于直线AB，

[I. 31]

于是，由于AB平行于CE，且AC与它们相交，所以

错角BAC、ACE彼此相等。

[I. 29]

又，由于AB平行于CE，且直线BD与它们相交，所以

外角ECD等于其同位角ABC。

[I. 29]

但已证明，角ACE也等于角BAC；

因此，整个角ACD等于两内对角BAC、ABC之和。

给它们分别加上角ACB；

因此，角ACD、ACB之和等于三个角ABC、BCA、CAB之和。

但角ACD、ACB之和等于两直角；

[I. 13]

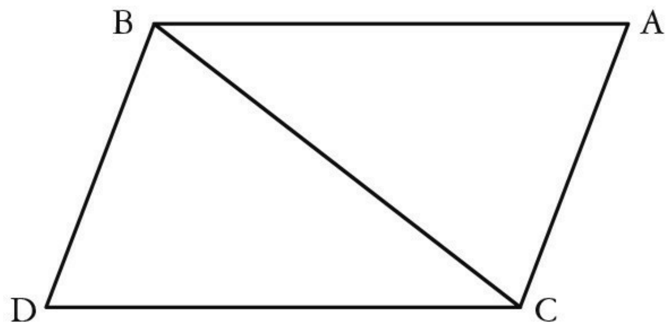
因此，角ABC、BCA、CAB之和也等于两直角。

这就是所要证明的。

命题**33**

[在端点处**]**沿相同方向**[**分别**]**连接相等且平行的直线，连成的直线自身也相等且平行。

The straight lines joining equal and parallel straight lines [at the extremities which are] in the same directions [respectively] are themselves also equal and parallel.



设AB、CD相等且平行，AC、BD是[在端点处]沿相同方向[分别]连接它们的直线；

我说，AC、BD相等且平行。

连接BC。

于是，由于AB平行于CD，且BC与它们相交，所以

错角ABC、BCD彼此相等。

[I. 29]

又，由于AB等于CD，且BC公用，所以

两边AB、BC分别等于两边DC、CB；

而角ABC等于角BCD；

因此，底AC等于底BD，

三角形ABC等于三角形DCB，

其余的角也分别等于其余的角，即这些相等的边所对的角也相等。

[I. 4]

因此，角ACB等于角CBD。

又，由于直线BC与两直线AC、BD交成的错角彼此相等，所以AC平行于BD。

[I. 27]

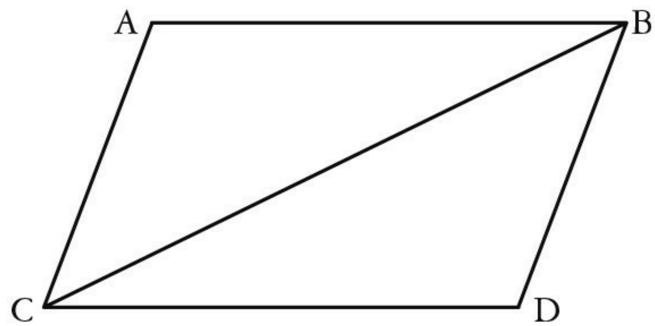
且已证明它们也相等。

这就是所要证明的。

命题**34**

在平行四边形面中，对边相等、对角相等且对角线二等分其面。

In parallelogrammic areas the opposite sides and angles are equal to one another, and the diameter bisects the areas.



设ACDB是一个平行四边形面，BC是其对角线；

我说，这个平行四边形面ACDB的对边相等、对角相等且对角线BC将它二等分。

这是因为，由于AB平行于CD，且直线BC与它们相交，所以

错角ABC、BCD彼此相等。

[I. 29]

又，由于AC平行于BD，且BC与它们相交，所以

错角ACB、CBD彼此相等。

[I. 29]

因此，在ABC、DCB这两个三角形中，两个角ABC、BCA分别等于两个角DCB、CBD，且一条边等于对应的一条边，即等角所夹的二者公共的边BC。

因此，它们其余的边分别等于其余的边，其余的角也等于其余的

角；

[I. 26]

因此，边AB等于CD，

AC等于BD，

以及角BAC等于角CDB。

又，由于角ABC等于角BCD，

且角CBD等于角ACB，所以

整个角ABD等于整个角ACD。

[公理2]

也已经证明，角BAC等于角CDB。

因此，在平行四边形面中，对边相等，对角相等。

其次我说，对角线也二等分其面。

这是因为，由于AB等于CD，且BC公用，所以

两边AB、BC分别等于两边DC、CB；

而角ABC等于角BCD；

因此，底AC等于底DB，

且三角形ABC等于三角形DCB。

[I. 4]

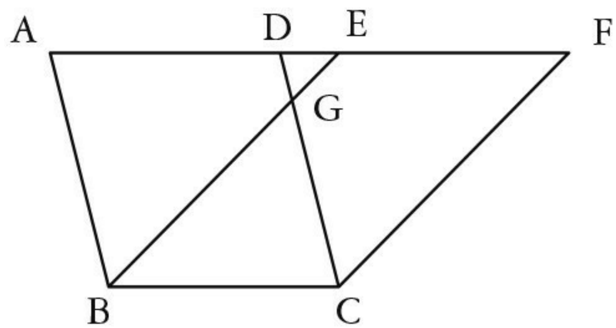
因此，对角线BC二等分平行四边形ACDB。

这就是所要证明的。

命题**35**

同底且在相同的平行线之间的平行四边形彼此相等。[1]

Parallelograms which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.



设ABCD、EBCF是同底BC且在相同的平行线AF、BC之间的平行四边形。

我说，平行四边形ABCD等于平行四边形EBCF。

这是因为，由于ABCD是平行四边形，所以

AD等于BC。

[I. 34]

同理，也有

EF等于BC，

因此，AD也等于EF；

[公理1]

又，DE公用；

因此，整个AE等于整个DF。

[公理2]

但AB也等于DC；

[I. 34]

因此，两边EA、AB分别等于两边FD、DC，且角FDC等于角EAB，即同位角相等；

[I. 29]

因此，底EB等于底FC，

三角形EAB等于三角形FDC。

[I. 4]

从它们中分别减去三角形DGE；

因此，剩余的不规则四边形ABGD等于剩余的不规则四边形EGCF。

[公理3]

给它们分别加上三角形GBC；

因此，平行四边形ABCD等于平行四边形EBCF。

[公理2]

这就是所要证明的。

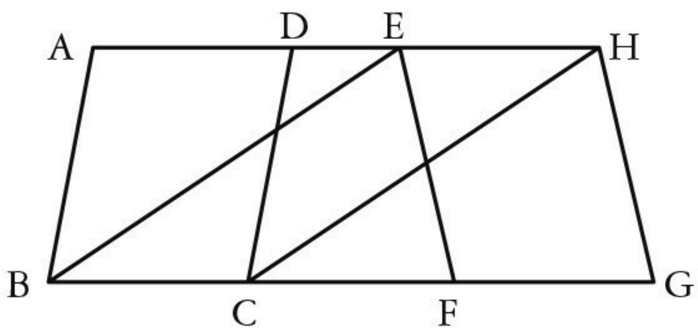
---

[1]按照现有的理解，两个平行四边形相等是指两个平行四边形全等，而按照古希腊人的说法，面积相等亦用相等（equal）表述，因此本书未按照现有理解将“相等”译成“面积相等”。

命题**36**

等底且在相同的平行线之间的平行四边形彼此相等。

Parallelograms which are on equal bases and in the same parallels are equal to one another.



设ABCD、EFGH是等底BC、FG且在相同的平行线AH、BG之间的平行四边形。

我说，平行四边形ABCD等于EFGH。

这是因为，BC等于FG，而FG等于EH，所以

BC也等于EH。

[公理1]

且它们也平行。

连接EB、HC；

但[在端点处]沿相同方向[分别]连接相等且平行的直线，连成的直线自身也相等且平行。

[I. 33]

因此，EBCH是一个平行四边形。

[I. 34]

且它等于平行四边形ABCD；

因为它们有相同的底BC，且在相同的平行线BC、AH之间。

[I. 35]

同理，EFGH也等于平行四边形EBCH；

[I. 35]

因此，平行四边形ABCD也等于EFGH。

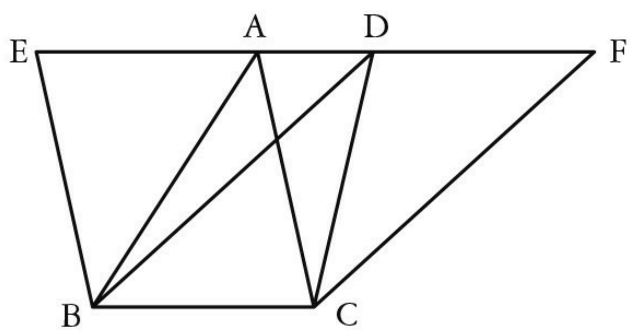
[公理1]

这就是所要证明的。

命题**37**

同底且在相同的平行线之间的三角形彼此相等。

Triangles which are on the same base and in the same parallels are equal to one another.



设三角形ABC、DBC同底且在相同的平行线AD、BC之间；

我说，三角形ABC等于三角形DBC。

沿两个方向延长AD到E、F；

过B作BE平行于CA，

[I. 31]

过C作CF平行于BD。

[I. 31]

于是，图形EBCA、DBCF中的每一个都是平行四边形；

且它们相等，因为它们同底BC且在平行线BC、EF之间。

[I. 35]

此外，三角形ABC是平行四边形EBCA的一半；因为对角线AB将它二等分。

[I. 34]

又，三角形DBC是平行四边形DBCF的一半；因为对角线DC将它二等分。

[I. 34]

<因等量的一半也彼此相等。>

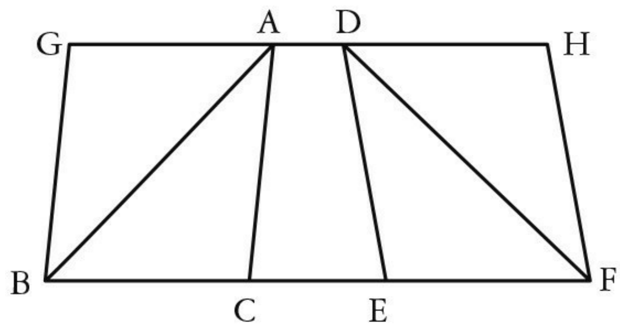
因此，三角形ABC等于三角形DBC。

这就是所要证明的。

命题**38**

等底且在相同的平行线之间的三角形彼此相等。

Triangles which are on equal bases and in the same parallels are equal to one another.



设三角形ABC、DEF等底BC、EF且在相同的平行线BF、AD之间；

我说，三角形ABC等于三角形DEF。

这是因为，沿两个方向延长AD到G、H；过B作BG平行于CA，

[I. 31]

过F作FH平行于DE。

于是，图形GBCA、DEFH中的每一个都是平行四边形；

且GBCA等于DEFH；

这是因为，它们等底BC、EF且在相同的平行线BF、GH之间。

[I. 36]

此外，三角形ABC是平行四边形GBCA的一半；

因为对角线AB将它二等分。

[I. 34]

又，三角形FED是平行四边形DEFH的一半；

因为对角线DF将它二等分。

[I. 34]

<因等量的一半也彼此相等。>

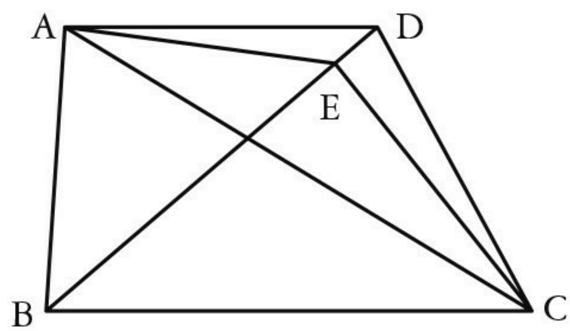
因此，三角形ABC等于三角形DEF。

这就是所要证明的。

命题**39**

同底且在同侧的相等三角形也在相同的平行线之间。

Equal triangles which are on the same base and on the same side are also in the same parallels.



设ABC、DBC是同底BC且在其同侧的相等三角形。

<我说，它们也在相同的平行线之间。>

又，<因为>连接AD；

我说，AD平行于BC。

因为否则的话，过点A作AE平行于直线BC，

[I. 31]

连接EC。

因此，三角形ABC等于三角形EBC；

因为它们同底BC且在相同的平行线之间。

[I. 37]

但三角形ABC等于三角形DBC；

因此，三角形DBC也等于三角形EBC，

[公理1]

大的等于小的：这是不可能的。

因此，AE不平行于BC。

类似地，可以证明，除AD外，其他任何直线都不平行于BC；

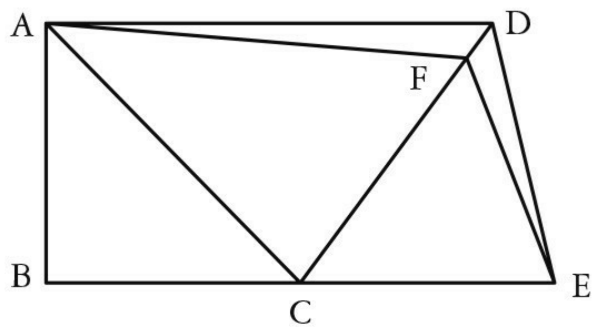
因此，AD平行于BC。

这就是所要证明的。

<命题**40**[1]

等底且在同侧的相等三角形也在相同的平行线之间。

Equal triangles which are on equal bases and on the same side are also in the same parallels.



设ABC、CDE是等底BC、CE且在底的同侧的相等三角形。

我说，这两个三角形在相同的平行线之间。

这是因为，连接AD;

我说，AD平行于BE。

因为若非如此，过A作AF平行于BE，

[I. 31]

连接FE。

因此，三角形ABC等于三角形FCE;

这是因为，它们等底BC、CE且在相同的平行线BE、AF之间。

[I. 38]

但三角形ABC等于三角形DCE;

因此，三角形DCE也等于三角形FCE，

[公理1]

大的等于小的：这是不可能的。

因此，AF不平行于BE。

类似地，可以证明，除AD外，其他任何直线都不平行于BE。

因此，AD平行于BE。

这就是所要证明的。>

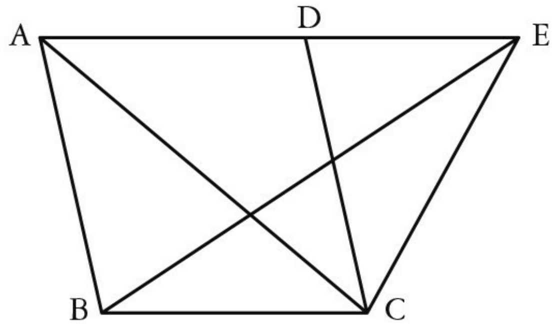
---

[1]整个命题I. 40都用< >括起来了，因为根据希思的说法，“海贝格（Heiberg）已经证明，……这个命题”乃是某位编者所作的“插补”（interpolation）。（译者注）

命题**41**

若一个平行四边形和一个三角形同底且在相同的平行线之间，则这个平行四边形是这个三角形的二倍。

If a parallelogram have the same base with a triangle and be in the same parallels, the parallelogram is double of the triangle.



设平行四边形ABCD和三角形EBC同底BC且在相同的平行线BC、AE之间；

我说，平行四边形ABCD是三角形BEC的二倍。

这是因为，连接AC，

于是，三角形ABC等于三角形EBC；

这是因为，二者同底BC且在相同的平行线BC、AE之间。

[I. 37]

但平行四边形ABCD是三角形ABC的二倍；

这是因为，对角线AC将ABCD二等分。

[I. 34]

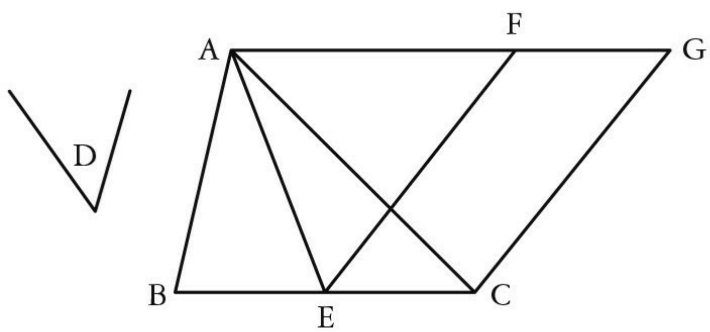
因此，平行四边形ABCD也是三角形EBC的二倍。

这就是所要证明的。

命题**42**

以给定的直线角作一个平行四边形等于给定的三角形。

To construct, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given triangle.



设ABC是给定的三角形，D是给定的直线角；

于是，要以直线角D作一个平行四边形等于三角形ABC。

设BC被二等分于E，连接AE；

在直线EC上且在其上的点E作角CEF等于角D；

[I. 23]

过A作AG平行于EC，

并且过C作CG平行于EF。

[I. 31]

于是，FECG是平行四边形。

又，由于BE等于EC，所以

三角形ABE也等于三角形AEC，

这是因为，它们的底BE、EC相等且在相同的平行线BC、AG之

间；

[I. 38]

因此，三角形ABC是三角形AEC的二倍。

但平行四边形FECG也是三角形AEC的二倍，因为二者同底且在相同的平行线之间；

因此，平行四边形FECG等于三角形ABC。

且它的角CEF等于给定的角D。

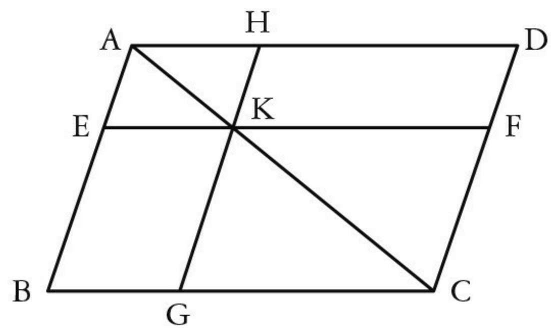
这样便作出了平行四边形FECG等于给定的三角形ABC，且角CEF等于角D。

这就是所要作的。

命题**43**

在任意平行四边形中，跨在对角线两边的平行四边形的补形彼此相等。

In any parallelogram the complements of the parallelograms about the diameter are equal to one another.



设ABCD是平行四边形，AC是它的对角线；

EH、FG是跨在AC两边的平行四边形，BK、KD为所谓的补形；

我说，补形BK等于补形KD。

这是因为，由于ABCD是平行四边形，且AC是它的对角线，所以

三角形ABC等于三角形ACD。

[I. 34]

又，由于EH是平行四边形，且AK是它的对角线，所以

三角形AEK等于三角形AHK。

同理，

三角形KFC也等于三角形KGC。

现在，由于三角形AEK等于三角形AHK，

且KFC等于KGC，所以

三角形AEK与KGC之和等于三角形AHK与KFC之和。

[公理2]

而整个三角形ABC也等于整个三角形ADC；

因此，余下的补形BK等于余下的补形KD。

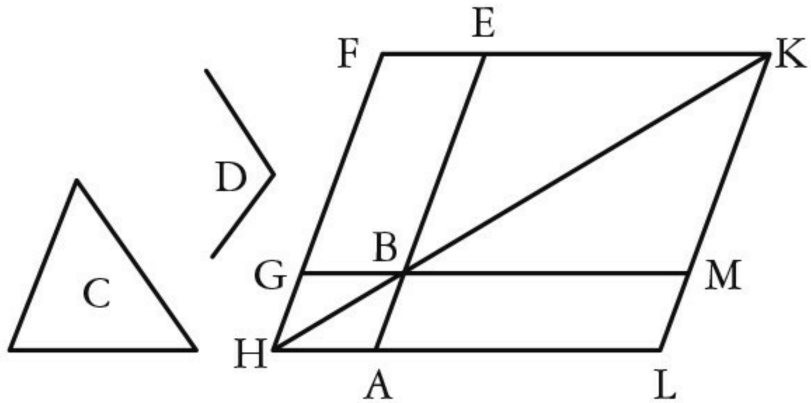
[公理3]

这就是所要证明的。

命题**44**

以给定的直线角，对一给定的直线贴合出一个平行四边形，使它等于给定的三角形。

To a given straight line to apply, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given triangle.



设AB是给定的直线，C是给定的三角形，D是给定的直线角；

于是，要求以一个等于角D的角，对给定的直线AB贴合出一个平行四边形，使它等于给定的三角形C。

以等于角D的角EBG，作平行四边形BEFG等于三角形C；

[I. 42]

使BE与AB成一直线；

延长FG到H，

并且过A作AH平行于BG或EF。

[I. 31]

连接HB。

于是，由于直线HF与平行线AH、EF相交；所以

角AHF、HFE之和等于两直角。

[I. 29]

因此，角BHG、GFE之和小于两直角；

但两条直线无定限延长后在两个内角之和小于两直角的一侧相交；

[公设5]

因此，HB、FE延长后会相交。

设它们延长后交于K；

过点K作KL平行于EA或FH，

[I. 31]

并把HA、GB延长到点L、M。

于是，HLKF是平行四边形，

HK是它的对角线，

AG、ME是平行四边形，

LB、BF是跨在HK两边的补形；

因此，LB等于BF。

[I. 43]

但BF等于三角形C；

因此，LB也等于三角形C。

[公理1]

又，由于角GBE等于角ABM，

[I. 15]

而角GBE等于角D，所以

角ABM也等于角D。

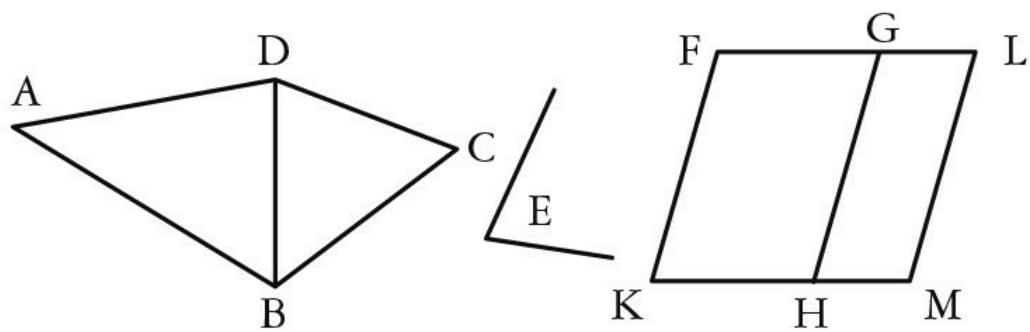
这样便以等于角D的角ABM，对给定的直线AB贴合出了平行四边形LB，它等于给定的三角形C。

这就是所要作的。

命题**45**

以给定的直线角作一个平行四边形，使它等于给定的直线形。

To construct, in a given rectilineal angle, a parallelogram equal to a given rectilineal figure.



设ABCD是给定的直线形，E是给定的直线角；

于是，要求以给定的直线角E作一个平行四边形，使它等于直线形ABCD。

连接DB，以等于角E的角HKF作平行四边形FH等于三角形ABD；

[I. 42]

又对直线GH贴合出一个平行四边形GM等于三角形DBC，其中角GHM等于角E。

[I. 44]

于是，由于角E等于角HKF、GHM中的每一个，所以

角HKF也等于角GHM。

[公理1]

给它们分别加上角KHG；

因此，角FKH、KHG之和等于角KHG、GHM之和。

但角FKH、KHG之和等于两直角；

[I. 29]

因此，角KHG、GHM之和也等于两直角。

于是，以直线GH和它上面的点H所作的不在同侧的两直线KH、HM所成邻角之和等于两直角；

因此，KH和HM在同一直线上。

[I. 14]

又，由于直线HG与平行线KM、FG相交，所以

错角MHG、HGF彼此相等。

[I. 29]

给它们分别加上角HGL；

因此，角MHG、HGL之和等于角HGF、HGL之和。

[公理2]

但角MHG、HGL之和等于两直角；

因此，角HGF、HGL之和也等于两直角。

[公理1]

因此，FG和GL在同一直线上。

[I. 14]

又，由于FK等于且平行于HG，

[I. 34]

HG也等于且平行于ML，所以

KF也等于且平行于ML；

[公理1；I. 30]

连接直线KM、FL；

因此，KM、FL相等且平行。

[I. 33]

因此，KFLM是平行四边形。

又，由于三角形ABD等于平行四边形FH，三角形DBC等于平行四边形GM，所以整个直线形ABCD等于整个平行四边形KFLM。

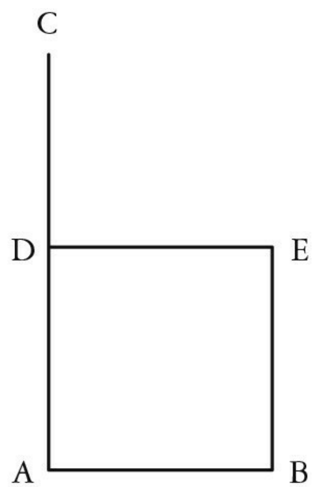
这样便以等于给定的直线角E的角FKM作出了一个平行四边形KFLM，它等于给定的直线形ABCD。

这就是所要作的。

命题**46**

在给定的直线上作一个正方形。

On a given straight line to describe a square.



设AB是给定的直线；

于是，要求在直线AB上作一个正方形。

从直线AB上的点A作直线AC与AB成直角；

[I. 11]

取AD等于AB；

过点D作DE平行于AB，

过点B作BE平行于AD。

[I. 31]

因此，ADEB是平行四边形；

因此，AB等于DE，AD等于BE。

[I. 34]

因AB等于AD；

因此，四条直线BA、AD、DE、EB彼此相等；

因此，平行四边形ADEB是等边的。

其次我说，它也是成直角的。

这是因为，由于直线AD与平行线AB、DE相交，所以

角BAD、ADE之和等于两直角。

[I. 29]

但角BAD是直角；

因此，角ADE也是直角。

而在平行四边形面中，对边相等、对角相等；

[I. 34]

因此，对角ABE、BED中的每一个也都是直角。

因此，ADEB四个角均为直角。

而已经证明它也是等边的。

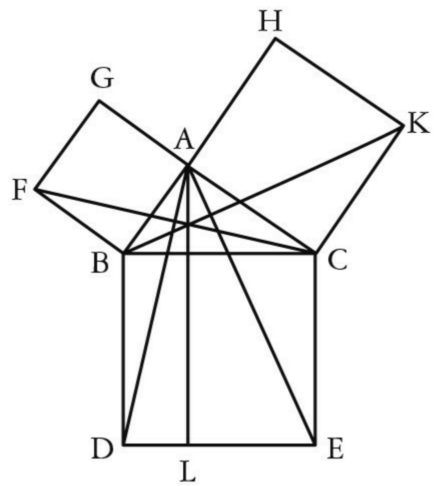
因此，它是在直线AB上所作的一个正方形。

这就是所要作的。

命题**47**

在直角三角形中，直角所对边上的正方形等于两直角边上的正方形之和。

In right-angled triangles the square on the side subtending the right angle is equal to the squares on the sides containing the right angle.



设ABC是直角三角形，角BAC是直角。

我说，BC上的正方形等于BA、AC上的正方形之和。

这是因为，在BC上作正方形BDEC，在BA、AC上作正方形GB、HC；

[I. 46]

过A作AL平行于BD或CE，

连接AD、FC。

于是，由于角BAC、BAG中的每一个都是直角，

所以过直线BA上点A的两条直线AC、AG不在直线BA的同侧，且和直线BA所成邻角之和等于两直角，

因此，CA和AG在同一直线上。

[I. 14]

同理，BA和AH也在同一直线上。

又，由于角DBC等于角FBA：因为每一个角都是直角：

给它们分别加上角ABC；

因此，整个角DBA等于整个角FBC。

[公理2]

又，由于DB等于BC，FB等于BA，所以

两边AB、BD分别等于两边FB、BC；

而角ABD等于角FBC；

因此，底AD等于底FC，

三角形ABD等于三角形FBC。

[I. 4]

现在，平行四边形BL是三角形ABD的二倍，因为它们有同底BD且在相同的平行线BD、AL之间。

[I. 41]

又，正方形GB是三角形FBC的二倍，因为它们也同底FB且在相同的平行线FB、GC之间。

[I. 41]

<但等量的二倍也彼此相等。>

因此，平行四边形BL也等于正方形GB。

类似地，若连接AE、BK，则也可以证明平行四边形CL等于正方形

HC；

因此，整个正方形BDEC等于两个正方形GB、HC之和。

[公理2]

而正方形BDEC是在BC上作出的，正方形GB、HC是在BA、AC上作出的。

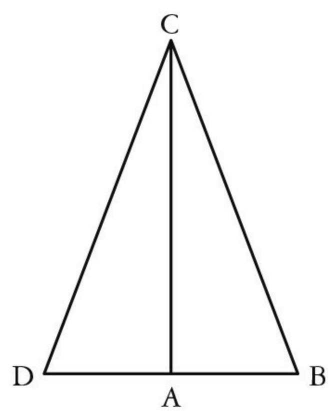
因此，边BC上的正方形等于边BA、AC上的正方形之和。

这就是所要证明的。

命题**48**

在一个三角形中，若一边上的正方形等于三角形其余两边上的正方形之和，则其余两边所夹的角为直角。

If in a triangle the square on one of the sides be equal to the squares on the remaining two sides of the triangle, the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right.



在三角形ABC中，设边BC上的正方形等于边BA、AC上的正方形之和；

我说，角BAC是直角。

这是因为，从点A作AD与直线AC成直角，

取AD等于BA，

连接DC。

由于DA等于AB，所以

DA上的正方形也等于AB上的正方形。

给它们分别加上AC上的正方形；

因此，DA、AC上的正方形之和等于BA、AC上的正方形之和。

但DC上的正方形等于DA、AC上的正方形之和，因为角DAC是直角；

[I. 47]

而BC上的正方形等于BA、AC上的正方形之和，因为这是假设；

因此，DC上的正方形等于BC上的正方形，

因此，边DC也等于边BC。

又，由于DA等于AB，AC公用，所以

两边DA、AC等于两边BA、AC；

而底DC等于底BC；

因此，角DAC等于角BAC。

[I. 8]

但角DAC是直角；

因此，角BAC也是直角。

这就是所要证明的。

第二卷

定义 **Definitions**

01 / 任一矩形由夹直角的两直线所围成。

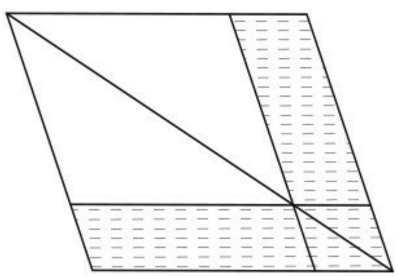
Any rectangular parallelogram is said to be *contained* by the two straight lines containing the right angle.

02 / 在任一平行四边形面中，跨在其对角线两边的平行四边形和两个补形一起叫作拐尺形。[1]

And in any parallelogrammic area let any one whatever of the parallelograms about its diameter with the two complements be called a *gnomon*.

---

[1]拐尺形即下图中用虚线表示的部分。（译者注）

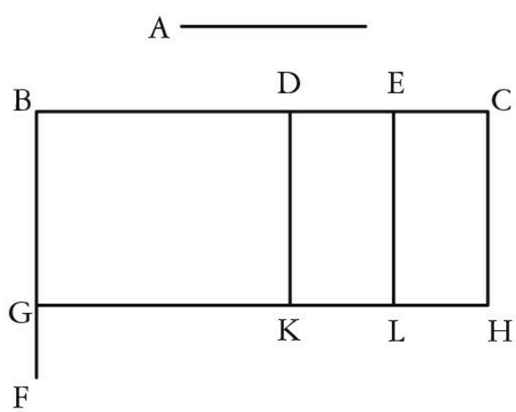


命题 Proposition

命题**01**

若有两条直线，其中一条被截成任意几段，则这两条直线所围成的矩形等于未截直线与每一线段所围成的矩形之和。

If there be two straight lines, and one of them be cut into any number of segments whatever, the rectangle contained by the two straight lines is equal to the rectangles contained by the uncut straight line and each of the segments.



设A、BC是两条直线，且BC被任截于点D、E；

我说，A、BC所围成的矩形等于由A、BD，A、DE以及A、EC分别围成的矩形之和。

这是因为，从B作BF垂直于BC；

[I. 11]

取BG等于A，

[I. 3]

过G作GH平行于BC，

[I. 31]

且过D、E、C作DK、EL、CH平行于BG。

于是，BH等于BK、DL、EH之和。

现在，BH是矩形A、BC，因为它由GB和BC所围成，且BG等于A；

BK是矩形A、BD，因为它由GB、BD所围成，且BG等于A；

又，DL是矩形A、DE，因为DK即BG[I. 34]等于A。

类似地也有，EH是矩形A、EC。

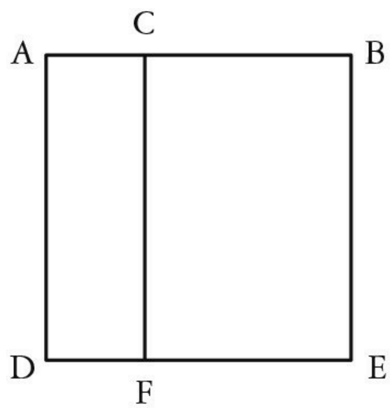
因此，矩形A、BC等于矩形A、BD与矩形A、DE以及矩形A、EC之和。

这就是所要证明的。

命题**02**

若任截一直线，则整条直线与截成的两线段分别围成的矩形之和等于在整条直线上所作的正方形。

If a straight line be cut at random, the rectangle contained by the whole and both of the segments is equal to the square on the whole.



设直线AB被任截于点C；

我说，AB、BC所围成的矩形与BA、AC所围成的矩形之和等于AB上的正方形。

这是因为，设在AB上所作的正方形为ADEB，

[I. 46]

过点C作CF平行于AD或BE。

[I. 31]

于是，AE等于AF、CE之和。

现在，AE是AB上的正方形；

AF是BA、AC所围成的矩形，因为它由DA、AC所围成，而AD等于AB。

又，CE是AB、BC所围成的矩形，因为BE等于AB。

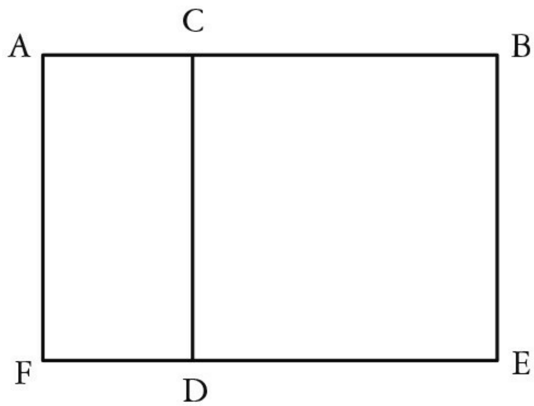
因此，矩形BA、AC与矩形AB、BC之和等于AB上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**03**

若任截一直线，则整条直线与截成的两线段之一所围成的矩形等于两线段所围成的矩形与前面提到的线段上的正方形之和。

If a straight line be cut at random, the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the rectangle contained by the segments and the square on the aforesaid segment.



设直线AB被任截于点C；

我说，AB、BC所围成的矩形等于AC、CB所围成的矩形与BC上的正方形之和。

这是因为，在CB上作正方形CDEB；

[I. 46]

延长ED到F，过A作AF平行于CD或BE。

[I. 31]

于是，AE等于AD、CE之和。

现在，AE是AB、BC所围成的矩形，这是因为它由AB、BE所围成，而BE等于BC；

AD是矩形AC、CB，这是因为DC等于CB；

而DB是CB上的正方形。

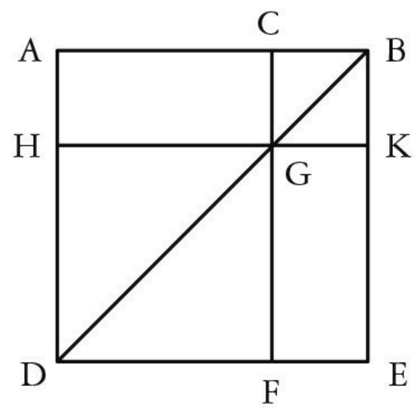
因此，AB、BC所围成的矩形等于AC、CB所围成的矩形与BC上的正方形之和。

这就是所要证明的。

命题**04**

若任截一直线，则整条直线上的正方形等于各线段上的正方形与两线段所围成矩形的二倍之和。

If a straight line be cut at random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments.



设直线AB被任截于点C；

我说，AB上的正方形等于AC、CB上的正方形与AC、CB所围成矩形的二倍之和。

这是因为，在AB上作正方形ADEB，

[I. 46]

连接BD；

过C作CF平行于AD或EB，

过G作HK平行于AB或DE。

[I. 31]

于是，由于CF平行于AD，且BD与它们相交，所以

同位角CGB等于ADB。

[I. 29]

但角ADB等于角ABD，这是因为BA也等于AD；

[I. 5]

因此，角CGB也等于角GBC。

因此，边BC也等于边CG。

[I. 6]

但CB等于GK，且CG等于KB；

[I. 34]

因此，GK也等于KB；

因此，CGKB是等边的。

其次我说，它也是直角的。

这是因为，由于CG平行于BK，所以

角KBC、GCB之和等于二直角。

[I. 29]

但角KBC是直角；

因此，角BCG也是直角，

因此，对角CGK、GKB也是直角。

[I. 34]

因此，CGKB是直角的；

而已经证明，它也是等边的；

因此，它是一个正方形；

而且是在CB上作的。

同理，

HF也是正方形；

它是在HG上作的，也就是在AC上作的。

[I. 34]

因此，正方形HF、KC是在AC、CB上作的正方形。

现在，由于AG等于GE，

且AG是矩形AC、CB，这是因为GC等于CB，

因此，GE也等于矩形AC、CB。

因此，AG、GE之和等于矩形AC、CB的二倍。

但正方形HF、CK之和也是AC、CB上的正方形之和；

因此，四个面HF、CK、AG、GE之和等于AC、CB上的正方形与AC、CB所围成矩形的二倍之和。

但HF、CK、AG、GE之和是整个ADEB，

即AB上的正方形。

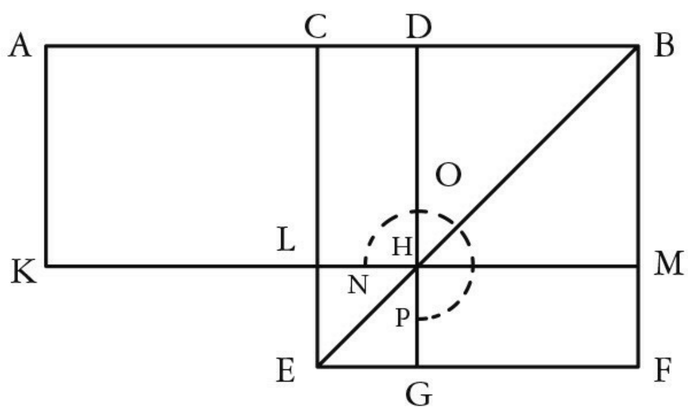
因此，AB上的正方形等于AC、CB上的正方形与AC、CB围成矩形的二倍之和。

这就是所要证明的。

命题**05**

若一直线既被截成相等的线段又被截成不相等的线段，则不相等线段所围成的矩形与两截点之间直线上的正方形之和等于一半直线上的正方形。

If a straight line be cut into equal and unequal segments, the rectangle contained by the unequal segments of the whole together with the square on the straight line between the points of section is equal to the square on the half.



设直线AB在点C被截成相等的线段，在点D被截成不相等的线段。

我说，AD、DB所围成的矩形与CD上的正方形之和等于CB上的正方形。

这是因为，在CB上作正方形CEFB，

[I. 46]

连接BE；

过D作DG平行于CE或BF，

再过H作KM平行于AB或EF，

又过A作AK平行于CL或BM。

[I. 31]

于是，由于补形CH等于补形HF，

[I. 43]

给它们分别加上DM；

因此，整个CM等于整个DF。

但CM等于AL，

这是因为AC也等于CB；

[I. 36]

因此，AL也等于DF。

给它们分别加上CH；

因此，整个AH等于拐尺形NOP。

但AH是矩形AD、DB，这是因为DH等于DB，

因此，拐尺形NOP也等于矩形AD、DB。

给它们分别加上LG，后者等于CD上的正方形；

因此，拐尺形NOP与LG之和等于AD、DB所围成的矩形与CD上的正方形之和。

但拐尺形NOP与LG之和是CB上所作的整个正方形CEFB；

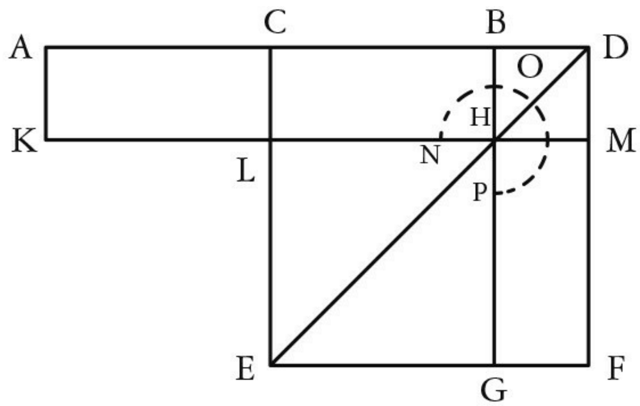
因此，AD、DB所围成的矩形与CD上的正方形之和等于CB上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**06**

若将一条直线二等分且沿同一直线给它加一条直线，则整条直线与加上的直线所围成的矩形以及原直线一半上的正方形之和等于原直线一半与加上的直线合成的直线上的正方形。

If a straight line be bisected and a straight line be added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the square on the straight line made up of the half and the added straight line.



设直线AB被二等分于点C，

且沿同一直线给它加上直线BD；

我说，AD、DB所围成的矩形与CB上的正方形之和等于CD上的正方形。

这是因为，在CD上作正方形CEFD，

[I. 46]

连接DE；

过点B作BG平行于EC或DF，

过点H作KM平行于AB或EF，

再过点A作AK平行于CL或DM。

[I. 31]

于是，由于AC等于CB，所以

AL也等于CH。

[I. 36]

而CH等于HF。

[I. 43]

因此，AL也等于HF。

给它们分别加上CM；

因此，整个AM等于拐尺形NOP。

但AM是AD、DB所围成的矩形，这是因为DM等于DB；

因此，拐尺形NOP也等于矩形AD、DB。

给它们分别加上LG，后者等于BC上的正方形；

因此，AD、DB所围成的矩形与CB上的正方形之和等于拐尺形NOP与LG之和。

但拐尺形NOP与LG之和是在CD上作的整个正方形CEFD；

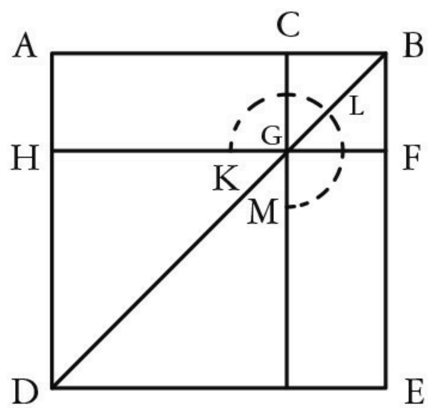
因此，AD、DB所围成的矩形与CB上的正方形之和等于CD上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**07**

若任截一直线，则整条直线上的正方形与所截线段之一上的正方形之和等于整条直线与该线段所围成矩形的二倍与另一线段上的正方形之和。

If a straight line be cut at random, the square on the whole and that on one of the segments both together are equal to twice the rectangle contained by the whole and the said segment and the square on the remaining segment.



设直线AB被任截于点C；

我说，AB、BC上的正方形之和等于AB、BC所围成矩形的二倍与CA上的正方形之和。

这是因为，在AB上作正方形ADEB，

[I. 46]

并把图作出。

于是，由于AG等于GE，

[I. 43]

给它们分别加上CF；

因此，整个AF等于整个CE。

因此，AF、CE之和是AF的二倍。

但AF、CE之和是拐尺形KLM与正方形CF之和；

因此，拐尺形KLM与正方形CF之和是AF的二倍。

但矩形AB、BC的二倍也是AF的二倍；

这是因为BF等于BC；

因此，拐尺形KLM与正方形CF之和等于矩形AB、BC的二倍。

给它们分别加上DG，后者是AC上的正方形；

因此，拐尺形KLM与正方形BG、GD之和等于AB、BC所围成矩形的二倍与AC上的正方形之和。

但拐尺形KLM与正方形BG、GD之和是整个ADEB与CF之和，它们是在AB、BC上作出的正方形；

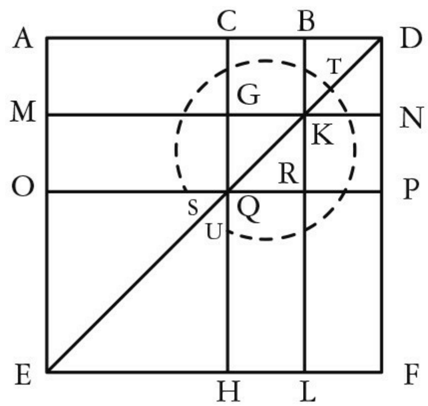
因此，AB、BC上的正方形之和等于AB、BC所围成矩形的二倍与AC上的正方形之和。

这就是所要证明的。

命题**08**

若任截一直线，则整条直线与所截线段之一所围成矩形的四倍与另一线段上的正方形之和等于整条直线与前一线段合成的直线上的正方形。

If a straight line be cut at random, four times the rectangle contained by the whole and one of the segments together with the square on the remaining segment is equal to the square described on the whole and the aforesaid segment as on one straight line.



设直线AB被任截于点C；

我说，AB、BC所围成矩形的四倍与AC上的正方形之和等于AB与BC合成直线上的正方形。

这是因为，延长直线AB成[直线]BD，使BD等于CB；

在AD上作正方形AEFD，且作两个这样的图。

于是，由于CB等于BD，而CB等于GK，且BD等于KN，

因此，GK也等于KN。

同理，

QR也等于RP。

又，由于BC等于BD，GK等于KN，

因此，CK等于KD，GR等于RN。

[I. 36]

但CK等于RN，因为它们是平行四边形CP的补形；

[I. 43]

因此，KD也等于GR；

因此，四个面DK、CK、GR、RN彼此相等。

因此，这四个面之和是CK的四倍。

又，由于CB等于BD，

而BD等于BK，即CG，

且CB等于GK，即GQ，

因此，CG也等于GQ。

又，由于CG等于GQ，且QR等于RP，

因此，AG等于MQ，且QL等于RF。

[I. 36]

但MQ等于QL，这是因为它们是平行四边形ML的补形；

[I. 43]

因此，AG也等于RF；

因此，四个面AG、MQ、QL、RF彼此相等。

因此，这四个之和是AG的四倍。

但已证明，四个面CK、KD、GR、RN之和是CK的四倍；

因此，构成拐尺形STU的八个面是AK的四倍。

现在，由于AK是矩形AB、BD，这是因为BK等于BD，

因此，矩形AB、BD的四倍是AK的四倍。

但已证明，拐尺形STU是AK的四倍；

因此，矩形AB、BD的四倍等于拐尺形STU。

给它们分别加上OH，后者等于AC上的正方形；

因此，矩形AB、BD的四倍与AC上的正方形之和等于拐尺形STU与OH之和。

但拐尺形STU与OH之和等于在AD上作的整个正方形AEFD；

因此，矩形AB、BD的四倍与AC上的正方形之和等于AD上的正方形。

而BD等于BC；

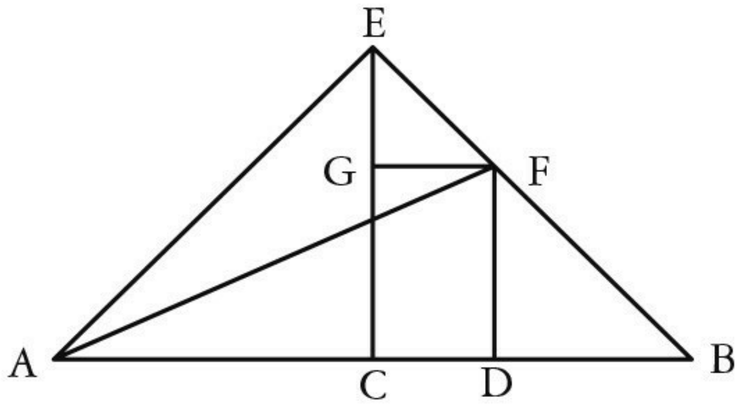
因此，矩形AB、BC的四倍与AC上的正方形之和等于AD上的正方形，即等于AB与BC合成直线上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**09**

若一直线既被截成相等的线段又被截成不相等的线段，则在不相等线段上的正方形之和等于原直线一半上的正方形与两截点之间直线上的正方形之和的二倍。

If a straight line be cut into equal and unequal segments, the squares on the unequal segments of the whole are double of the square on the half and of the square on the straight line between the points of section.



设直线AB在点C被截成相等的线段，在点D被截成不相等的线段；

我说，AD、DB上的正方形之和等于AC、CD上的正方形之和的二倍。

这是因为，从C作CE与AB成直角，并使它等于AC或CB；

连接EA、EB，

过D作DF平行于EC，

过F作FG平行于AB，

连接AF。

于是，由于AC等于CE，所以

角EAC也等于角AEC。

又，由于C处的角是直角，所以

其余的角EAC、AEC之和等于一直角。

[I. 32]

而它们又相等；

因此，角CEA、CAE各是半个直角。

同理，

角CEB、EBC也各是半个直角；

因此，整个角AEB是直角。

又，由于角GEF是半个直角，角EGF是直角，这是因为它等于同位角ECB，[I. 29]所以

其余的角EFG是半个直角；

[I. 32]

因此，角GEF等于角EFG，

因此，边EG等于边GF。

[I. 6]

又，由于B处的角是半个直角，

角FDB是直角，这是因为它等于同位角ECB，[I. 29]所以

其余的角BFD是半个直角；

[I. 32]

因此，B处的角等于角DFB，

因此，边FD等于边DB。

[I. 6]

现在，由于AC等于CE，所以

AC上的正方形也等于CE上的正方形；

因此，AC、CE上的正方形之和是AC上的正方形的二倍。

但EA上的正方形等于AC、CE上的正方形之和，这是因为角ACE是直角；

[I. 47]

因此，EA上的正方形是AC上的正方形的二倍。

又，由于EG等于GF，所以

EG上的正方形也等于GF上的正方形；

因此，EG、GF上的正方形之和是GF上的正方形的二倍。

但EF上的正方形等于EG、GF上的正方形之和；

因此，EF上的正方形是GF上的正方形的二倍。

但GF等于CD；

[I. 34]

因此，EF上的正方形是CD上的正方形的二倍。

但EA上的正方形也是AC上的正方形的二倍；

因此，AE、EF上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二倍。

而AF上的正方形等于AE、EF上的正方形之和，这是因为角AEF是直角；

[I. 47]

因此，AF上的正方形是AC、CD上的正方形之和的二倍。

但AD、DF上的正方形之和等于AF上的正方形，这是因为D处的角是直角；

[I. 47]

因此，AD、DF上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二倍。

又，DF等于DB；

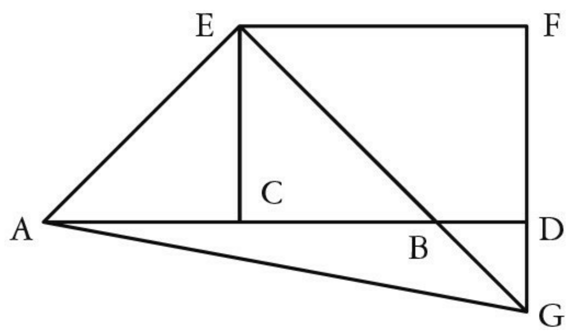
因此，AD、DB上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二倍。

这就是所要证明的。

命题**10**

若将一直线二等分，且在同一直线上给它添加一条直线，则合成直线上的正方形与添加直线上的正方形之和等于原直线一半上的正方形与一半直线和添加直线所合成直线上的正方形之和的二倍。

If a straight line be bisected, and a straight line be added to it in a straight line, the square on the whole with the added straight line and the square on the added straight line both together are double of the square on the half and of the square described on the straight line made up of the half and the added straight line as on one straight line.



设直线AB被二等分于C，并且在同一直线上给它添加直线BD；

我说，AD、DB上的正方形之和等于AC、CD上的正方形之和的二倍。

这是因为，从点C作CE与AB成直角，

[I. 11]

并使它等于AC或CB；

[I. 3]

连接EA、EB；

过E作EF平行于AD，

过D作FD平行于EC。

[I. 31]

于是，由于直线EF与平行线EC、FD都相交，所以

角CEF、EFD之和等于二直角；

[I. 29]

因此，角FEB、EFD之和小于二直角。

但两条直线无定限延长后在两个内角之和小于两直角的一侧相交；

[I. 公设5]

因此，沿B、D方向延长的EB、FD会相交。

设它们交于G，

连接AG。

于是，由于AC等于CE，所以

角EAC也等于角AEC；

[I. 5]

而C处的角是直角；

因此，角EAC、AEC中的每一个都是半个直角。

[I. 32]

同理，

角CEB、EBC中的每一个都是半个直角；

因此，角AEB是直角。

又，由于角EBC是半个直角，所以

角DBG也是半个直角。

但角BDG也是直角，

这是因为它等于角DCE，它们是错角；

[I. 29]

因此，其余的角DGB是半个直角；

[I. 32]

因此，角DGB等于角DBG，

因此，边BD也等于边GD。

[I. 6]

又，由于角EGF是半个直角，

且F处的角是直角，这是因为它等于C处的对角，[I. 34]所以其余的角FEG是半个直角；

[I. 32]

因此，角EGF等于角FEG，

因此，边GF也等于边EF。

[I. 6]

现在，由于EC上的正方形等于CA上的正方形，所以EC、CA上的正方形之和是CA上的正方形的二倍。

但EA上的正方形等于EC、CA上的正方形之和；

[I. 47]

因此，EA上的正方形是AC上的正方形的二倍。

[公理1]

又，由于FG等于EF，所以

FG上的正方形也等于FE上的正方形；

因此，GF、FE上的正方形之和是EF上的正方形的二倍。

而EG上的正方形等于GF、FE上的正方形之和，

[I. 47]

因此，EG上的正方形是EF上的正方形的二倍。

而EF等于CD；

[I. 34]

因此，EG上的正方形是CD上的正方形的二倍。

但已证明，EA上的正方形是AC上的正方形的二倍；

因此，AE、EG上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二倍。

而AG上的正方形等于AE、EG上的正方形之和；

[I. 47]

因此，AG上的正方形是AC、CD上的正方形之和的二倍。

但AD、DG上的正方形之和等于AG上的正方形；

[I. 47]

因此，AD、DG上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二倍。

而DG等于DB；

因此，AD、DB上的正方形之和是AC、CD上的正方形之和的二

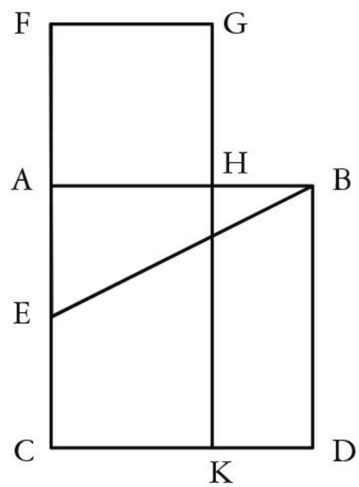
倍。

这就是所要证明的。

命题**11**

截一条给定的直线，使整条直线与截取的线段之一所围成的矩形等于其余线段上的正方形。

To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment.



设AB是给定的直线；

于是，要求截AB，使它与截取的线段之一所围成的矩形等于其余线段上的正方形。

在AB上作正方形ABDC。

[I. 46]

设AC被二等分于点E，连接BE；

延长CA到F，取EF等于BE；

设FH是在AF上作的正方形，延长GH到K。

我说，H就是AB上所要求作的截点，它使AB、BH所围成的矩形等于AH上的正方形。

这是因为，由于直线AC被二等分于点E，且给它加上FA，所以CF、FA所围成的矩形与AE上的正方形之和等于EF上的正方形。

[II. 6]

而EF等于EB；

因此，矩形CF、FA与AE上的正方形之和等于EB上的正方形。

但BA、AE上的正方形之和等于EB上的正方形，因为A处的角是直角；

[I. 47]

因此，矩形CF、FA与AE上的正方形之和等于BA、AE上的正方形之和。

从它们中各减去AE上的正方形；

因此，余下的矩形CF、FA等于AB上的正方形。

现在，矩形CF、FA等于FK，这是因为AF等于FG；

而AB上的正方形是AD；

因此，FK等于AD。

从它们中各减去AK；

因此，余下的FH等于HD。

又，HD是矩形AB、BH，这是因为AB等于BD；

而FH是AH上的正方形；

因此，AB、BH所围成的矩形等于HA上的正方形。

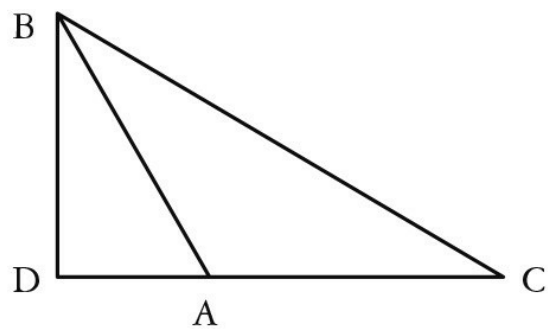
于是，H就是给定的直线AB上的截点，使AB、BH所围成的矩形等于HA上的正方形。

这就是所要作的。

命题**12**

在钝角三角形中，钝角所对边上的正方形比夹钝角的两边上的正方形之和大一个矩形的二倍，该矩形为钝角的一边向外延长并作垂线，垂足所在的钝角边与垂足到钝角顶点之间的直线所围成的矩形。

In obtuse-angled triangles the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the obtuse angle, namely that on which the perpendicular falls, and the straight line cut off outside by the perpendicular towards the obtuse angle.



设ABC是钝角三角形，角BAC为钝角，从点B作BD垂直于CA的延长线；

我说，BC上的正方形比BA、AC上的正方形之和大CA、AD所围成矩形的二倍。

这是因为，由于直线CD被任意截于点A，所以DC上的正方形等于CA、AD上的正方形加上CA、AD所围成矩形的二倍。

[II. 4]

给它们分别加上DB上的正方形；

因此，CD、DB上的正方形之和等于CA、AD、DB上的正方形之和

加上矩形CA、AD的二倍。

但CB上的正方形等于CD、DB上的正方形之和，这是因为D处的角是直角；

[I. 47]

且AB上的正方形等于AD、DB上的正方形之和；

[I. 47]

因此，CB上的正方形等于CA、AB上的正方形之和加上CA、AD所围成矩形的二倍；

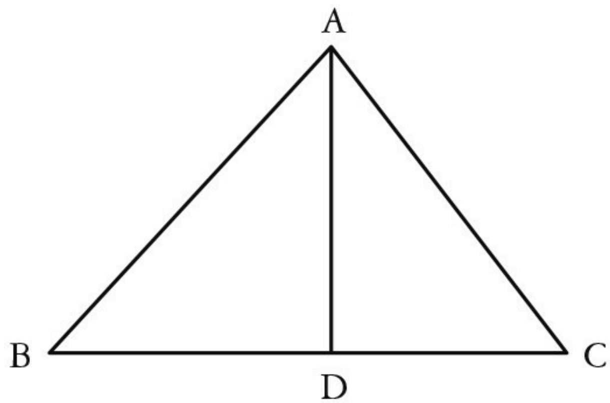
因此，CB上的正方形比CA、AB上的正方形之和大CA、AD所围成矩形的二倍。

这就是所要证明的。

命题**13**

在锐角三角形中，锐角对边上的正方形比夹锐角两边上的正方形之和小一个矩形的二倍，该矩形为另一锐角向对边作垂线，垂足所在的锐角边与垂足到原锐角顶点之间的直线所围成的矩形。

In acute-angled triangles the square on the side subtending the acute angle is less than the squares on the sides containing the acute angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the acute angle, namely that on which the perpendicular falls, and the straight line cut off within by the perpendicular towards the acute angle.



设ABC是一个锐角三角形，B处的角为锐角，从点A作AD垂直于BC；

我说，AC上的正方形比CB、BA上的正方形之和小CB、BD所围成矩形的二倍。

这是因为，由于直线CB被任截于点D，所以CB、BD上的正方形之和等于CB、BD所围成矩形的二倍与DC上的正方形之和。

[II. 7]

给它们分别加上DA上的正方形；

因此，CB、BD、DA上的正方形之和等于CB、BD所围成矩形的二倍加上AD、DC上的正方形之和。

但AB上的正方形等于BD、DA上的正方形之和，这是因为D处的角是直角；

[I. 47]

而AC上的正方形等于AD、DC上的正方形之和；

因此，CB、BA上的正方形之和等于AC上的正方形加上矩形CB、BD的二倍。

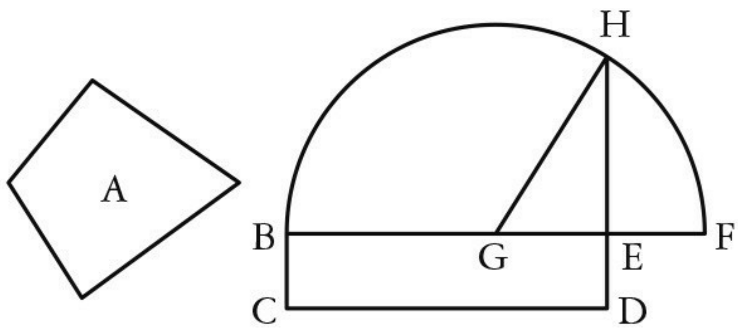
于是，AC上的正方形比CB、BA上的正方形之和小CB、BD所围成矩形的二倍。

这就是所要证明的。

命题**14**

作一个正方形等于给定的直线形。

To construct a square equal to a given rectilineal figure.



设A是给定的直线形；

于是，要求作一个正方形等于直线形A。

作矩形BD等于直线形A。

[I. 45]

于是，如果BE等于ED，则作图完毕；因为已经作了正方形BD等于直线形A。

但如果不是这样，则直线BE、ED之一较大。

设BE较大，延长它到F；

设EF等于ED，且BF被二等分于G。

以G为圆心，GB、GF中的一个为距离作半圆BHF；延长DE到H，连接GH。

于是，由于直线BF在G被截成了相等的线段，在E被截成了不相等的线段，所以

BE、EF所围成的矩形与EG上的正方形之和等于GF上的正方形。

[II. 5]

而GF等于GH；

因此，矩形BE、EF与GE上的正方形之和等于GH上的正方形。

但HE、EG上的正方形之和等于GH上的正方形；

[I. 47]

因此，矩形BE、EF与GE上的正方形之和等于HE、EG上的正方形之和。

从它们中分别减去GE上的正方形；

因此，余下的矩形BE、EF等于EH上的正方形。

但矩形BE、EF是BD，这是因为EF等于ED；

因此，平行四边形BD等于HE上的正方形。

又，BD等于直线形A。

因此，直线形A也等于可在EH上作出的正方形。

这样便在EH上作出了等于给定直线形A的正方形。

这就是所要作的。

第三卷

定义 **Definitions**

01 / 等圆就是直径或半径相等的圆。

Equal circles are those the diameters of which are equal, or the radii of which are equal.

02 / 一条直线与一圆相遇且延长后不与该圆相交，则称该直线与圆相切。

A straight line is said to *touch a circle* which, meeting the circle and being produced, does not cut the circle.

03 / 两圆相遇且不相交，则称两圆相切。

Circles are said to *touch one another* which, meeting one another, do not cut one another.

04 / 当圆心到圆内直线所作的垂线相等时，则称这些直线与圆心等距。

In a circle straight lines are said to be *equally distant from the centre* when the perpendiculars drawn to them from the centre are equal.

05 / 且当垂线较长时，则称这条直线与圆心有较大的距离。

And that straight line is said to be *at a greater distance* on which the greater perpendicular falls.

06 / 弓形是由一条直线和一段圆周所围成的图形。

A *segment* of a circle is the figure contained by a straight line and a circumference of a circle.

07 / 弓形的角是由一条直线和一段圆周所夹的角。

An *angle of a segment* is that contained by a straight line and a circumference of a circle.

08 / 在弓形的圆周上取一点，连接该点和弓形的底的两个端点的两条直线所夹的角叫作弓形上的角。

An *angle in a segment* is the angle which, when a point is taken on the circumference of the segment and straight lines are joined from it to the extremities of the straight line which is the *base of the segment*, is contained by the straight lines so joined.

09 / 且当夹这个角的直线与一段圆周相截时，称这个角张在那段圆周上。

And, when the straight lines containing the angle cut off a circumference, the angle is said to *stand upon* that circumference.

10 / 以圆心为顶点作一角，由夹这个角的两条直线与它们所截的圆周所围成的图形叫作扇形。

A *sector of a circle* is the figure which, when an angle is constructed at the centre of the circle, is contained by the straight lines containing the angle and the circumference cut off by them.

11 / 含等角或张在其上的角彼此相等的弓形是相似弓形。

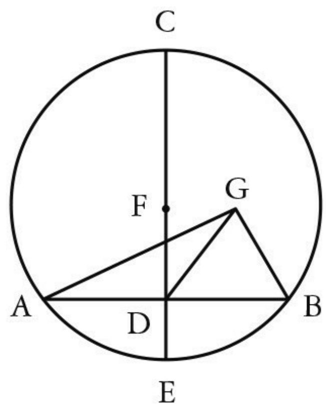
Similar segments of circles are those which admit equal angles, or in which the angles are equal to one another.

命题 **Proposition**

命题**01**

找到给定圆的圆心。

To find the centre of a given circle.



设ABC是给定的圆；

于是，要求找到圆ABC的圆心。

任意作直线AB穿过它，设AB被二等分于点D；

从D作DC与AB成直角，且DC过点E；设CE被二等分于F；

我说，F是圆ABC的圆心。

这是因为，假定不是这样，设G是圆心，

连接GA、GD、GB。

于是，由于AD等于DB，且DG公用，所以

两边AD、DG分别等于两边BD、DG；

而底GA等于底GB，因为它们都是半径；

因此，角ADG等于角GDB。

[I. 8]

但是，当一条直线与另一条直线交成的邻角彼此相等时，这些等角中的每一个都是直角；

[I. 定义10]

因此，角GDB是直角。

但角FDB也是直角；

因此，角FDB等于角GDB，

大的等于小的：这是不可能的。

因此，G不是圆ABC的圆心。

类似地，可以证明，除F以外，任何其他点也不可能是圆心。

因此，点F是圆ABC的圆心。

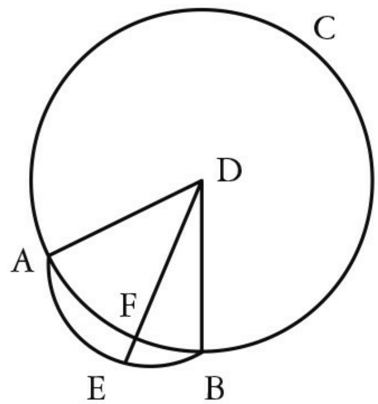
这就是所要作的。

推论　由此显然可得，如果圆内一直线把另一直线截成相等的两部分且相交成直角，则这个圆的圆心在该直线上。

命题**02**

在一个圆的圆周上任取两点，则连接这两点的直线落在圆内。

If on the circumference of a circle two points be taken at random, the straight line joining the points will fall within the circle.



设ABC是一个圆，且A、B是在它的圆周上任取的两点；

我说，从A到B连成的直线落在圆内。

这是因为，假定它不落在圆内，如果可能，假定它落在圆外，即AEB；

取圆ABC的圆心[III. 1]，设它是D；

连接DA、DB，作DFE。

于是，由于DA等于DB，所以

角DAE也等于角DBE。

[I. 5]

又，延长三角形DAE的一边AEB，所以

角DEB大于角DAE。

[I. 16]

但角DAE等于角DBE；

因此，角DEB大于角DBE。

而大角对大边；

[I. 19]

因此，DB大于DE。

但DB等于DF；

因此，DF大于DE，

小的大于大的：这是不可能的。

因此，从A到B的直线不会落在圆外。

类似地，可以证明，它也不会落在圆周上；

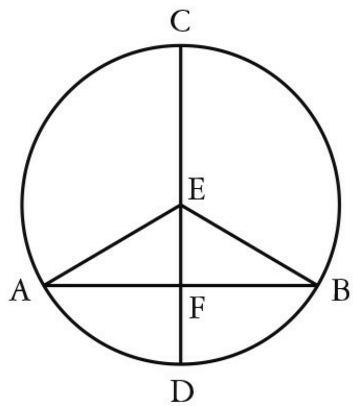
因此，它落在圆内。

这就是所要证明的。

命题**03**

在圆内，若一条过圆心的直线将一条不过圆心的直线二等分，则它们相交成直角；又，若它们相交成直角，则前者将后者二等分。

If in a circle a straight line through the centre bisect a straight line not through the centre, it also cuts it at right angles; and if it cut it at right angles, it also bisects it.



设ABC是一个圆，圆内的直线CD过圆心且将不过圆心的直线AB二等分于点F；

我说，它们交成直角。

这是因为，取圆ABC的圆心，设它是E；连接EA、EB。

于是，由于AF等于FB，且FE公用，所以

两边等于两边；

而底EA等于底EB；

因此，角AFE等于角BFE。

[I. 8]

但是，当一条直线与另一条直线交成的邻角彼此相等时，这些等角

中的每一个都是直角。

[I. 定义10]

因此，角AFE、BFE都是直角。

因此，过圆心的CD将不过圆心的AB二等分，并与之交成直角。

又，设CD与AB交成直角；

我说，CD也将AB二等分，即AF等于FB。

这是因为，作同一个图，

由于EA等于EB，所以

角EAF也等于角EBF。

[I. 5]

但直角AFE等于直角BFE，

因此，EAF、EBF是两个角相等且有一条边相等的两个三角形，即EF公用，它对着相等的角。

因此，其余的边也等于其余的边；

[I. 26]

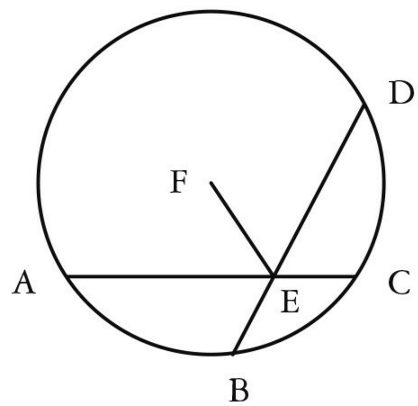
因此，AF等于FB。

这就是所要证明的。

命题**04**

若圆内有两条不过圆心的直线相交，则它们彼此不能二等分。

If in a circle two straight lines cut one another which are not through the centre, they do not bisect one another.



设ABCD是一个圆，AC、BD是圆内两条不过圆心的直线，它们相交于E；

我说，它们不彼此二等分。

这是因为，如果可能，设它们彼此二等分，因此AE等于EC，BE等于ED；

取圆ABCD的圆心[III. 1]，设它为F；连接FE。

于是，由于过圆心的直线FE将不过圆心的直线AC二等分，所以

它们也交成直角；

[III. 3]

因此，角FEA是直角。

又，由于直线FE将直线BD二等分，所以

它们也交成直角，

[III. 3]

因此，角FEB是直角。

但已证明，角FEA是直角；

因此，角FEA等于角FEB，

小的等于大的：这是不可能的。

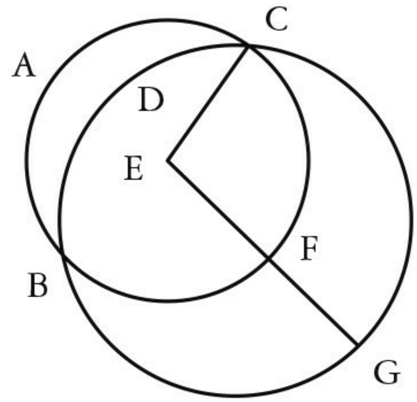
因此，AC、BD彼此不能二等分。

这就是所要证明的。

命题**05**

若两圆相交，则它们不同心。

If two circles cut one another, they will not have the same centre.



设圆ABC、CDG相交于点B、C；

我说，它们不同心。

这是因为，如果可能，设圆心为E；连接EC，任作直线EFG。

于是，由于点E是圆ABC的圆心，所以EC等于EF。

[I. 定义15]

又，由于点E是圆CDG的圆心，所以

EC等于EG。

但已证明，EC也等于EF；

因此，EF也等于EG，

小的等于大的：这是不可能的。

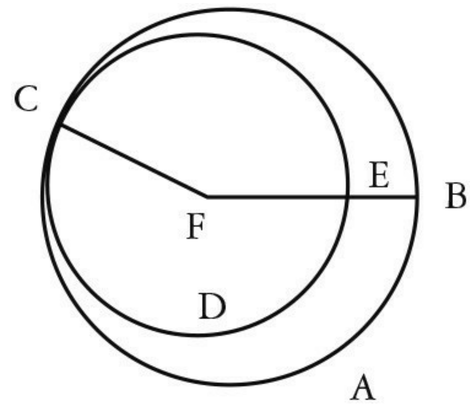
因此，点E不是圆ABC、CDG的圆心。

这就是所要证明的。

命题**06**

若两圆相切，则它们不同心。

If two circles touch one another, they will not have the same centre.



设两圆ABC、CDE相切于点C；

我说，它们不同心。

这是因为，如果可能，设圆心为F；

连接FC，并作FEB。

于是，由于点F是圆ABC的圆心，所以

FC等于FB。

又，由于点F是圆CDE的圆心，所以

FC等于FE。

但已证明，FC等于FB；

因此，FE也等于FB，

小的等于大的：这是不可能的。

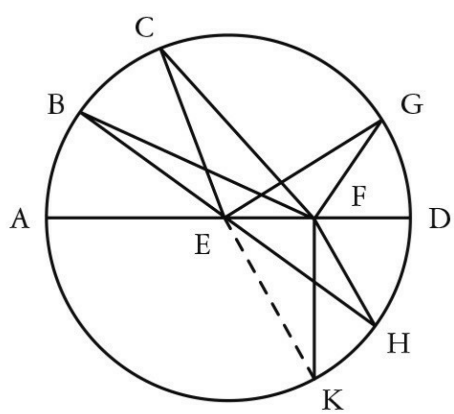
因此，F不是圆ABC、CDE的圆心。

这就是所要证明的。

命题**07**

若在圆的直径上取一个不是圆心的点，则在从该点到圆上所作的直线中，圆心所在的直线最大，同一直径的其余部分最小；在其余直线中，靠近过圆心直线的总是大于远离过圆心直线的；从该点到圆只能作两条相等的直线，它们分别在最小直线的两侧。

If on the diameter of a circle a point be taken which is not the centre of the circle, and from the point straight lines fall upon the circle, that will be greatest on which the centre is, the remainder of the same diameter will be least, and of the rest the nearer to the straight line through the centre is always greater than the more remote, and only two equal straight lines will fall from the point on the circle, one on each side of the least straight line.



设ABCD是一个圆，AD是它的一条直径；在AD上取一个不是圆心的点F，设E是圆心，从F到圆ABCD上作直线FB、FC、FG；

我说，FA最大，FD最小，对于其余的直线，FB大于FC，FC大于FG。

连接BE、CE、GE。

于是，由于任何三角形中，两边之和大于其余一边[I. 20]，所以

EB、EF之和大于BF。

但AE等于BE；

因此，AF大于BF。

又，由于BE等于CE，且FE公用，所以

两边BE、EF等于两边CE、EF。

但角BEF也大于角CEF；

因此，底BF大于底CF。

[I. 24]

同理，

CF也大于FG。

又，由于GF、FE之和大于EG，

且EG等于ED，所以

GF、EF之和大于ED。

从它们中分别减去EF；

因此，余下的GF大于余下的FD。

因此，FA最大，FD最小，且FB大于FC，FC大于FG。

其次我说，从点F到圆ABCD上只能作两条相等的直线，它们分别在最小直线FD的两侧。

这是因为，在直线EF上并且在其上的点E作角FEH等于角GEF[I. 23]，连接FH。

于是，由于GE等于EH，

且EF公用，所以

两边GE、EF等于两边HE、EF；

而角GEF等于角HEF；

因此，底FG等于底FH。

[I. 4]

其次我说，从点F到圆没有另一条直线等于FG。

这是因为，如果有，设它为FK。

于是，由于FK等于FG，且FH等于FG，所以

FK也等于FH，

因此，靠近过圆心直线的直线等于远离过圆心直线的直线：这是不可能的。

因此，从点F到圆作不出另一条直线等于FG；

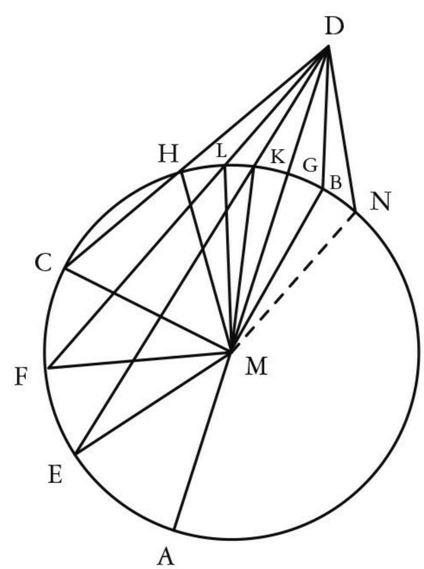
因此，这样的直线只有一条。

这就是所要证明的。

命题**08**

若在圆外取一点，从该点作到圆的直线，其中一条直线过圆心而其他直线任意作出，则在落在凹圆周上的直线中，过圆心的最大，而在其余直线中，靠近过圆心直线的总是大于远离过圆心直线的；然而在落在凸圆周上的直线中，该点与直径之间的那条最小，而在其余直线中，靠近最小直线的总是小于远离最小直线的；从该点到圆只能作两条相等的直线，它们分别在最小直线的两侧。

If a point be taken outside a circle and from the point straight lines be drawn through to the circle, one of which is through the centre and the others are drawn at random, then, of the straight lines which fall on the concave circumference, that through the centre is greatest, while of the rest the nearer to that through the centre is always greater than the more remote, but, of the straight lines falling on the convex circumference, that between the point and the diameter is least, while of the rest the nearer to the least is always less than the more remote, and only two equal straight lines will fall on the circle from the point, one on each side of the least.



设ABC是一个圆，D是在ABC外所取的一点；

从它作直线DA、DE、DF、DC，且DA过圆心；

我说，在落在凹圆周AEFC上的直线中，过圆心的直线DA最长，

且DE大于DF，DF大于DC；

然而在落在凸圆周HLKG上的直线中，该点与直径AG之间的直线DG最短；且靠近最短直线DG的直线总是小于远离直线DG的直线，即DK小于DL，DL小于DH。

这是因为，取圆ABC的圆心，

[III. 1]

设它为M；连接ME、MF、MC、MK、ML、MH。

于是，由于AM等于EM，给它们分别加上MD；

因此，AD等于EM、MD之和。

但EM、MD之和大于ED；

因此，AD也大于ED。

又，由于ME等于MF，

且MD公用，

因此，EM、MD之和等于FM、MD之和；

而角EMD大于角FMD；

因此，底ED大于底FD。

[I. 24]

类似地，可以证明，FD大于CD；因此，DA最大，而DE大于DF，DF大于DC。

接着，由于MK、KD之和大于MD，

[I. 20]

而MG等于MK，

因此，余下的KD大于余下的GD，

因此，GD小于KD。

又，由于在三角形MLD的一边MD上作了两条直线MK、KD交于此三角形内，

因此，MK、KD之和小于ML、LD之和；

[I. 21]

而MK等于ML；

因此，余下的DK小于余下的DL。

类似地，可以证明，DL也小于DH；

因此，DG最小，而DK小于DL，DL小于DH。

其次我说，从点D到圆只能作两条相等的直线，它们分别在最小直线DG的两侧。

在直线MD上并且在其上的点M作角DMB等于角KMD，连接DB。

于是，由于MK等于MB，

且MD公用，所以

两边KM、MD分别等于两边BM、MD；

而角KMD等于角BMD；

因此，底DK等于底DB。

[I. 4]

我说，从点D到圆没有另一条直线等于DK。

这是因为，如果有，设它为DN。

于是，由于DK等于DN，

且DK等于DB，所以

DB也等于DN，

因此，靠近最短直线DG的直线等于远离最短直线DG的直线：这已经证明是不可能的。

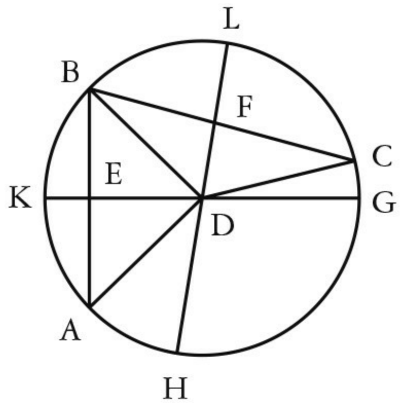
因此，从点D到圆ABC只能作两条相等的直线，它们分别在最短直线DG的两侧。

这就是所要证明的。

命题**09**

若在圆内取一点，且从该点到圆所作相等的直线多于两条，则该点是该圆的圆心。

If a point be taken within a circle, and more than two equal straight lines fall from the point on the circle, the point taken is the centre of the circle.



设ABC是一个圆，D是在圆内取的点，且从D到圆ABC可作多于两条相等的直线，即DA、DB、DC；

我说，点D是圆ABC的圆心。

这是因为，连接AB、BC，且它们被二等分于点E、F，连接ED、FD，并让它们通过点G、K、H、L。

于是，由于AE等于EB，且ED公用，所以

两边AE、ED等于两边BE、ED；

而底DA等于底DB，

因此，角AED等于角BED。

[I. 8]

因此，角AED、BED中的每一个都是直角。

[I. 定义10]

因此，GK把 AB分成相等的两部分，且交成直角。

又，如果圆内一直线把另一直线截成相等的两部分且相交成直角，则这个圆的圆心在该直线上，

[III. 1，推论]

因此，圆心在GK上。

同理，

圆ABC的圆心也在HL上。

而除点D以外，直线GK、HL没有其他公共点；

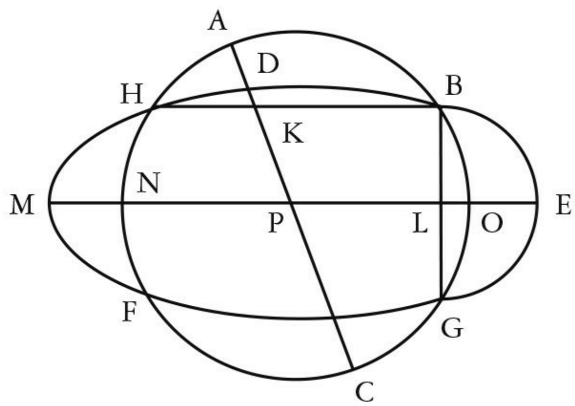
因此，点D是圆ABC的圆心。

这就是所要证明的。

命题**10**

一圆截一圆，其交点不多于两个。

A circle does not cut a circle at more points than two.



这是因为，设圆ABC截圆DEF的交点多于两个，即B、G、F、H；

连接BH、BG，设它们被二等分于点K、L，从K、L作KC、LM与BH、BG成直角，并让它们通过点A、E。

于是，由于圆ABC内一直线AC把另一直线BH截成相等的两部分且相交成直角，所以

圆ABC的圆心在AC上。

[III. 1，推论]

又，由于同一圆ABC内一直线NO把另一直线BG截成相等的两部分且相交成直角，所以

圆ABC的圆心在NO上。

但已证明它在AC上，而且除点P外，直线AC、NO没有交点；

因此，点P是圆ABC的圆心。

类似地，可以证明，P也是圆DEF的圆心；

因此，彼此相截的两圆ABC、DEF有共同的圆心P：

这是不可能的。

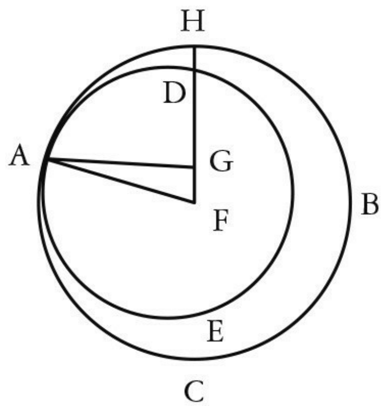
[III. 5]

这就是所要证明的。

命题**11**

若两圆内切，且取它们的圆心，则连接其圆心的直线延长后过两圆的切点。

If two circles touch one another internally, and their centres be taken, the straight line joining their centres, if it be also produced, will fall on the point of contact of the circles.



设两圆ABC、ADE内切于点A，且取圆ABC的圆心F以及ADE的圆心G；

我说，连接G、F的直线过点A。

这是因为，假定不是这样，如果可能，设该直线是FGH，连接AF、AG。

于是，由于AG、GF之和大于FA，即大于FH，

从它们中分别减去FG；

因此，余下的AG大于余下的GH。

而AG等于GD；

因此，GD也大于GH，

小的大于大的：这是不可能的。

因此，连接F与G的直线不会落在FA外面；

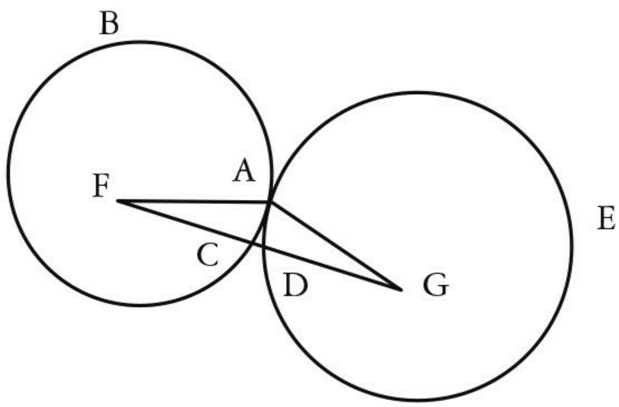
因此，它过切点A。

这就是所要证明的。

命题**12**

若两圆外切，则连接其圆心的直线过切点。

If two circles touch one another externally, the straight line joining their centres will pass through the point of contact.



设两圆ABC、ADE外切于点A，取ABC的圆心F和ADE的圆心G；

我说，连接F与G的直线过切点A。

这是因为，假定不是这样，如果可能，设该直线为FCDG，连接AF、AG。

于是，由于点F是圆ABC的圆心，所以

FA等于FC。

又，由于点G是圆ADE的圆心，所以

GA等于GD。

但已证明，FA也等于FC；

因此，FA、AG之和等于FC、GD之和，

因此，整个FG大于FA、AG之和；

但它也小于它们之和[I. 20]：这是不可能的。

因此，连接F与G的直线不会不过切点A；

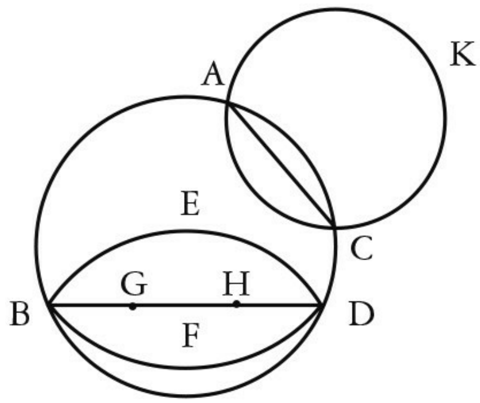
因此，它过切点A。

这就是所要证明的。

命题**13**

一圆与另一圆无论内切还是外切，切点不多于一个。

A circle does not touch a circle at more points than one, whether it touch it internally or externally.



这是因为，如果可能，先设圆ABDC与圆EBFD内切，其切点多于一个，即D、B。

取圆ABDC的圆心G和EBFD的圆心H。

因此，连接G到H的直线会过B、D。

[III. 11]

设它为BGHD。

于是，由于点G是圆ABDC的圆心，所以

BG等于GD；

因此，BG大于HD；

因此，BH比HD更大。

又，由于点H是圆EBFD的圆心，所以

BH等于HD；

但已证明，BH比HD更大：这是不可能的。

因此，一圆与另一圆内切，其切点不多于一个。

其次我说，外切时切点也不多于一个。

这是因为，如果可能，设圆ACK与圆ABDC的切点多于一个，即A、C，

连接AC。

于是，由于在圆ABDC、ACK中每一个的圆周上已经任取了两点A、C，所以连接它们的直线落在每一个圆的内部；

[III. 2]

但它落在了圆ABDC内和圆ACK外[III. 定义3]：这是荒谬的。

因此，一圆与另一圆外切，切点不多于一个。

而已经证明，内切时切点也不多于一个。

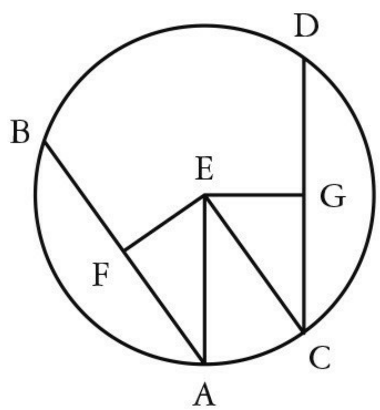
因此，一圆与另一圆无论内切还是外切，切点不多于一个。

这就是所要证明的。

命题**14**

圆内相等的直线与圆心等距，与圆心等距的直线彼此相等。

In a circle equal straight lines are equally distant from the centre, and those which are equally distant from the centre are equal to one another.



设ABDC是一个圆，AB、CD是圆内相等的直线。

我说，AB、CD与圆心等距。

这是因为，取圆ABDC的圆心[III. 1]，设它是E；从E作EF、EG垂直于AB、CD；连接AE、EC。

于是，由于过圆心的直线EF与不过圆心的直线AB相交成直角，所以它也将AB二等分。

[III. 3]

因此，AF等于FB；

因此，AB是AF的二倍。

同理，

CD也是CG的二倍；

而AB等于CD；

因此，AF也等于CG。

又，由于AE等于EC，所以

AE上的正方形也等于EC上的正方形。

但AF、EF上的正方形之和等于AE上的正方形，这是因为F处的是直角；

而EG、GC上的正方形之和等于EC上的正方形，这是因为G处的是直角；

[I. 47]

因此，AF、FE上的正方形之和等于CG、GE上的正方形之和，

其中AF上的正方形等于CG上的正方形，这是因为AF等于CG；

因此，余下的FE上的正方形等于EG上的正方形，

因此，EF等于EG。

但是当圆心到圆内直线所作的垂线相等时，则称这些直线与圆心等距；

[III. 定义4]

因此，AB、CD与圆心等距。

接着，设直线AB、CD与圆心等距；即设EF等于EG。

我说，AB也等于CD。

这是因为，用同样的作图，类似地可以证明，AB是AF的二倍，CD是CG的二倍。

又，由于AE等于CE，所以

AE上的正方形等于CE上的正方形。

但EF、FA上的正方形之和等于AE上的正方形，EG、GC上的正方形之和等于CE上的正方形。

[I. 47]

因此，EF、FA上的正方形之和等于EG、GC上的正方形之和，

其中EF上的正方形等于EG上的正方形，这是因为EF等于EG；

因此，余下的AF上的正方形等于CG上的正方形；

因此，AF等于CG。

但AB是AF的二倍，CD是CG的二倍；

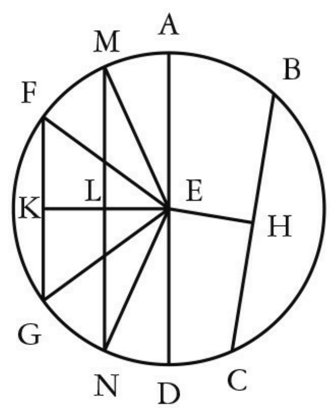
因此，AB等于CD。

这就是所要证明的。

命题**15**

圆内的直线中直径最大，而在其余的直线中，靠近圆心的总是大于远离圆心的。

Of straight lines in a circle the diameter is greatest,and of the rest the nearer to the centre is always greater than the more remote.



设ABCD是一个圆，AD是它的直径，E是圆心；设BC较为靠近直径AD，且FG较远。

我说，AD最大且BC大于FG。

这是因为，从圆心E作EH、EK垂直于BC、FG。

于是，由于BC靠近圆心，而FG较远，所以EK大于EH。

[III. 定义5]

取EL等于EH，过L作LM与EK成直角并把它延长到N，连接ME、EN、FE、EG。

于是，由于EH等于EL，所以

BC也等于MN。

[III. 14]

又，由于AE等于EM，且ED等于EN，所以

AD等于ME、EN之和。

而ME、EN之和大于MN，

[I. 20]

而MN等于BC；

因此，AD大于BC。

又，由于两边ME、EN之和等于两边FE、EG之和，

且角MEN大于角FEG，

因此，底MN大于底FG。

[I. 24]

但已证明，MN等于BC。

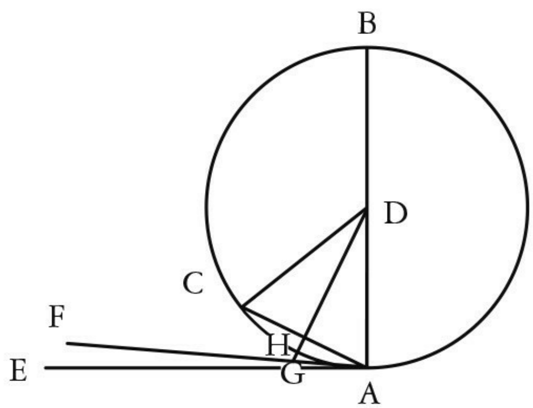
因此，直径AD最大，BC大于FG。

这就是所要证明的。

命题**16**

从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线落在圆外，且不能在该直线与圆周之间的空间中插入另一条直线；此外，半圆的角大于任何锐直线角，余下的角小于任何锐直线角。

The straight line drawn at right angles to the diameter of a circle from its extremity will fall outside the circle, and into the space between the straight line and the circumference another straight line cannot be interposed; further the angle of the semicircle is greater, and the remaining angle less, than any acute rectilineal angle.



设ABC是以D为圆心的圆，AB是直径；

我说，从AB的端点A所作的与AB成直角的直线落在圆外。

这是因为，假定不是这样，如果可能，设它是CA且落在圆内，连接DC。

由于DA等于DC，所以

角DAC也等于角ACD。

[I. 5]

但角DAC是直角；

因此，角ACD也是直角：

于是，在三角形ACD中，两角DAC、ACD之和等于两直角：这是不可能的。

[I. 17]

因此，从点A所作的与BA成直角的直线不会落在圆内。

类似地，可以证明，它不会落在圆周上；

因此，它落在圆外。

设它落在AE；

接着，我说，不能在直线AE与圆周CHA之间的空间中插入另一条直线。

这是因为，如果可能，设插入的另一条直线是FA，并从点D作DG垂直于FA。

于是，由于角AGD是直角，

而角DAG小于直角，所以

AD大于DG。

[I. 19]

但DA等于DH；

因此，DH大于DG，

小的大于大的：这是不可能的。

因此，不能在该直线与圆周之间的空间中插入另一条直线。

其次我说，直线BA与圆周CHA所夹的半圆的角大于任何锐角，

且圆周CHA与直线AE所夹的余下的角小于任何锐角。

这是因为，如果有某直线角大于直线BA与圆周CHA所夹的角，且某直线角小于圆周CHA与直线AE所夹的角，那么在圆周与直线AE之间的空间中可以插入这样一条直线，它将构成一个由直线所夹的角，此角大于直线BA与圆周CHA所夹的角，并且构成另一个由直线所夹的角，此角小于圆周CHA与直线AE所夹的角。

但不能插入这样一条直线；

因此，没有任何由直线所夹的锐角大于直线BA与圆周CHA所夹的角，也没有任何由直线所夹的锐角小于圆周CHA与直线AE所夹的角。

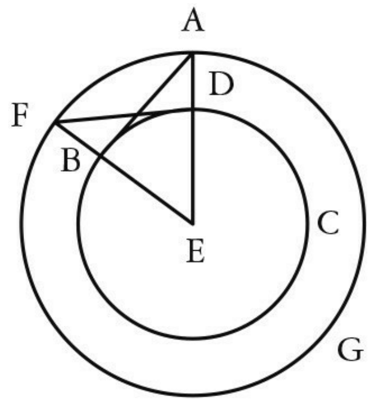
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线与圆相切。

命题**17**

从给定一点作一直线与给定的圆相切。

From a given point to draw a straight line touching a given circle.



设A是给定的点，BCD是给定的圆；

于是，要求从点A作一直线与圆BCD相切。

取圆的圆心E；

[III. 1]

连接AE，以E为圆心、EA为距离作圆AFG；

从D作DF与EA成直角，

连接EF、AB；

我说，从点A所作的AB与圆BCD相切。

这是因为，由于E是圆BCD、AFG的圆心，

EA等于EF，且ED等于EB；

因此，两边AE、EB等于两边FE、ED；

而它们夹着E处的公共角；

因此，底DF等于底AB，

三角形DEF等于三角形BEA，

其余的角等于其余的角；

[I. 4]

因此，角EDF等于角EBA。

但角EDF是直角；

因此，角EBA也是直角。

现在，EB是半径；

而从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线与圆相切；

[III. 16 推论]

因此，AB与圆BCD相切。

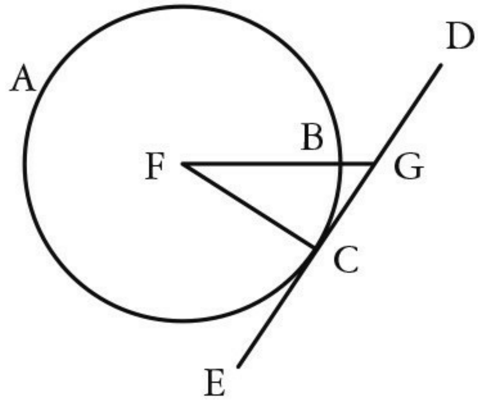
这样便从给定的点A作出了直线AB与圆BCD相切。

这就是所要作的。

命题**18**

若一直线与一圆相切，则连接圆心与切点的直线垂直于切线。

If a straight line touch a circle, and a straight line be joined from the centre to the point of contact, the straight line so joined will be perpendicular to the tangent.



设直线DE与圆ABC相切于点C，取圆ABC的圆心F，从F到C连成直线FC；

我说，FC垂直于DE。

因为否则的话，从F作FG垂直于DE。

于是，由于角FGC是直角，所以

角FCG是锐角；

[I. 17]

而大角对大边；

[I. 19]

因此，FC大于FG。

而FC等于FB；

因此，FB也大于FG，

小的大于大的：这是不可能的。

因此，FG不垂直于DE。

类似地，可以证明，除FC外，没有任何其他直线垂直于DE；

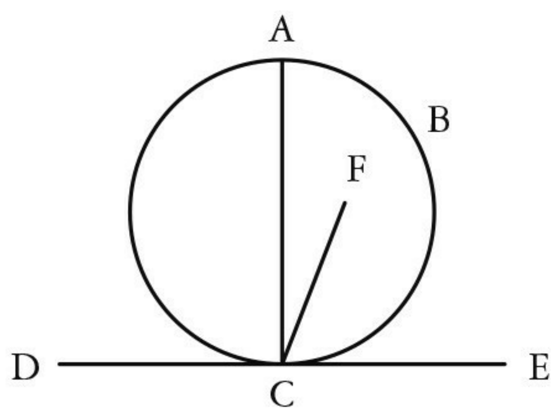
因此，FC垂直于DE。

这就是所要证明的。

命题**19**

若一直线与一圆相切，从切点作一直线与切线成直角，则圆心在这条直线上。

If a straight line touch a circle, and from the point of contact a straight line be drawn at right angles to the tangent, the centre of the circle will be on the straight line so drawn.



设直线DE与圆ABC相切于点C，从C作CA与DE成直角；

我说，圆心在AC上。

这是因为，假定不是这样，如果可能，设F是圆心，连接CF，

由于直线DE与圆ABC相切，

且FC是从圆心到切点的连线，所以

FC垂直于DE；

[III. 18]

因此，角FCE是直角。

但角ACE也是直角；

因此，角FCE等于角ACE，

小的等于大的：这是不可能的。

因此，F不是圆ABC的圆心。

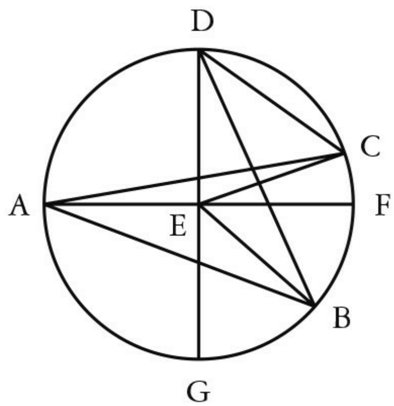
类似地，可以证明，除了在AC上以外，圆心不会是其他点。

这就是所要证明的。

命题**20**

圆内以相同圆周为底的圆心角是圆周角的二倍。

In a circle the angle at the centre is double of the angle at the circumference, when the angles have the same circumference as base.



设ABC是一个圆，角BEC是圆心角，角BAC是圆周角，设它们以相同的圆周BC为底。

我说，角BEC是角BAC的二倍。

这是因为，连接AE并延长到F，

于是，由于EA等于EB，所以

角EAB也等于EBA；

[I. 5]

因此，角EAB、EBA之和是角EAB的二倍。

但角BEF等于角EAB、EBA之和；

[I. 32]

因此，角BEF也是角EAB的二倍。

同理，

角FEC也是角EAC的二倍。

因此，整个角BEC是整个角BAC的二倍。

又，变成另一条直线，设有另一个角BDC；连接DE并延长到G。

于是类似地，可以证明，角GEC是角EDC的二倍，

其中角GEB是角EDB的二倍；

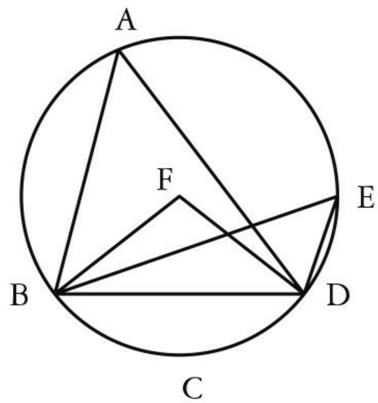
因此，余下的角BEC是角BDC的二倍。

这就是所要证明的。

命题**21**

圆内同一弓形上的角彼此相等。

In a circle the angles in the same segment are equal to one another.



设ABCD是一个圆，角BAD、BED是同一弓形BAED上的角。

我说，角BAD、BED彼此相等。

这是因为，取圆ABCD的圆心，设它为F；连接BF、FD。

现在，由于角BFD是圆心角，

角BAD是圆周角，

且它们以相同的圆周BCD为底，

因此，角BFD是角BAD的二倍。

[III. 20]

同理，

角BFD也是角BED的二倍；

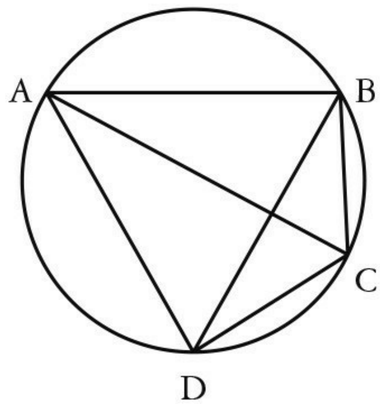
因此，角BAD等于角BED。

这就是所要证明的。

命题**22**

圆内接四边形的对角之和等于两直角。

The opposite angles of quadrilaterals in circles are equal to two right angles.



设ABCD是一个圆，ABCD是其内接四边形；

我说，对角之和等于两直角。

连接AC、BD。

于是，由于在任何三角形中，三个角之和等于两直角[I. 32]，所以三角形ABC的三个角CAB、ABC、BCA之和等于两直角。

但角CAB等于角BDC，这是因为它们在同一弓形BADC中；

[III. 21]

角ACB等于角ADB，这是因为它们在同一弓形ADCB中；

因此，整个角ADC等于角BAC、ACB之和。

给它们分别加上角ABC；

因此，角ABC、BAC、ACB之和等于角ABC、ADC之和。

但角ABC、BAC、ACB之和等于两直角；

因此，角ABC、ADC之和也等于两直角。

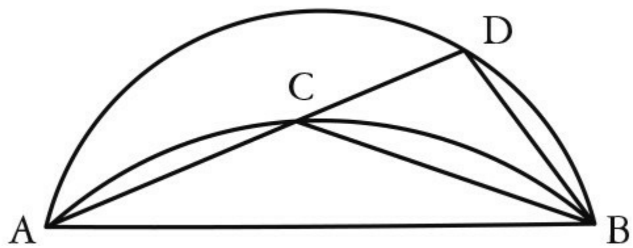
类似地，可以证明，角BAD、DCB之和也等于两直角。

这就是所要证明的。

命题**23**

在同一直线上且在同一侧作不出两个相似且不相等的弓形。

On the same straight line there cannot be constructed two similar and unequal segments of circles on the same side.



这是因为，如果可能，设在同一直线AB上且在同一侧可以作出两个相似且不相等的弓形ACB、ADB；

作ACD，连接CB、DB。

于是，由于弓形ACB与弓形ADB相似，

且相似的弓形含等角[III. 定义11]，所以

角ACB等于角ADB，

即外角等于内角：这是不可能的。

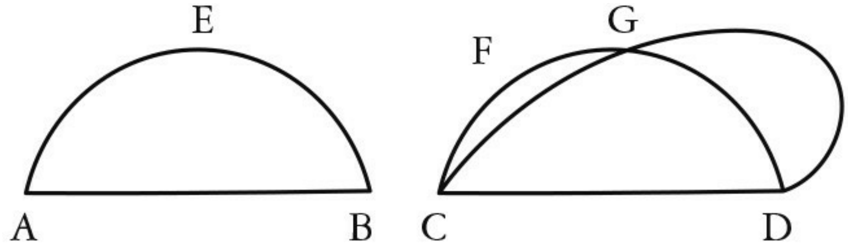
[I. 16]

这就是所要证明的。

命题**24**

相等直线上的相似弓形彼此相等。

Similar segments of circles on equal straight lines are equal to one another.



设AEB、CFD是相等直线AB、CD上的相似弓形；

我说，弓形AEB等于弓形CFD。

这是因为，如果将弓形AEB叠合到CFD上，若点A被置于C上，直线AB被置于CD上，则

点B也与点D重合，这是因为AB等于CD；

而AB与CD重合，

弓形AEB也与弓形CFD重合。

这是因为，如果直线AB与CD重合，但弓形AEB不与弓形CFD重合，那么

它要么落在里面，要么落在外面；

或者歪斜地落在CGD上，于是一圆截另一圆，其交点多于两个：这是不可能的。

[III. 10]

因此，若把直线AB叠合到CD上，则弓形AEB必定也与CFD重合；

因此，两弓形重合且彼此相等。

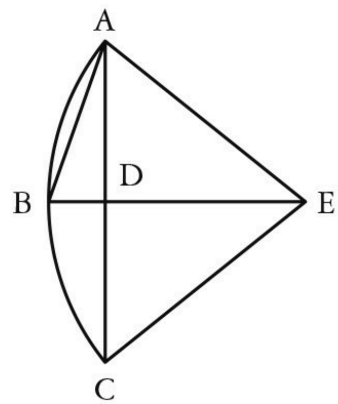
这就是所要证明的。

命题**25**

给定一个弓形，作一个整圆，使此弓形为它的一部分。

Given a segment of a circle, to describe the complete circle of which it is a segment.

设ABC是给定的弓形；



于是，要求作属于弓形ABC的整圆，也就是说，弓形ABC是这个圆的一部分。

设AC被二等分于D，从点D作DB与AC成直角，连接AB；

于是，角ABD大于、等于或小于角BAD。

首先，设角ABD大于角BAD；

在直线BA上的点A作角BAE等于角ABD；延长DB到E，连接EC。

于是，由于角ABE等于角BAE，所以

直线EB也等于EA。

[I. 6]

又，由于AD等于DC，且DE公用，所以

两边AD、DE分别等于两边CD、DE；

而角ADE等于角CDE，因为每一个都是直角；

因此，底AE等于底CE。

但已证明，AE等于BE；

因此，BE也等于CE；

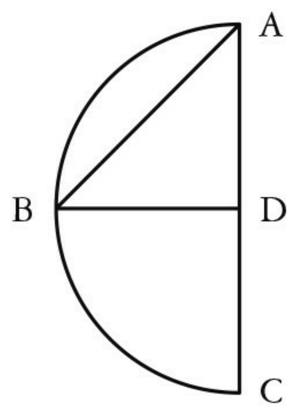
因此，三条直线AE、EB、EC彼此相等。

因此，以E为圆心，以直线AE、EB、EC之一为距离所作的圆也经过其余的点，并且是整圆。

[III. 9]

这样，给定一个弓形，便作出了整圆。

又，弓形ABC显然小于一个半圆，因为圆心E碰巧在它的外面。



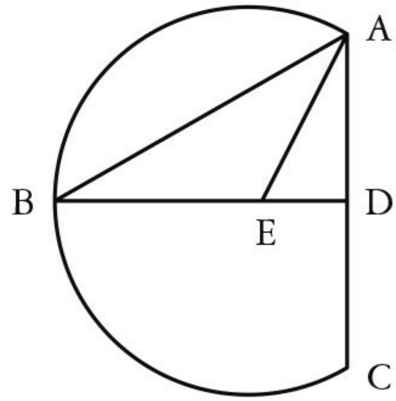
类似地，如果角ABD等于角BAD，

AD等于BD、DC中的每一个，

三条直线DA、DB、DC彼此相等，

D是整圆的圆心，

ABC显然是一个半圆。



但如果角ABD小于角BAD，且若我们在直线BA上的A点作一个角等于角ABD，则圆心落在弓形ABC中的DB上，弓形ABC显然大于半圆。

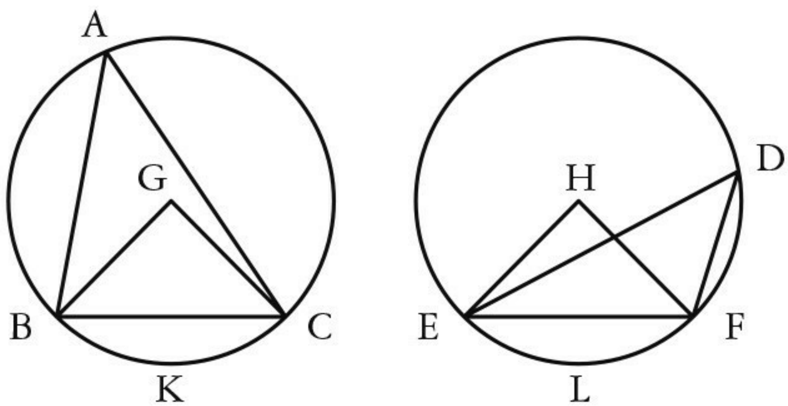
这样，给定一个弓形，便作出了整圆。

这就是所要作的。

命题**26**

等圆内相等的圆心角或圆周角对着相等的圆周。

In equal circles equal angles stand on equal circumferences, whether they stand at the centres or at the circumferences.



设ABC、DEF是等圆，它们之内有相等的角，即圆心角BGC、EHF和圆周角BAC、EDF；

我说，圆周BKC等于圆周ELF。

连接BC、EF。

现在，由于圆ABC、DEF相等，所以

它们的半径相等。

于是，两直线BG、GC等于两直线EH、HF；

而G处的角等于H处的角；

因此，底BC等于底EF。

[I. 4]

又，由于A处的角等于D处的角，所以

弓形BAC与弓形EDF相似；

[III. 定义11]

且它们在相等的直线上。

而相等直线上的相似弓形彼此相等；

[III. 24]

因此，弓形BAC等于弓形EDF。

但整个圆ABC也等于整个圆DEF；

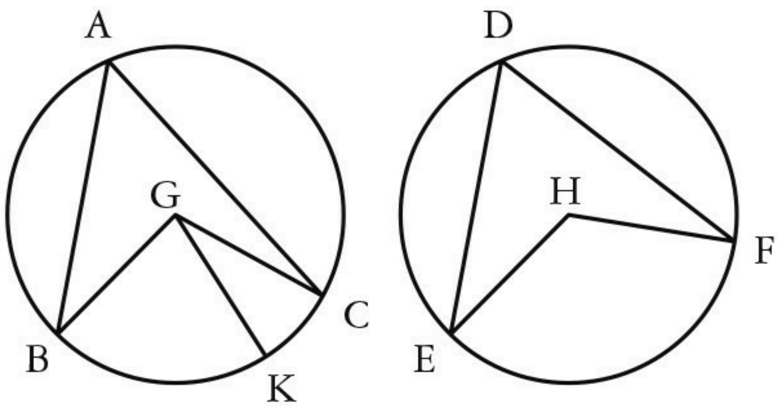
因此，余下的圆周BKC等于余下的圆周ELF。

这就是所要证明的。

命题**27**

等圆内相等圆周上的圆心角或圆周角彼此相等。

In equal circles angles standing on equal circumferences are equal to one another, whether they stand at the centres or at the circumferences.



设在等圆ABC、DEF内，在相等的圆周BC、EF上，角BGC、EHF在圆心G、H处，角BAC、EDF在圆周上；

我说，角BGC等于角EHF，

且角BAC等于角EDF。

这是因为，若角BGC不等于角EHF，则它们中有一个较大。

设角BGC较大：在直线BG上的点G作角BGK等于角EHF。

[I. 23]

现在，相等的圆心角所对的圆周也相等；

[III. 26]

因此，圆周BK等于圆周EF。

但EF等于BC；

因此，BK也等于BC，

小的等于大的：这是不可能的。

因此，角BGC并非不等于角EHF；

因此，角BGC等于角EHF。

又，点A处的角是角BGC的一半，

而点D处的角是角EHF的一半；

[III. 20]

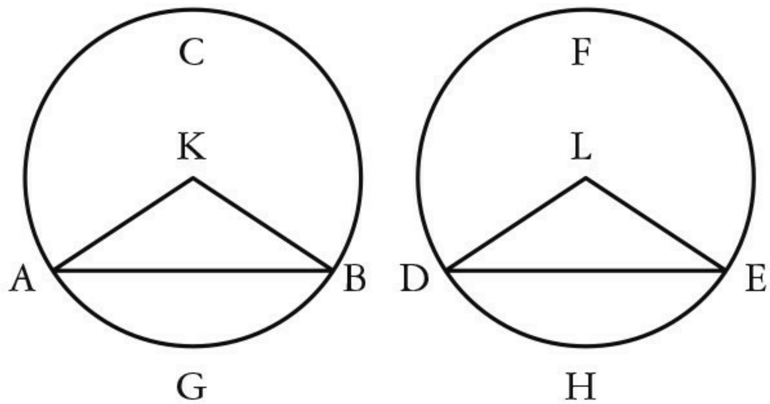
因此，点A处的角也等于点D处的角。

这就是所要证明的。

命题**28**

等圆内相等的直线截出相等的圆周，较大的圆周等于较大的圆周，较小的圆周等于较小的圆周。

In equal circles equal straight lines cut off equal circumferences, the greater equal to the greater and the less to the less.



设ABC、DEF是等圆，AB、DE是这些圆内相等的直线，它们截出较大的圆周ACB、DFE和较小的圆周AGB、DHE；

我说，较大的圆周ACB等于较大的圆周DFE，较小的圆周AGB等于较小的圆周DHE。

这是因为，取圆心K、L，连接AK、KB、DL、LE。

现在，由于圆相等，所以

半径也相等；

因此，两边AK、KB等于两边DL、LE；

且底AB等于底DE；

因此，角AKB等于角DLE。

[I. 8]

但相等的圆心角所对的圆周也相等；

[III. 26]

因此，圆周AGB等于DHE。

又，整个圆ABC等于整个圆DEF；

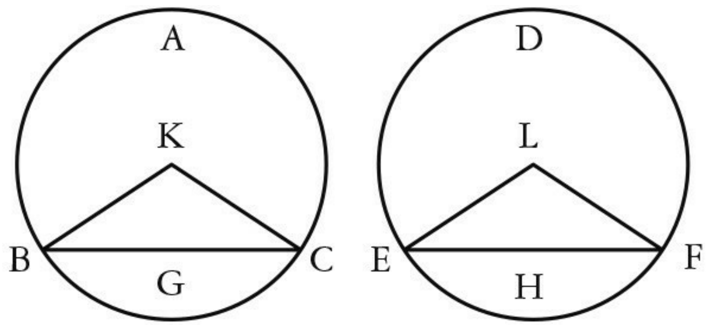
因此，余下的圆周ACB也等于余下的圆周DFE。

这就是所要证明的。

命题**29**

等圆内相等的圆周对着相等的直线。

In equal circles equal circumferences are subtended by equal straight lines.



设ABC、DEF是等圆，在它们之内截出相等的圆周BGC、EHF；连接直线BC、EF。

我说，BC等于EF。

这是因为，取圆心K、L；连接BK、KC、EL、LF。

现在，由于圆周BGC等于圆周EHF，所以

角BKC也等于角ELF。

[III. 27]

又，由于圆ABC、DEF相等，所以

半径也相等；

因此，两边BK、KC等于两边EL、LF；

而它们夹的角也相等；

因此，底BC等于底EF。

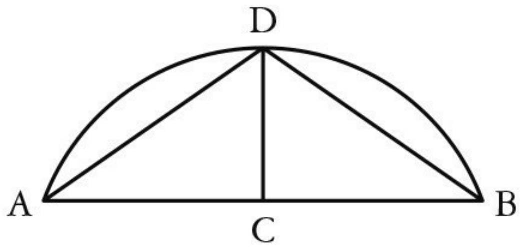
[I. 4]

这就是所要证明的。

命题**30**

将给定的圆周二等分。

To bisect a given circumference.



设ADB是给定的圆周；

于是，要求将圆周ADB二等分。

连接AB，它被二等分于C；从点C作CD与直线AB成直角，连接AD、DB。

于是，由于AC等于CB，且CD公用，所以

两边AC、CD等于两边BC、CD；

而角ACD等于角BCD，这是因为它们都是直角；

因此，底AD等于底DB。

[I. 4]

但相等的直线截出相等的圆周，较大的圆周等于较大的圆周，较小的圆周等于较小的圆周；

[III. 28]

圆周AD、DB都小于半圆；

因此，圆周AD等于圆周DB。

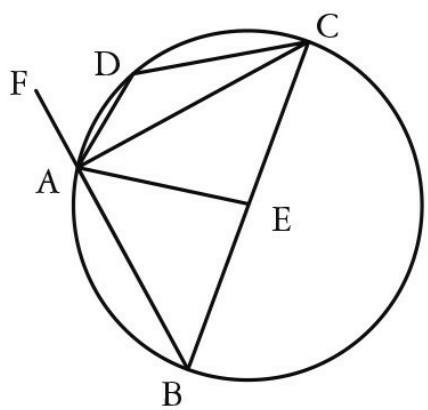
因此，给定的圆周被二等分于点D。

这就是所要作的。

命题**31**

圆内半圆上的角是直角，较大弓形上的角小于一直角，较小弓形上的角大于一直角；此外，较大弓形的角大于一直角，较小弓形的角小于一直角。

In a circle the angle in the semicircle is right, that in a greater segment less than a right angle, and that in a less segment greater than a right angle; and further the angle of the greater segment is greater than a right angle, and the angle of the less segment less than a right angle.



设ABCD是一个圆，BC是其直径，E是圆心，连接BA、AC、AD、DC；

我说，半圆BAC上的角BAC是直角，

大于半圆的弓形ABC上的角ABC小于一直角，

小于半圆的弓形ADC上的角ADC大于一直角。

连接AE，并把BA延长到F。

于是，由于BE等于EA，所以

角ABE也等于角BAE。

[I. 5]

又，由于CE等于EA，所以

角ACE也等于角CAE。

[I. 5]

因此，整个角BAC等于两角ABC、ACB之和。

但三角形ABC的外角FAC也等于两角ABC、ACB之和；

[I. 32]

因此，角BAC也等于角FAC；

因此，每一个角都是直角；

[I. 定义10]

因此，半圆BAC上的角BAC是直角。

接着，由于在三角形ABC中，两角ABC、BAC之和小于两直角，

[I. 17]

而角BAC是直角，所以

角ABC小于直角；

且它是在大于半圆的弓形ABC上的角。

接着，由于ABCD是圆内接四边形，

且圆内接四边形的对角之和等于两直角，

[III. 22]

而角ABC小于一直角，

因此，余下的角ADC大于一直角；

且它是在小于半圆的弓形ADC上的角。

其次我说，较大弓形的角，即圆周ABC与直线AC所夹的角大于一直角；

较小弓形的角，即圆周ADC与直线AC所夹的角小于一直角。

这是显然的。

这是因为，由于直线BA、AC所夹的角是直角，所以

圆周ABC与直线AC所夹的角大于一直角。

又，由于直线AC、AF所夹的角是直角，所以

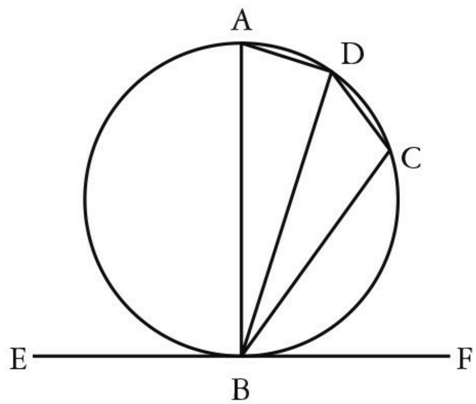
直线CA与圆周ADC所夹的角小于一直角。

这就是所要证明的。

命题**32**

若一直线与一圆相切，从切点在圆内作一直线与圆相截，则该直线与切线所成的角等于另一弓形上的角。

If a straight line touch a circle, and from the point of contact there be drawn across, in the circle, a straight line cutting the circle, the angles which it makes with the tangent will be equal to the angles in the alternate segments of the circle.



设直线EF与圆ABCD相切于点B，从点B在圆ABCD内作直线BD与圆相截；

我说，BD与切线EF成的角等于另一弓形上的角，即角FBD等于在弓形BAD内所作的角，角EBD等于在弓形DCB内所作的角。

这是因为，从B作BA与EF成直角，

在圆周BD上任取一点C，

连接AD、DC、CB。

于是，由于直线EF与圆ABCD相切于B，

从切点作BA与切线成直角，所以

圆ABCD的圆心在BA上。

[III. 19]

因此，BA是圆ABCD的直径；

因此，角ADB是半圆上的角，是直角。

[III. 31]

因此，其余的角BAD、ABD之和等于一直角。

[I. 32]

但角ABF也是直角；

因此，角ABF等于角BAD、ABD之和。

从它们中分别减去角ABD；

因此，余下的角DBF等于另一弓形上的角BAD。

接着，由于ABCD是圆内接四边形，所以

它的对角之和等于两直角。

[III. 22]

但角DBF、DBE之和也等于两直角；

因此，角DBF、DBE之和等于角BAD、BCD之和，

已经证明，其中角BAD等于角DBF；

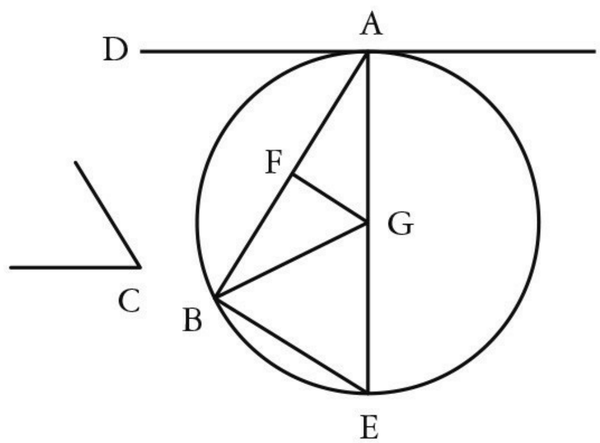
因此，余下的角DBE等于另一弓形DCB上的角DCB。

这就是所要证明的。

命题**33**

在给定的直线上作一弓形，使它所含的角等于给定的直线角。

On a given straight line to describe a segment of a circle admitting an angle equal to a given rectilineal angle.



图一

设AB为给定的直线，C处的角为给定的直线角；

于是，要求在给定的直线AB上作一个弓形，使它所含的角等于C处的角。

C处的角可以是锐角、直角或钝角。

首先，设它是锐角，且如图一，在直线AB上的点A处作角BAD等于C处的角；

因此，角BAD也是锐角。

作AE与DA成直角，设AB被二等分于F，从点F作FG与AB成直角，连接GB。

于是，由于AF等于FB，

且FG公用，所以

两边AF、FG等于两边BF、FG；

而角AFG等于角BFG；

因此，底AG等于底BG。

[I. 4]

因此，以G为圆心、GA为距离所作的圆也会经过B。

作这个圆，设它是ABE；

连接EB。

现在，由于从直径AE的端点A作的AD与AE成直角，

因此，AD与圆ABE相切。

[III. 16 推论]

于是，由于直线AD与圆ABE相切，

且从切点A在圆ABE内作一直线AB与圆相截，所以

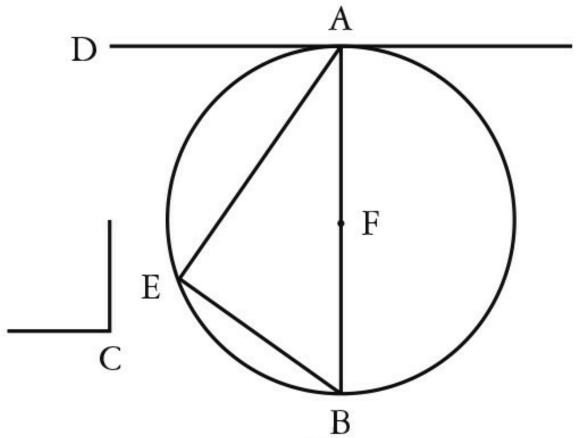
角DAB等于另一弓形上的角AEB。

[III. 32]

但角DAB等于C处的角；

因此，C处的角也等于角AEB。

这样便在给定的直线AB上作出了弓形AEB，它所含的角AEB等于给定的角即C处的角。



图二

接着，设C处的角是直角；

又要求在AB上作一弓形，使它所含的角等于C处的直角。

如图二，作角BAD等于C处的直角；

设AB被二等分于F，以F为圆心、FA或FB为距离作圆AEB。

因此，直线AD与圆ABE相切，这是因为A处的角是直角。

[III. 16 推论]

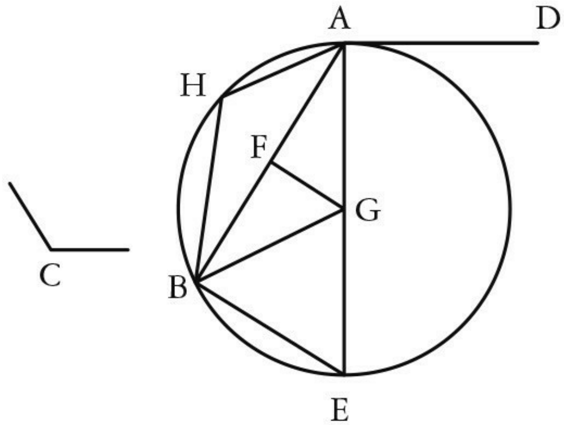
而角BAD等于弓形AEB上的角，因为后者本身也是一直角，是半圆上的角。

[III. 31]

但角BAD也等于C处的角。

因此，角AEB也等于C处的角。

这样便在AB上作出了弓形AEB，它所含的角等于C处的角。



图三

接着，设C处的角是钝角；

在直线AB上的点A作角BAD等于C处的角，如图三。

作AE与AD成直角，AB再次被二等分于F，作FG与AB成直角，连接GB。

于是，由于AF等于FB，

且FG公用，所以

两边AF、FG等于两边BF、FG；

而角AFG等于角BFG；

因此，底AG等于底BG。

[I. 4]

因此，以G为圆心、GA为距离所作的圆也经过B；设这个圆为AEB。

现在，由于从直径AE的端点所作的AD与直径AE成直角，所以

AD与圆AEB相切。

[III. 16 推论]

而AB是从切点A所作的直线且与圆相截；

因此，角BAD等于在另一弓形AHB中所作的角。

[III. 32]

但角BAD等于C处的角。

因此，弓形AHB上的角也等于C处的角。

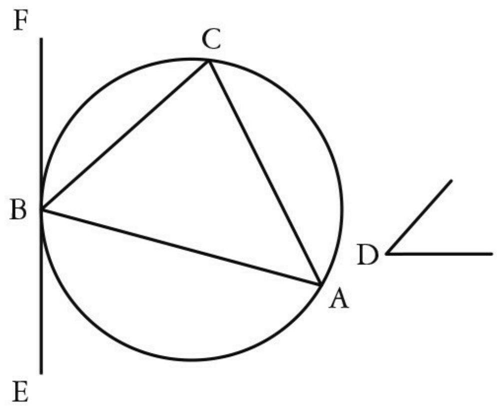
这样便在给定的直线AB上作出了弓形AHB，它所含的角等于C处的角。

这就是所要作的。

命题**34**

从给定的圆中截出一弓形，使它所含的角等于给定的直线角。

From a given circle to cut off a segment admitting an angle equal to a given rectilineal angle.



设ABC是给定的圆，D处的角是给定的直线角；

于是，要求从圆ABC中截出一弓形，使它所含的角等于给定的直线角，即D处的角。

在点B作EF与圆ABC相切，且在直线FB上的点B作角FBC等于D处的角。

[I. 23]

于是，由于直线EF与圆ABC相切，

且从切点B作直线BC与圆相截，所以

角FBC等于在另一弓形BAC中所作的角。

[III. 32]

但角FBC等于D处的角；

因此，弓形BAC上的角等于D处的角。

这样便从给定的圆ABC中截出了弓形BAC，它所含的角等于给定的直线角，即D处的角。

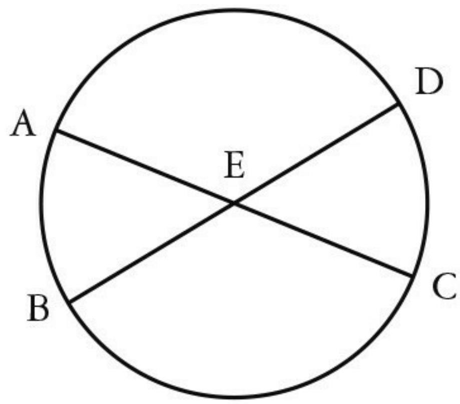
这就是所要作的。

命题**35**

若圆内有两条直线彼此相交，则其中一条被分成的两线段所围成的矩形等于另一条被分成的两线段所围成的矩形。

If in a circle two straight lines cut one another, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

设圆ABCD内有两条直线AC、BD彼此相交于点E；

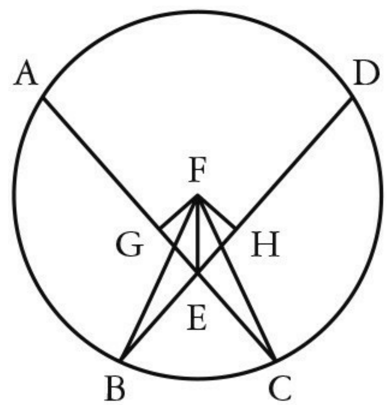


我说，AE、EC所围成的矩形等于DE、EB所围成的矩形。

现在，如果AC、BD过圆心，设E是圆ABCD的圆心，

那么显然，AE、EC、DE、EB相等，

AE、EC所围成的矩形也等于DE、EB所围成的矩形。



接着，设AC、DB不过圆心；

取ABCD的圆心，设它为F；

从F作FG、FH分别垂直于直线AC、DB，

连接FB、FC、FE。

于是，由于过圆心的直线GF与不过圆心的直线AC交成直角，所以

GF将AC二等分；

[III. 3]

因此，AG等于GC。

于是，由于直线AC在G被分成了相等的部分，在E被分成了不等的部分，所以

AE、EC所围成的矩形与EG上的正方形之和等于GC上的正方形；

[II. 5]

给它们分别加上GF上的正方形；

因此，矩形AE、EC与GE、GF上的正方形之和等于CG、GF上的正方形之和。

但FE上的正方形等于EG、GF上的正方形之和，FC上的正方形等于CG、GF上的正方形之和；

[I. 47]

因此，矩形AE、EC与FE上的正方形之和等于FC上的正方形。

而FC等于FB；

因此，矩形AE、EC与EF上的正方形之和等于FB上的正方形。

同理也有，

矩形DE、EB与FE上的正方形之和等于FB上的正方形。

但已证明，矩形AE、EC与FE上的正方形之和等于FB上的正方形；

因此，矩形AE、EC与FE上的正方形之和等于矩形DE、EB与FE上的正方形之和。

从它们中分别减去FE上的正方形；

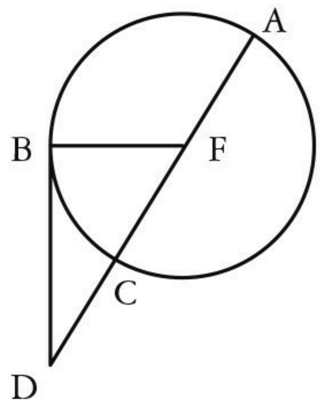
因此，余下的AE、EC所围成的矩形等于DE、EB所围成的矩形。

这就是所要证明的。

命题**36**

若在圆外取一点，从它作两条直线落在圆上，其中一条与圆相截，另一条与圆相切，则与圆相截的整条直线与该点和凸圆周之间的圆外直线所围成的矩形，等于切线上的正方形。

If a point be taken outside a circle and from it there fall on the circle two straight lines, and if one of them cut the circle and the other touch it, the rectangle contained by the whole of the straight line which cuts the circle and the straight line intercepted on it outside between the point and the convex circumference will be equal to the square on the tangent.



在圆ABC外取一点D，从D作两条直线DCA、DB落在圆ABC上；DCA与圆ABC相截，而BD与圆相切；

我说，AD、DC所围成的矩形等于DB上的正方形。

于是，DCA要么过圆心，要么不过圆心。

首先设它过圆心，并设F是圆ABC的圆心；连接FB；

因此，角FBD是直角。

[III. 18]

又，由于AC被二等分于F，CD被加在它之上，所以

矩形AD、DC与FC上的正方形之和等于FD上的正方形。

[II. 6]

但FC等于FB；

因此，矩形AD、DC与FB上的正方形之和等于FD上的正方形。

又，FB、BD上的正方形之和等于FD上的正方形；

[I. 47]

因此，矩形AD、DC与FB上的正方形之和等于FB、BD上的正方形之和。

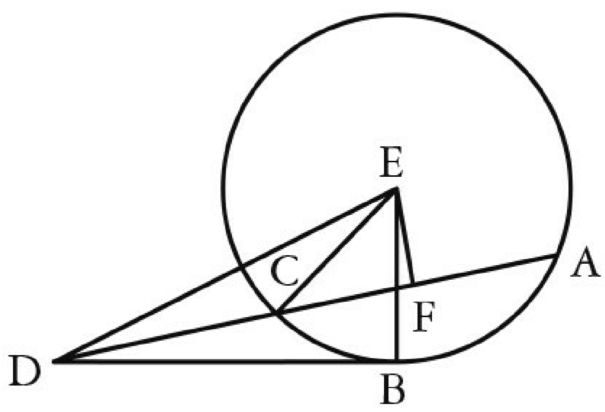
从它们中分别减去FB上的正方形；

因此，余下的矩形AD、DC等于切线DB上的正方形。

又，设DCA不过圆ABC的圆心；

取圆心E，从E作EF垂直于AC；

连接EB、EC、ED。



于是，角EBD是直角。

[III. 18]

又，由于过圆心的直线EF与不过圆心的直线AC交成直角，所以

EF也将AC二等分；

[III. 3]

因此，AF等于FC。

现在，由于直线AC被二等分于点F，CD被加在它之上，所以

AD、DC所围成的矩形与FC上的正方形之和等于FD上的正方形。

[II. 6]

给它们分别加上FE上的正方形；

因此，矩形AD、DC与CF、FE上的正方形之和等于FD、FE上的正方形之和。

但EC上的正方形等于CF、FE上的正方形之和，这是因为角EFC是直角；

[I. 47]

而ED上的正方形等于DF、FE上的正方形之和；

因此，矩形AD、DC与EC上的正方形之和等于ED上的正方形。

而EC等于EB；

因此，矩形AD、DC与EB上的正方形之和等于ED上的正方形。

但EB、BD上的正方形之和等于ED上的正方形，这是因为角EBD是直角；

[I. 47]

因此，矩形AD、DC与EB上的正方形之和等于EB、BD上的正方形之和。

从它们中分别减去EB上的正方形；

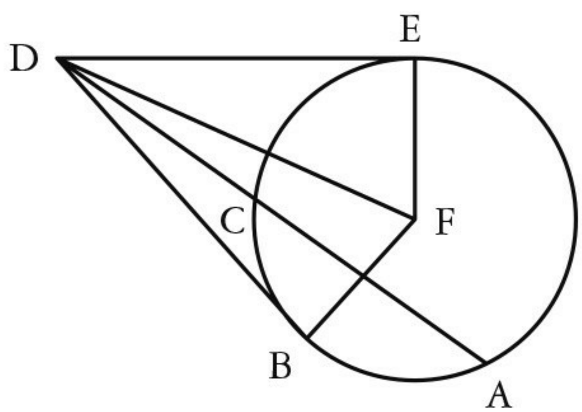
因此，余下的矩形AD、DC等于DB上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**37**

若在圆外取一点，从它作两条直线落在圆上，其中一条与圆相截，另一条落在圆上，若与圆相截的整条直线与该点和凸圆周之间的圆外直线所围成的矩形等于落在圆上的直线上的正方形，则落在圆上的直线与圆相切。

If a point be taken outside a circle and from the point there fall on the circle two straight lines, if one of them cut the circle, and the other fall on it, and if further the rectangle contained by the whole of the straight line which cuts the circle and the straight line intercepted on it outside between the point and the convex circumference be equal to the square on the straight line which falls on the circle, the straight line which falls on it will touch the circle.



设在圆ABC外取一点D；从D作两条直线DCA、DB落在圆ACB上；

设DCA与圆相截，DB落在圆上；又设矩形AD、DC等于DB上的正方形。

我说，DB与圆ABC相切。

这是因为，作DE与圆ABC相切；

取圆ABC的圆心，设它为F；

连接FE、FB、FD。

于是，角FED是直角。

[III. 18]

现在，由于DE与圆ABC相切，DCA与圆相截，所以矩形AD、DC等于DE上的正方形。

[III. 36]

但矩形AD、DC也等于DB上的正方形；

因此，DE上的正方形等于DB上的正方形；

因此，DE等于DB。

而FE等于FB；

因此，两边DE、EF等于两边DB、BF；

而FD是三角形的公共底；

因此，角DEF等于角DBF。

[I. 8]

但角DEF是直角；

因此，角DBF也是直角。

将BF延长为一直径；

而从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线与圆相切；

[III. 16，推论]

因此，DB与圆相切。

类似地，可以证明，即使圆心在AC上，情况也是如此。

这就是所要证明的。

第四卷

定义 **Definitions**

01 / 当一直线形的各角分别位于另一直线形的各边上时，则称这一直线形内接于后一直线形。

A rectilineal figure is said to be *inscribed in a rectilineal figure* when the respective angles of the inscribed figure lie on the respective sides of that in which it is inscribed.

02 / 类似地，当一个图形的各边经过另一图形的各角时，则称前一图形外接于后一图形。

Similarly a figure is said to be *circumscribed about a figure* when the respective sides of the circumscribed figure pass through the respective angles of that about which it is circumscribed.

03 / 当一直线形的每个角都位于一个圆的圆周上时，则称这一直线形内接于圆。

A rectilineal figure is said to be *inscribed in a circle* when each angle of the inscribed figure lies on the circumference of the circle.

04 / 当一直线形的每条边都与一个圆的圆周相切时，则称这一直线形外切于圆。

A rectilineal figure is said to be *circumscribed about a circle*, when each side

of the circumscribed figure touches the circumference of the circle.

05 / 类似地，当一个圆的圆周与一个图形的每条边相切时，则称这个圆内切于这个图形。

Similarly a circle is said to be *inscribed in a figure* when the circumference of the circle touches each side of the figure in which it is inscribed.

06 / 当一个圆的圆周经过一个图形的每个角时，则称这个圆外接于这个图形。

A circle is said to be *circumscribed about a figure* when the circumference of the circle passes through each angle of the figure about which it is circumscribed.

07 / 当一直线的端点在一个圆的圆周上时，则称这一直线被纳入这个圆。

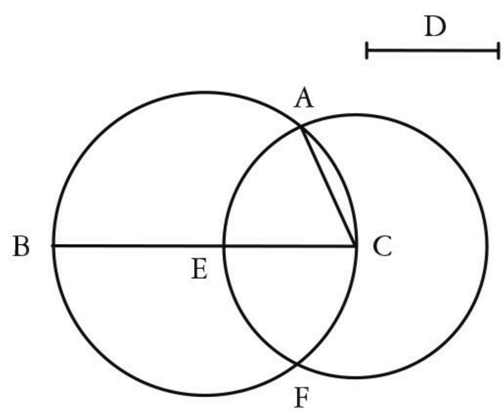
A straight line is said to be *fitted into a circle* when its extremities are on the circumference of the circle.

命题 **Proposition**

命题**01**

将一条等于给定直线的直线纳入一个给定的圆，此给定直线不大于圆的直径。

Into a given circle to fit a straight line equal to a given straight line which is not greater than the diameter of the circle.



设ABC是给定的圆，D是不大于该圆直径的给定直线；

于是，要求将一条等于直线D的直线纳入圆ABC。

作圆ABC的直径BC。

于是，如果BC等于D，那么所要求的就已经作出了；因为等于直线D的BC已经被纳入圆ABC。

但如果BC大于D，取CE等于D，

以C为圆心、以CE为距离作圆EAF；

连接CA。

于是，由于点C是圆EAF的圆心，所以

CA等于CE。

但CE等于D；

因此，D也等于CA。

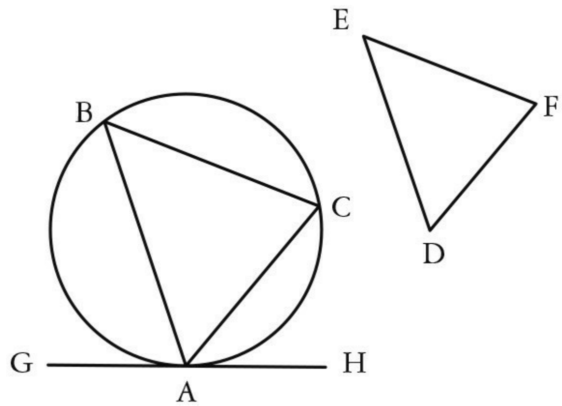
这样便将一条等于给定直线D的直线CA纳入了给定的圆ABC。

这就是所要作的。

命题**02**

作给定圆的内接三角形与给定的三角形等角。

In a given circle to inscribe a triangle equiangular with a given triangle.



设ABC是给定的圆，DEF是给定的三角形；

于是，要求作圆ABC的内接三角形使之与三角形DEF等角。

在点A处作GH与圆ABC相切；

[III. 16 推论]

在直线AH上的点A作角HAC等于角DEF，

在直线AG上的点A作角GAB等于角DFE；

[I. 23]

连接BC。

于是，由于直线AH与圆ABC相切，

且从切点A在圆内作直线AC与圆相截，

因此，角HAC等于另一弓形上的角ABC。

[III. 32]

但角HAC等于角DEF；

因此，角ABC也等于角DEF。

同理，

角ACB也等于角DFE；

因此，余下的角BAC也等于余下的角EDF。

[I. 32]

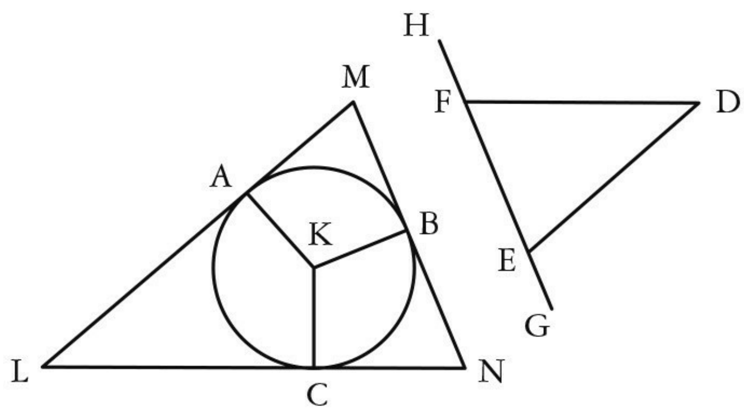
这样便作出了给定圆的内接三角形与给定的三角形等角。

这就是所要作的。

命题**03**

作给定圆的外切三角形与给定的三角形等角。

About a given circle to circumscribe a triangle equiangular with a given triangle.



设ABC是给定的圆，DEF是给定的三角形，

于是，要求作圆ABC的外切三角形与三角形DEF等角。

沿两个方向将EF延长到点G、H，

取圆ABC的圆心K，

[III. 1]

作任意直线KB与圆相截；

在直线KB上的点K作角BKA等于角DEG，

且角BKC等于角DFH；

[I. 23]

过点A、B、C作LAM、MBN、NCL与圆ABC相切。

现在，由于LM、MN、NL与圆ABC相切于点A、B、C，

而KA、KB、KC是从圆心K到点A、B、C的连线，

因此，点A、B、C处的角是直角。

[III. 18]

又，由于四边形AMBK的四个角之和等于四直角，因为AMBK事实上可以分成两个三角形，

且角KAM、KBM是直角，

因此，余下的角AKB、AMB之和等于两直角。

而角DEG、DEF之和也等于两直角；

[I. 13]

因此，角AKB、AMB之和等于角DEG、DEF之和，

其中角AKB等于角DEG；

因此，余下的角AMB等于余下的角DEF。

类似地，可以证明，角LNB也等于角DFE；

因此，余下的角MLN等于角EDF。

[I. 32]

因此，三角形LMN与三角形DEF等角；

且它外切于圆ABC。

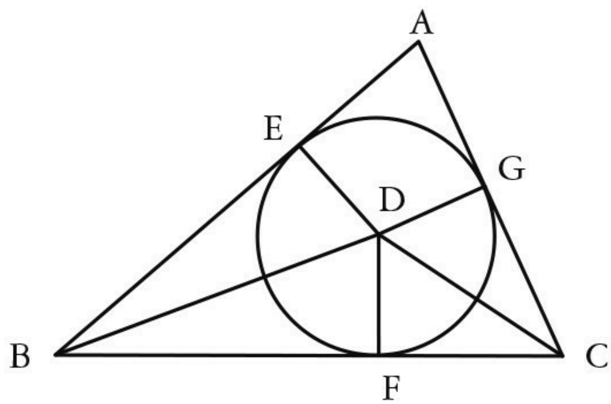
这样便作出了给定圆的外切三角形与给定的三角形等角。

这就是所要作的。

命题**04**

作给定三角形的内切圆。

In a given triangle to inscribe a circle.



设ABC是给定的三角形；

于是，要求作三角形ABC的内切圆。

设角ABC、ACB分别被直线BD、CD二等分，

[I. 9]

且BD、CD相交于点D；

从D作DE、DF、DG垂直于直线AB、BC、CA。

现在，由于角ABD等于角CBD，

且直角BED等于直角BFD，所以

EBD、FBD这两个三角形中有两个角等于两个角，有一边等于一边，即一个等角的对边，就是两三角形公用的边BD；

因此，其余的边也等于其余的边；

[I. 26]

因此，DE等于DF。

同理，

DG也等于DF。

因此，三条直线DE、DF、DG彼此相等；

因此，以D为圆心，以DE、DF、DG之一为距离所作的圆会经过其余的点，并与直线AB、BC、CA相切，这是因为点E、F、G处的角是直角。

事实上，如果圆不与这些直线相交，那么从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线就会落在圆内：

已经证明，这是荒谬的；

[III. 16]

因此，以D为圆心，以直线DE、DF、DG之一为距离所作的圆不会与直线AB、BC、CA相截。

因此，与它们相切的圆，即是三角形ABC的内切圆。

[IV. 定义5]

设内切圆是FGE。

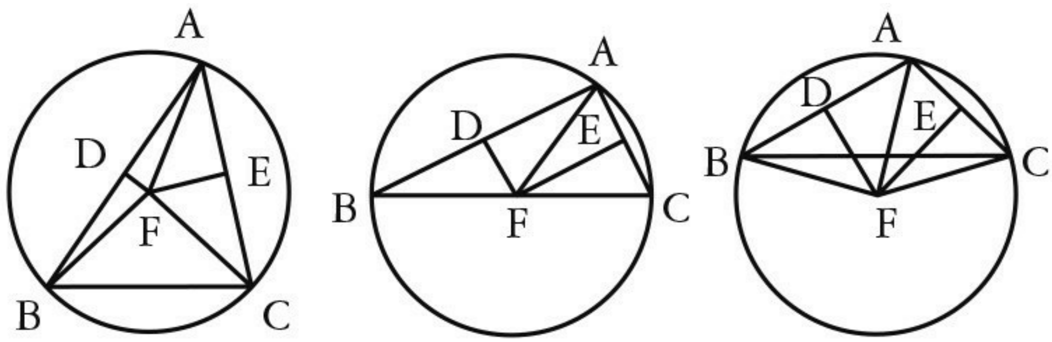
这样便作出了给定三角形ABC的内切圆EFG。

这就是所要作的。

命题**05**

作给定三角形的外接圆。

About a given triangle to circumscribe a circle.



图一　图二　图三

设ABC是给定的三角形；

于是，要求作给定的三角形ABC的外接圆。

设直线AB、AC被二等分于点D、E，

[I. 10]

从点D、E作DF、EF与AB、AC成直角；

它们交于三角形ABC内、直线BC上或BC之外。

首先，设它们交于三角形内的F，连接FB、FC、FA如图一。

于是，由于AD等于DB，

且DF公用，又成直角，

因此，底AF等于底FB。

[I. 4]

类似地，可以证明，CF也等于AF；

因此，FB也等于FC；

因此，三直线FA、FB、FC彼此相等。

因此，以F为圆心，以直线FA、FB、FC之一为距离所作的圆也经过其余的点，这个圆外接于三角形ABC。

设这个外接圆是ABC。

其次，设DF、EF交于直线BC上的F，如图二；连接AF。

于是，类似地可以证明，点F是三角形ABC外接圆的圆心。

最后，设DF、EF交于三角形外部的F，如图三；连接AF、BF、CF。

于是同样，由于AD等于DB，

且DF公用，又成直角；

因此，底AF等于底BF。

[I. 4]

类似地，可以证明，CF也等于AF；

因此，BF也等于FC；

因此，以F为圆心，以直线FA、FB、FC之一为距离所作的圆也经过其余的点，这个圆外接于三角形ABC。

这样便作出了给定三角形的外接圆。

这就是所要作的。

显然，当圆心落在三角形内时，角BAC在一个大于半圆的弓形中，它小于一直角；

当圆心落在直线BC上时，角BAC在一个半圆中，是直角；

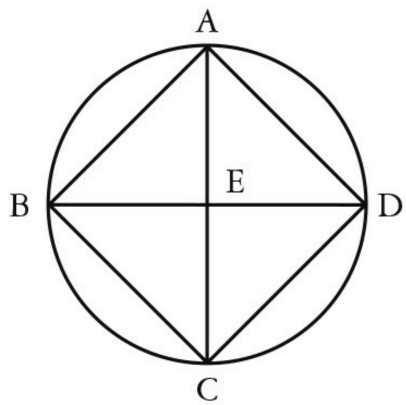
当圆心落在三角形外时，角BAC在一个小于半圆的弓形中，它大于一直角。

[III. 31]

命题**06**

作给定圆的内接正方形。

In a given circle to inscribe a square.



设ABCD是给定的圆；

于是，要求作圆ABCD的内接正方形。

作圆ABCD的两条直径AC、BD彼此成直角，连接AB、BC、CD、DA，

于是，由于E是圆心，BE等于ED，EA公用且与它们成直角，所以

底AB等于底AD。

[I. 4]

同理，

直线BC、CD中的每一条等于直线AB、AD中的每一条；

因此，四边形ABCD是等边的。

其次我说，它是直角的。

这是因为，由于直线BD是圆ABCD的直径，

因此，BAD是半圆；

因此，角BAD是直角。

[III. 31]

同理，

角ABC、BCD、CDA中的每一个也是直角；

因此，四边形ABCD是直角的。

但已证明，它是等边的；

因此，它是一个正方形；

[I. 定义22]

且内接于圆ABCD。

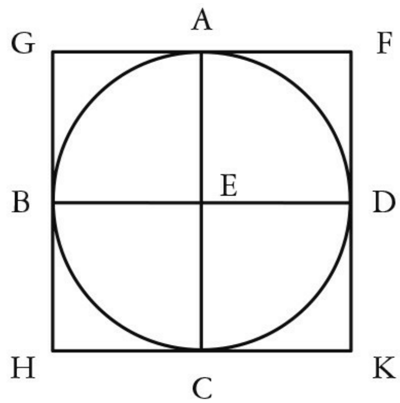
这样便作出了给定圆的内接正方形ABCD。

这就是所要作的。

命题**07**

作给定圆的外切正方形。

About a given circle to circumscribe a square.



设ABCD是给定的圆；

于是，要求作圆ABCD的外切正方形。

作圆ABCD的两条直径AC、BD彼此成直角，过点A、B、C、D作FG、GH、HK、KF与圆ABCD相切。

[III. 16 推论]

于是，由于FG与圆ABCD相切，

从圆心E到切点A连接成EA，所以

A处的角是直角。

[III. 18]

同理，

点B、C、D处的角也是直角。

现在，由于角AEB是直角，

且角EBG也是直角，

因此，GH平行于AC。

[I. 28]

同理，

AC也平行于FK，

因此，GH也平行于FK。

[I. 30]

类似地，可以证明，

直线GF、HK中的每一条都平行于BED。

因此，GK、GC、AK、FB、BK是平行四边形；

因此，GF等于HK，GH等于FK。

[I. 34]

又，由于AC等于BD，

且AC也等于直线GH、FK中的每一条，

而BD等于直线GF、HK中的每一条，

[I. 34]

因此，四边形FGHK是等边的。

其次我说，它也是直角的。

这是因为，由于GBEA是平行四边形，

且角AEB是直角，

因此，角AGB也是直角。

[I. 34]

类似地，可以证明，

H、K、F处的角也是直角。

因此，FGHK是直角的。

但已证明，它是等边的；

因此，它是一个正方形；

且外切于圆ABCD。

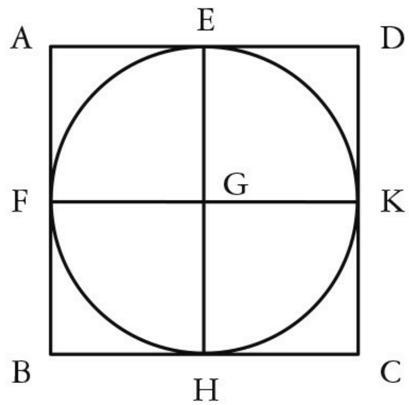
这样便作出了给定圆的外切正方形。

这就是所要作的。

命题**08**

作给定正方形的内切圆。

In a given square to inscribe a circle.



设ABCD是给定的正方形；

于是，要求作给定正方形ABCD的内切圆。

设直线AD、AB分别被二等分于点E、F，

[I. 10]

过E作EH平行于AB或CD，过F作FK平行于AD或BC；

[I. 31]

因此，图形AK、KB、AH、HD、AG、GC、BG、GD中的每一个都是平行四边形，它们的对边显然相等。

[I. 34]

现在，由于AD等于AB，

且AE是AD的一半，AF是AB的一半，

因此，AE等于AF，

因此，对边也相等；

因此，FG等于GE。

类似地，可以证明，直线GH、GK中的每一个等于直线FG、GE中的每一个；

因此，四条直线GE、GF、GH、GK彼此相等。

因此，以G为圆心，以直线GE、GF、GH、GK之一为距离所作的圆也经过其余各点。

又，它与直线AB、BC、CD、DA相切，这是因为E、F、H、K处的角是直角。

这是因为，若这个圆与AB、BC、CD、DA相截，则从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线落在圆内：

已经证明这是荒谬的；

[III. 16]

因此，以G为圆心，以直线GE、GF、GH、GK之一为距离所作的圆不会与直线AB、BC、CD、DA相截。

因此，这个圆与它们相切，即内切于正方形ABCD。

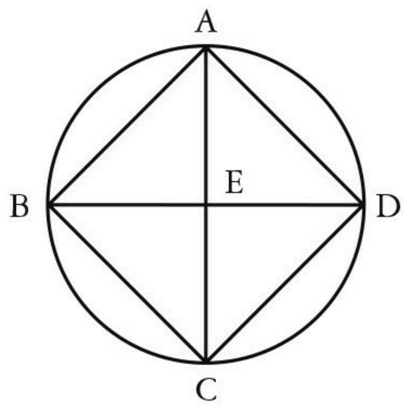
这样便作出了给定正方形的内切圆。

这就是所要作的。

命题**09**

作给定正方形的外接圆。

About a given square to circumscribe a circle.



设ABCD是给定的正方形；

于是，要求作给定正方形ABCD的外接圆。

连接AC、BD，设它们交于E。

于是，由于DA等于AB，且AC公用，

因此，两边DA、AC等于两边BA、AC；

而底DC等于底BC；

因此，角DAC等于角BAC。

[I. 8]

因此，角DAB被AC二等分。

类似地，可以证明，角ABC、BCD、CDA中的每一个被直线AC、DB二等分。

现在，由于角DAB等于角ABC，

且角EAB是角DAB的一半，

角EBA是角ABC的一半，

因此，角EAB也等于角EBA；

因此，边EA也等于边EB。

[I. 6]

类似地，可以证明，直线EA、EB中的每一个等于直线EC、ED中的每一个。

因此，四条直线EA、EB、EC、ED彼此相等。

因此，以E为圆心，以直线EA、EB、EC、ED之一为距离所作的圆也会经过其余各点；

它外接于正方形ABCD。

设外接圆是ABCD。

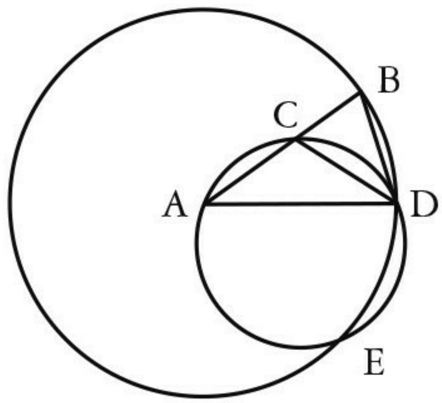
这样便作出了给定正方形的外接圆。

这就是所要作的。

命题**10**

作一个等腰三角形，使它的每一个底角都是顶角的二倍。

To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the remaining one.



任取一条直线AB，设它被点C所截，使得AB、BC所围成的矩形等于CA上的正方形；

[II. 11]

以A为圆心、AB为距离作圆BDE，

将等于直线AC的直线BD纳入圆BDE，使它不大于圆BDE的直径。

[IV. 1]

连接AD、DC，设圆ACD外接于三角形ACD。

[IV. 5]

于是，由于矩形AB、BC等于AC上的正方形，

且AC等于BD，

因此，矩形AB、BC等于BD上的正方形。

又，由于点B取在圆ACD外，

从B作两条直线BA、BD落在圆ACD上，其中一条与圆相截，另一条落在圆上，

而矩形AB、BC等于BD上的正方形，

因此，BD与圆ACD相切。

[III. 37]

于是，由于BD与它相切，DC是从切点D作的与圆相截的直线，

因此，角BDC等于另一弓形上的角DAC。

[III. 32]

于是，由于角BDC等于角DAC，

给它们分别加上角CDA；

因此，整个角BDA等于两角CDA、DAC之和。

但外角BCD等于角CDA、DAC之和；

[I. 32]

因此，角BDA也等于角BCD。

而角BDA等于角CBD，这是因为边AD也等于AB；

[I. 5]

因此，角DBA也等于角BCD。

因此，三个角BDA、DBA、BCD彼此相等。

又，由于角DBC等于角BCD，所以

边BD也等于边DC。

[I. 6]

但根据假设，BD等于CA；

因此，CA也等于CD，

因此，角CDA也等于角DAC；

[I. 5]

因此，角CDA、DAC之和是角DAC的二倍。

但角BCD等于角CDA、DAC之和；

因此，角BCD也是角CAD的二倍。

但角BCD等于角BDA、DBA中的每一个；

因此，角BDA、DBA中的每一个也是角DAB的二倍。

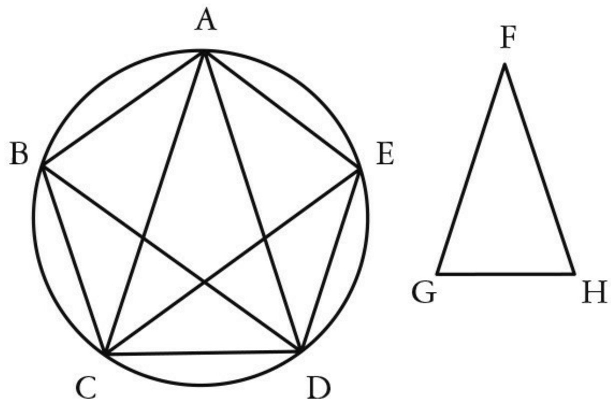
这样我们便作出了等腰三角形ABD，它在底DB处的每一个角都等于顶角的二倍。

这就是所要作的。

命题**11**

作给定圆的内接等边等角五边形。

In a given circle to inscribe an equilateral and equiangular pentagon.



设ABCDE是给定的圆；

于是，要求作圆ABCDE的内接等边等角五边形。

设等腰三角形FGH在G、H处的每一个角都是F处角的二倍；

[IV. 10]

在圆ABCDE中作一个与三角形FGH等角的内接三角形ACD，使得角CAD等于F处的角，且G、H处的角分别等于角ACD、CDA；

[IV. 2]

因此，角ACD、CDA中的每一个也分别是角CAD的二倍。

现在，设角ACD、CDA分别被直线CE、DB二等分，

[I. 9]

连接AB、BC、DE、EA。

于是，由于角ACD、CDA是角CAD的二倍，

且它们被直线CE、DB二等分，

因此，五个角DAC、ACE、ECD、CDB、BDA彼此相等。

但等角对着相等的圆周；

[III. 26]

因此，五段圆周AB、BC、CD、DE、EA彼此相等。

但相等的圆周对着相等的直线；

[III. 29]

因此，五条直线AB、BC、CD、DE、EA彼此相等；

因此，五边形ABCDE是等边的。

其次我说，它也是等角的。

这是因为，由于圆周AB等于圆周DE，给它们分别加上BCD；

因此，整个圆周ABCD等于整个圆周EDCB。

又，角AED是圆周ABCD所对的，角BAE是圆周EDCB所对的；

因此，角BAE也等于角AED。

[III. 27]

同理，

角ABC、BCD、CDE中的每一个也等于角BAE、AED中的每一个；

因此，五边形ABCDE是等角的。

但已证明，它是等边的；

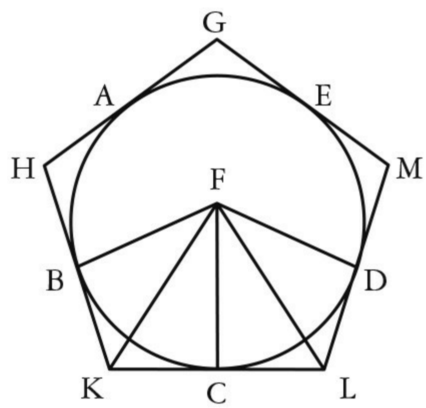
这样便作出了给定圆的内接等边等角五边形。

这就是所要作的。

命题**12**

作给定圆的外切等边等角五边形。

About a given circle to circumscribe an equilateral and equiangular pentagon.



设ABCDE是给定的圆；

于是，要求作圆ABCDE的外切等边等角五边形。

设A、B、C、D、E是内接五边形的顶点，于是圆周AB、BC、CD、DE、EA相等；

[IV. 11]

过A、B、C、D、E作GH、HK、KL、LM、MG与圆相切；

[III. 16，推论]

取圆ABCDE的圆心F，

[III. 1]

连接FB、FK、FC、FL、FD。

于是，由于直线KL与圆ABCDE相切于C，

从圆心F到切点C连成直线FC，

因此，FC垂直于KL；

[III. 18]

因此，C处的每个角都是直角。

同理，

点B、D处的角也是直角。

又，由于角FCK是直角，

因此，FK上的正方形等于FC、CK上的正方形之和。

[I. 47]

同理，

FK上的正方形也等于FB、BK上的正方形之和；

因此，FC、CK上的正方形之和等于FB、BK上的正方形之和，

其中FC上的正方形等于FB上的正方形；

因此，余下的CK上的正方形等于BK上的正方形。

因此，BK等于CK。

又，由于FB等于FC，

且FK公用，

两边BF、FK等于两边CF、FK；且底BK等于底CK；

因此，角BFK等于角KFC，

[I. 8]

且角BKF等于角FKC。

因此，角BFC是角KFC的二倍，

且角BKC是角FKC的二倍。

同理，

角CFD也是角CFL的二倍，

且角DLC也是角FLC的二倍。

现在，由于圆周BC等于CD，所以

角BFC也等于角CFD。

[III. 27]

而角BFC是角KFC的二倍，角DFC是角LFC的二倍；

因此，角KFC也等于角LFC。

又，角FCK也等于角FCL；

因此，三角形FKC的两个角分别等于三角形FLC的两个角，且前者的一边等于后者的一边，即它们公用的边FC；

因此，它们其余的边也等于其余的边，其余的角也等于其余的角。

[I. 26]

因此，直线KC等于CL，

角FKC等于角FLC。

又，由于KC等于CL，

因此，KL是KC的二倍。

同理，可以证明，

HK也是BK的二倍。

而BK等于KC；

因此，HK也等于KL。

类似地，也可以证明，直线HG、GM、ML中的每一条等于直线HK、KL中的每一条；

因此，五边形GHKLM是等边的。

其次我说，它也是等角的。

这是因为，由于角FKC等于角FLC，

且已证明，角HKL是角FKC的二倍，

角KLM是角FLC的二倍，

因此，角HKL也等于角KLM。

类似的，也可证明，角KHG、HGM、GML中的每一个也等于角HKL、KLM中的每一个；

因此，五个角GHK、HKL、KLM、LMG、MGH彼此相等。

因此，五边形GHKLM是等角的。

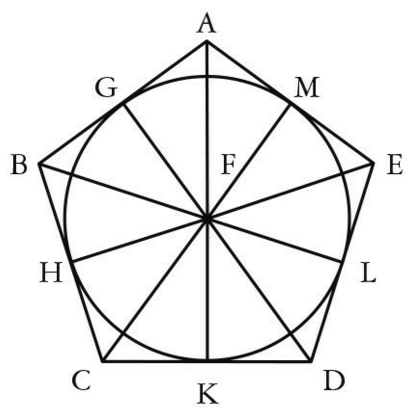
前已证明它是等边的；这样便作出了圆ABCDE的外切等边等角五边形。

这就是所要作的。

命题**13**

作给定等边等角五边形的内切圆。

In a given pentagon, which is equilateral and equiangular, to inscribe a circle.



设ABCDE是给定的等边等角五边形；

于是，要求作五边形ABCDE的内切圆。

分别用直线CF、DF将角BCD、CDE二等分，且直线CF、DF相交于点F，连接直线FB、FA、FE。

于是，由于BC等于CD，且CF公用，所以

两边BC、CF等于两边DC、CF；

而角BCF等于角DCF；

因此，底BF等于底DF，

三角形BCF等于三角形DCF，

且其余的角等于其余的角，即等边所夹的那些角。

[I. 4]

因此，角CBF等于角CDF。

又，由于角CDE是角CDF的二倍，且角CDE等于角ABC，而角CDF等于角CBF，

因此，角CBA也是角CBF的二倍；

因此，角ABF等于角FBC；

因此，角ABC被直线BF二等分。

类似地可以证明，角BAE、AED也分别被直线FA、FE二等分。

现在，从点F作FG、FH、FK、FL、FM垂直于直线AB、BC、CD、DE、EA。

于是，由于角HCF等于角KCF，直角FHC也等于角FKC，所以FHC、FKC是有两个角等于两个角且一条边等于一条边的两个三角形，即FC是它们的公共边，并且是一个等角所对的边；

因此，它们其余的边也等于其余的边；

[I. 26]

因此，垂线FH等于垂线FK。

类似地可以证明，直线FL、FM、FG中的每一条也等于直线FH、FK中的每一条；

因此，五条直线FG、FH、FK、FL、FM彼此相等。

因此，以F为圆心，以直线FG、FH、FK、FL、FM之一为距离所作的圆也经过其余各点；而且必定与直线AB、BC、CD、DE、EA相切，因为点G、H、K、L、M处的角都是直角。

这是因为，如果不与之相切，而是与之相截，那么会推出，从圆的直径的端点所作的与直径成直角的直线会落在圆内：而我们已经证明，这是荒谬的。

[III. 16]

因此，以F为圆心，以直线FG、FH、FK、FL、FM之一为距离所作的圆不会与直线AB、BC、CD、DE、EA相截；

因此，它与之相切。

设所作的圆是GHKLM。

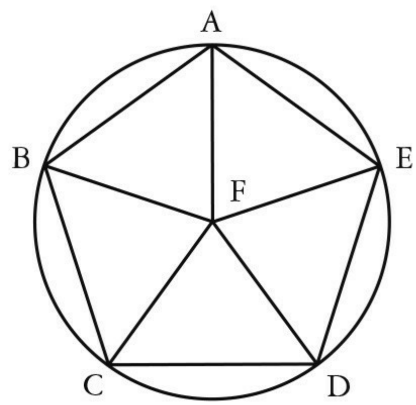
这样便在给定的等边等角五边形内作出了内切圆。

这就是所要作的。

命题**14**

作给定等边等角五边形的外接圆。

About a given pentagon, which is equilateral and equiangular, to circumscribe a circle.



设ABCDE是给定的等边等角五边形；

于是，要求作五边形ABCDE的外接圆。

设角BCD、CDE分别被直线CF、DF二等分，从两直线的交点F作直线FB、FA、FE与点B、A、E相连。

于是，按照与前面类似的方式可以证明，角CBA、BAE、AED也分别被直线FB、FA、FE二等分。

现在，由于角BCD等于角CDE，

而角FCD是角BCD的一半，

角CDF是角CDE的一半，

因此，角FCD也等于角CDF，

因此，边FC也等于边FD。

[I. 6]

类似地，可以证明，直线FB、FA、FE中的每一条也等于直线FC、FD中的每一条；

因此，五条直线FA、FB、FC、FD、FE彼此相等。

因此，以F为圆心，以FA、FB、FC、FD、FE之一为距离所作的圆也会经过其余的点，并且是外接的。

设这个外接圆是ABCDE。

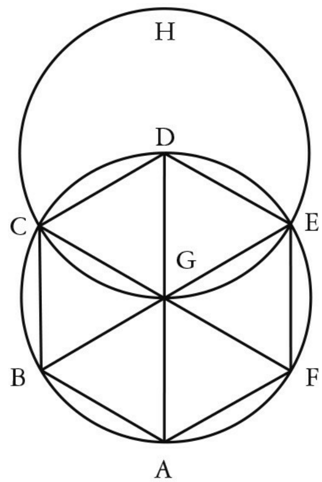
这样便作出了给定等边等角五边形的外接圆。

这就是所要作的。

命题**15**

作给定圆的等边等角内接六边形。

In a given circle to inscribe an equilateral and equiangular hexagon.



设ABCDEF是给定的圆；

于是，要求作圆ABCDEF的等边等角内接六边形。

作圆ABCDEF的直径AD；

取圆的圆心G，以D为圆心、DG为距离作圆EGCH；

连接EG、CG，并延长到点B、F，

连接AB、BC、CD、DE、EF、FA。

我说，六边形ABCDEF是等边等角的。

这是因为，由于点G是圆ABCDEF的圆心，所以

GE等于GD。

又，由于点D是圆GCH的圆心，所以

DE等于DG。

但已证明，GE等于GD；

因此，GE也等于ED；

因此，三角形EGD是等边的；

因此，它的三个角EGD、GDE、DEG彼此相等，这是因为在等腰三角形中，两底角彼此相等。

[I. 5]

而三角形的三个角之和等于两直角；

[I. 32]

因此，角EGD是两直角的三分之一。

类似地，也可证明，角DGC是两直角的三分之一。

又，由于直线CG与EB所成的邻角EGC、CGB之和等于两直角，

因此，其余的角CGB也是两直角的三分之一。

因此，角EGD、DGC、CGB彼此相等；

因此，它们的对顶角BGA、AGF、FGE相等。

[I. 15]

因此，六个角EGD、DGC、CGB、BGA、AGF、FGE彼此相等。

但等角对着相等的圆周；

[III. 26]

因此，六个圆周AB、BC、CD、DE、EF、FA彼此相等。

而相等的圆周对着相等的直线；

[III. 29]

因此，六条直线彼此相等；

因此，六边形ABCDEF是等边的。

其次我说，它也是等角的。

这是因为，由于圆周FA等于圆周ED，

给它们分别加上圆周ABCD；

因此，整个FABCD等于整个EDCBA；

而角FED在圆周FABCD上，

角AFE在圆周EDCBA上；

因此，角AFE等于角DEF。

[III. 27]

类似地，可以证明，六边形ABCDEF其余的角也分别等于角AFE、FED中的每一个；

因此，六边形ABCDEF是等角的。

但已证明，它也是等边的；

且它内接于圆ABCDEF。

这样便作出了给定圆的等边等角内接六边形。

这就是所要作的。

推论 由此显然可得，此六边形的边等于圆的半径。

以和五边形的情况类似的方式，如果过圆上的分点作圆的切线，会得到此圆的一个等边等角外切六边形，这与在五边形的情况下所给出的解释是一致的。

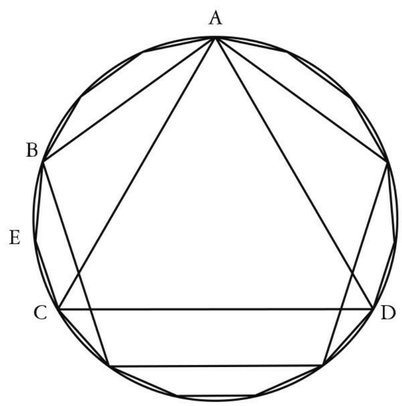
此外，按照与在五边形的情况下所给出的解释类似的方式，我们可以作出给定六边形的内切圆和外接圆。

这就是所要作的。

命题**16**

作给定圆的等边等角内接十五角形。

In a given circle to inscribe a fifteen-angled figure which shall be both equilateral and equiangular.



设ABCD是给定的圆；

于是，要求作圆ABCD的等边等角内接十五角形。

设AC是圆ABCD的内接等边三角形的一边，AB是等边五边形的一边；

因此，在圆ABCD内相等的十五条线段中，本身是此圆三分之一的圆周ABC中有五条，本身是此圆五分之一的圆周AB中有三条；

因此，余下的BC中有两条相等的线段。

设圆周BC被二等分于E；

[III. 30]

因此，圆周BE、EC中的每一个都是圆ABCD的十五分之一。

因此，如果连接BE、EC，并将等于它们的临近直线纳入圆ABCD，即可作出内接于它的等边等角十五角形。

这就是所要作的。

推论　以和五边形的情况类似的方式，如果过圆上的分点作圆的切线，会得到此圆的一个等边等角外切十五边形。

此外，按照与在五边形的情况下类似的证明，我们可以作出给定十五角形的内切圆与外接圆。

第五卷

定义 **Definitions**

01 / 当较小量量尽较大量时，较小量是较大量的一个部分。

A magnitude is a *part* of a magnitude, the less of the greater, when it measures the greater.

02 / 当较大量被较小量量尽时，较大量是较小量的一个倍量。

The greater is a *multiple* of the less when it is measured by the less.

03 / 比是两个同类量之间的一种大小关系。

A *ratio* is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind.

04 / 若把一个量若干倍以后大于另一个量，则称这两个量彼此之间有一个比。

Magnitudes are said to *have a ratio* to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.

05 / 若对第一个量与第三个量取任意相同的倍数，又对第二个量与第四个量取任意相同的倍数，而第一倍量依次大于、等于或小于第二倍量时，第三倍量便依次大于、等于或小于第四倍量，则称第一个量比第二个量与第三个量比第四个量有相同的比。

Magnitudes are said to be *in the same ratio*, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.

06 / 有相同比的四个量叫做成比例的。

Let magnitudes which have the same ratio be called *proportional*.

07 / 第一、第三个量取相同的倍数，第二、第四个量取另一相同的倍数，当第一个量的倍量大于第二个量的倍量，但第三个量的倍量不大于第四个量的倍量时，则称第一个量比第二个量大于第三个量比第四个量。

When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to *have a greater ratio* to the second than the third has to the fourth.

08 / 一个比例至少有三项。

A proportion in three terms is the least possible.

09 / 当三个量成比例时，称第一个量比第三个量是第一个量比第二个量的二倍比。

When three magnitudes are proportional, the first is said to have to the third the *duplicate ratio* of that which it has to the second.

10 / 当四个量成[连][1]比例时，称第一个量比第四个量是第一个量比第二个量的三倍比，依此类推，不论比例如何。

When four magnitudes are [continuously] proportional, the first is said to have to the fourth the *triplicate ratio* of that which it has to the second, and so on continually, whatever be the proportion.

11 / 称前项是前项的对应量，后项是后项的对应量。

The term *corresponding magnitudes* is used of antecedents in relation to antecedents, and of consequents in relation to consequents.

12 / 更比例指前项比前项且后项比后项。[2]

Alternate ratio means taking the antecedent in relation to the antecedent and the consequent in relation to the consequent.

13 / 反比例指后项作前项比，前项作后项比。[3]

Inverse ratio means taking the consequent as antecedent in relation to the antecedent as consequent.

14 / 合比例指前项与后项之和比后项。[4]

Composition of a ratio means taking the antecedent together with the consequent as one in relation to the consequent by itself.

15 / 分比例指前项与后项之差比后项。[5]

Separation of a ratio means taking the excess by which the antecedent exceeds the consequent in relation to the consequent by itself.

16 / 换比例指前项比前项与后项之差。[6]

Conversion of a ratio means taking the antecedent in relation to the excess by which the antecedent exceeds the consequent.

17 / 有若干个量以及另一组个数与之相等的量，当它们两两成相同的比，第一组量中首量比末量等于第二组中首量比末量时，便产生了首末比例；

或者换句话说，它指的是移除中间项，取两端的项。[7]

A *ratio ex aequali* arises when, there being several magnitudes and another set equal to them in multitude which taken two and two are in the same proportion, as the first is to the last among the first magnitudes, so is the first to the last among the second magnitudes;

Or, in other words, it means taking the extreme terms by virtue of the removal of the intermediate terms.

18 / 有三个量以及另一组个数与之相等的量，当第一组量中的前项比中项等于第二组量中的前项比中项，第一组量中的中项比后项等于第二组量中的后项比前项时，便产生了调动比例。[8]

A *perturbed proportion* arises when, there being three magnitudes and another set equal to them in multitude, as antecedent is to consequent among the first magnitudes, so is antecedent to consequent among the second magnitudes, while, as the consequent is to a third among the first magnitudes, so is a third to the antecedent among the second magnitudes.

---

[1]“连”为希思所加，它在希腊文本中没有对应。当a:b=b:c=c:d时，称a、b、c成“连”比例。（译者注）

[2]若a:b=c:d，则可“更换地”（alternando）得到a:c=b:d，如命题V. 16所证明的。（译者注）

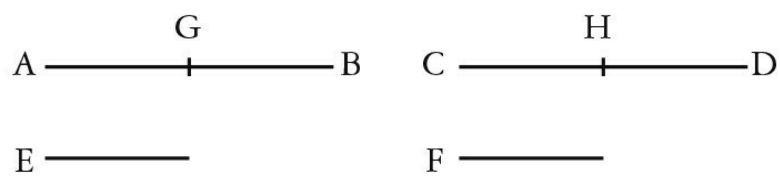
[3]若a:b=c:d，则可“相反地”（invertendo）得到b:a=d:c，如命题V. 7推论所证明的。（译者注）
[4]若a:b=c:d，则可通过复合（componendo）而得到(a+b):b=(c+d):d。见命题V. 17和V. 18。（译者注）
[5]若a:b=c:d，则可通过分离（separando）而得到(a-b):b=(c-d):d。见命题V. 17和V. 18。（译者注）
[6]若a:b=c:d，则可通过转换（convertendo）而得到a:(a-b) =c:(c-d)。见命题V. 19。（译者注）
[7]若a:b=d:e，且b:c=e:f，则可通过等距[ex aequali （distantia）]而得到比例a:c=d:f。按照字面含义，“首末比例”或可译为“等距比例”。（译者注）
[8]若a:b=e:f，且b:c=d:e，则称此时的比例a:c=d:f为调动的。这里，比例a:c=d:f也是通过首末比例而得到的，如命题V. 23所证明的。（译者注）

命题 **Proposition**

命题**01**

若有任意多个量，分别是个数与之相等的量的等倍量，则无论这个倍数是多少，前者之和也是后者之和的等倍量。

If there be any number of magnitudes whatever which are, respectively, equimul-tiples of any magnitudes equal in mul-titude, then, whatever multiple one of the magnitudes is of one, that multiple also will all be of all.



设任意量AB、CD分别是个数与之相等的任意量E、F的等倍量；

我说，AB是E的多少倍，AB、CD之和也是E、F之和的多少倍。

这是因为，由于AB是E的倍量，CD是F的倍量，其倍数相等，因此，AB中有多少个等于E的量，CD中也有多少个等于F的量。

设AB被分成了等于E的量AG、GB，

且CD被分成了等于F的量CH、HD，

于是，量AG、GB的个数等于量CH、HD的个数。

现在，由于AG等于E，CH等于F，

因此，AG等于E，AG、CH之和等于E、F之和。

同理，

GB等于E，且GB、HD之和等于E、F之和；

因此，AB中有多少个等于E的量，AB、CD之和中就有同样多少个等于E、F之和的量。

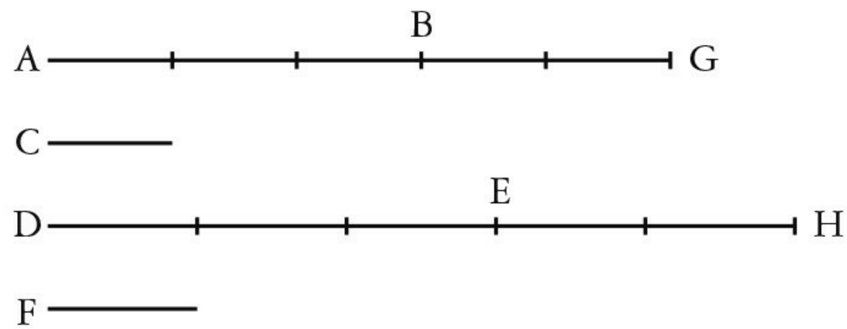
因此，无论AB是E的多少倍，AB、CD之和也是E、F之和的多少倍。

这就是所要证明的。

命题**02**

若第一个量是第二个量的倍量，第三个量是第四个量的倍量，其倍数相等，第五个量是第二个量的倍量，第六个量是第四个量的倍量，其倍数相等，则第一个量与第五个量之和是第二个量的倍量，第三个量与第六个量之和是第四个量的倍量，其倍数相等。

If a first magnitude be the same multiple of a second that a third is of a fourth, and a fifth also be the same multiple of the second that a sixth is of the fourth, the sum of the first and fifth will also be the same multiple of the second that the sum of the third and sixth is of the fourth.



设第一个量AB是第二个量C的倍量，第三个量DE是第四个量F的倍量，其倍数相等；第五个量BG是第二个量C的倍量，第六个量EH是第四个量F的倍量，其倍数相等；

我说，第一个量与第五个量之和AG是第二个量C的倍量，第三个量与第六个量之和DH是第四个量F的倍量，其倍数相等。

这是因为，由于AB是C的倍量，DE是F的倍量，其倍数相等，

因此，AB中有多少个等于C的量，DE中就有多少个等于F的量。

同理，

BG中有多少个等于C的量，EH中就有多少个等于F的量；

因此，整个AG中有多少个等于C的量，整个DH中就有多少个等于F的量。

因此，AG是C的多少倍，DH就是F的多少倍。

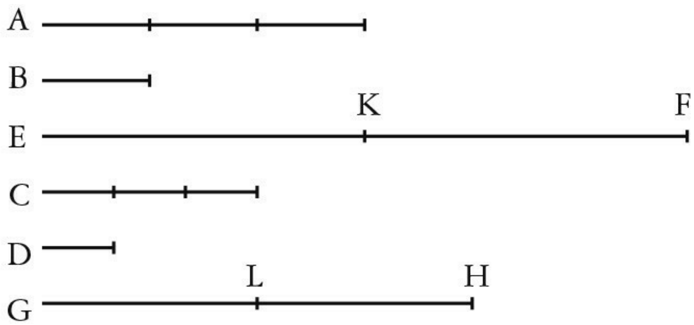
因此，第一个量与第五个量之和AG是第二个量C的倍量，第三个量与第六个量之和DH是第四个量F的倍量，其倍数相等。

这就是所要证明的。

命题**03**

若第一个量是第二个量的倍量，第三个量是第四个量的倍量，其倍数相等，并且取第一个量和第三个量的等倍数，则等倍后的这两个量分别是第二个量和第四个量的倍量，其倍数相等。

If a first magnitude be the same multiple of a second that a third is of a fourth, and if equimultiples be taken of the first and third, then also ex aequali the magnitudes taken will be equimultiples respectively, the one of the second, and the other of the fourth.



设第一个量A是第二个量B的倍量，第三个量C是第四个量D的倍量，其倍数相等，并取A、C的等倍量EF、GH；

我说，EF是B的倍量，GH是D的倍量，其倍数相等。

这是因为，由于EF是A的倍量，GH是C的倍量，其倍数相等，因此，EF中有多少个等于A的量，GH中就有多少个等于C的量。

设EF被分成了等于A的量EK、KF，

GH被分成了等于C的量GL、LH；

于是，量EK、KF的个数等于量GL、LH的个数。

又，由于A是B的倍量，C是D的倍量，其倍数相等，

而EK等于A，GL等于C，

因此，EK是B的倍量，GL是D的倍量，其倍数相等。

同理，

KF是B的倍量，LH是D的倍量，其倍数相等。

于是，由于第一个量EK是第二个量B的倍量，第三个量GL是第四个量D的倍量，其倍数相等，

又，第五个量KF是第二个量B的倍量，第六个量LH是第四个量D的倍量，其倍数也相等，

因此，第一个量与第五个量之和EF是第二个量B的倍量，第三个量与第六个量之和GH是第四个量D的倍量，其倍数相等。

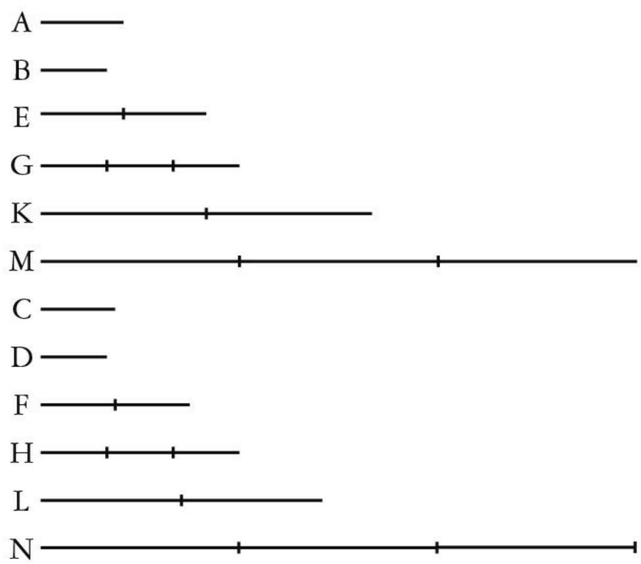
[V. 2]

这就是所要证明的。

命题**04**

若第一个量比第二个量与第二个量比第四个量有相同的比，取第一个量与第二个量的任意等倍量，再取第二个量与第四个量的任意等倍量，则按照相应的顺序它们也有相同的比。

If a first magnitude have to a second the same ratio as a third to a fourth, any equimultiples whatever of the first and third will also have the same ratio to any equimultiples whatever of the second and fourth respectively, taken in corresponding order.



设第一个量A比第二个量B与第三个量C比第四个量D有相同的比；

取A、C的等倍量E、F，

再取B、D的等倍量G、H；

我说，E比G如同F比H。

这是因为，取E、F的等倍量K、L，

再取G、H的等倍量M、N。

由于E是A的倍量，F的是C的倍量，其倍数相等，

且已取E、F的等倍量K、L，

因此，K是A的倍量，L是C的倍量，其倍数相等。

[V. 3]

同理，M是B的倍量，N是D的倍量，其倍数相等。

又，由于A比B如同C比D，

且已取A、C的等倍量K、L，

以及B、D的等倍量M、N，

因此，如果K大于M，那么L也大于N；如果K等于M，那么L也等于N；

如果K小于M，那么L也小于N。

[V. 定义5]

又，由于K、L是E、F的等倍量，

且M、N是G、H的等倍量；

因此，E比G如同F比H。

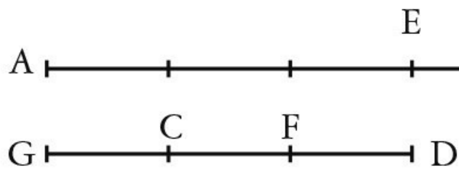
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**05**

若一个量是另一个量的倍量，而第一个量减去的部分是第二个量减去的部分的倍量，其倍数相等，则余量是余量的倍量，整个是整个的倍量，其倍数相等。

If a magnitude be the same multiple of a magnitude that a part subtracted is of a part subtracted, the remainder will also be the same multiple of the remainder that the whole is of the whole.



设量AB是量CD的倍量，减去的部分AE是减去的部分CF的倍量，其倍数相等；

我说，余量EB是余量FD的倍量，整个AB是整个CD的倍量，其倍数相等。

这是因为，AE是CF的多少倍，设EB也是CG的多少倍。

于是，由于AE是CF的倍量，EB是GC的倍量，其倍数相等，

因此，AE是CF的倍量，AB是GF的倍量，其倍数相等。

[V. 1]

但根据假设，AE是CF的倍量，AB是CD的倍量，其倍数相等。

因此，AB是量GF、CD中每一个的倍量，其倍数相等；

因此，GF等于CD。

从它们中分别减去CF；

因此，余量GC等于余量FD。

又，由于AE是CF的倍量，EB是GC的倍量，其倍数相等，

且GC等于DF，

因此，AE是CF的倍量，EB是FD的倍量，其倍数相等。

但根据假设，

AE是CF的倍量，AB是CD的倍量，其倍数相等；

因此，EB是FD的倍量，AB是CD的倍量，其倍数相等。

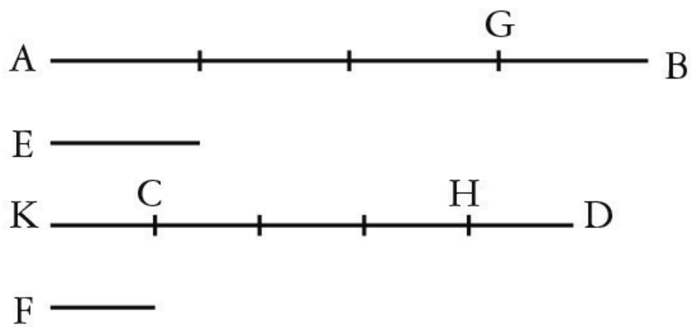
也就是说，余量EB是余量FD的倍量，整个AB是整个CD的倍量，其倍数相等。

这就是所要证明的。

命题**06**

若两个量是另外两个量的等倍量，而且从前两个量中减去后两个量的任何等倍量，则剩余的两个量要么与后两个量相等，要么是它们的等倍量。

If two magnitudes be equimultiples of two magnitudes, and any magnitudes subtracted from them be equimultiples of the same, the remainders also are either equal to the same or equimultiples of them.



设两个量AB、CD是两个量E、F的等倍量，

从前两个量中减去两个量E、F的等倍量AG、CH；

我说，余量GB、HD要么等于E、F，要么是它们的等倍量。

首先设GB等于E；

我说，HD也等于F。

这是因为，作CK等于F。

由于AG是E的倍量，CH是F的倍量，其倍数相等，

而GB等于E，KC等于F，

因此，AB是E的倍量，KH是F的倍量，其倍数相等。

[V. 2]

但根据假设，AB是E的倍量，CD是F的倍量，其倍数相等；

因此，KH是F的倍量，CD是F的倍量，其倍数相等。

于是，由于量KH、CD中的每一个都是F的等倍量，

因此，KH等于CD。

从它们中各减去CH；

因此，余量KC等于余量HD。

但F等于KC；

因此，HD也等于F。

因此，如果GB等于E，那么HD也等于F。

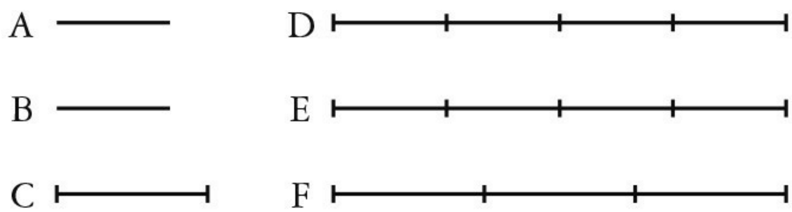
类似地，可以证明，即使GB是E的倍量，HD也是F的等倍量。

这就是所要证明的。

命题**07**

等量比同一个量，其比相同；同一个量比等量，其比相同。

Equal magnitudes have to the same the same ratio, as also has the same to equal magnitudes.



设A、B是等量，C是另一个任意的量。

我说，量A、B中的每一个比量C，其比相同；C比量A、B中的每一个，其比相同。

取A、B的等倍量D、E，

以及取另一个量C的倍量F，

于是，由于D是A的倍量，E是B的倍量，其倍数相等，而A等于B，

因此，D等于E。

但F是另一个任意的量。

因此，如果D大于F，那么E也大于F，

如果D等于F，那么E也等于F；

如果D小于F，那么E也小于F。

由于D、E是A、B的等倍量，

而F是C的另一个任意的倍量；

因此，A比C如同B比C。

[V. 定义5]

其次我说，C比量A、B中的每一个，其比相同。

这是因为，同样作图，可以类似地证明，D等于E；

而F是另外某个量。

因此，如果F大于D，那么F也大于E，

如果F等于D，那么F也等于E；

如果F小于D，那么F也小于E。

由于F是C的倍量，

而D、E是A、B的另外的等倍量；

因此，C比A如同C比B。

[V. 定义5]

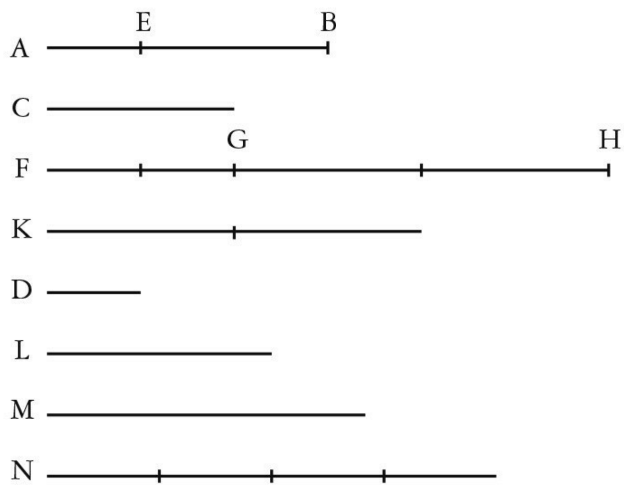
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，如果任意几个量成比例，则它们的反比例也成立。

命题**08**

两个不等的量比同一个量，较大量比这个量大于较小量比这个量；这个量比较小量大于这个量比较大量。

Of unequal magnitudes, the greater has to the same a greater ratio than the less has; and the same has to the less a greater ratio than it has to the greater.



设AB、C是不等的量，且AB较大；

而D是另一个任意的量；

我说，AB比D大于C比D，D比C大于D比AB。

这是因为，由于AB大于C，取BE等于C；

于是，把量AE、EB中较小的量若干倍以后，它大于D。

[V. 定义4]

[情况1]

首先，设AE小于EB；

把AE若干倍，设FG是AE的倍量，且大于D；

于是，FG是AE的多少倍，就取GH是EB的多少倍，取K是C的同样多少倍；

又取L是D的二倍，M是D的三倍，并且逐个加倍，直到所取的D的倍量首次大于K。

设它已经取定为N，并且是D的四倍，这是首次大于K的倍量。

于是，由于K首次小于N，

因此，K不小于M。

又，由于FG是AE的倍量，GH是EB的倍量，其倍数相等，

因此，FG是AE的倍量，FH是AB的倍量，其倍数相等。

[V. 1]

但FG是AE的倍量，K是C的倍量，其倍数相等；

因此，FH是AB的倍量，K是C的倍量，

其倍数相等；

因此，FH、K是AB、C的等倍量。

又，由于GH是EB的倍量，K是C的倍量，其倍数相等，

且EB等于C，

因此，GH等于K。

但K不小于M；

因此，GH也不小于M。

又，FG大于D；

因此，整个FH大于D、M之和。

但D、M之和等于N，

这是因为M是D的三倍，M、D之和是D的四倍，而N也是D的四倍；

因此，M、D之和等于N。

但FH大于M、D之和；

因此，FH大于N，

而K不大于N。

又，FH、K是AB、C的等倍量，而N是D的另一个任意的倍量；

因此，AB比D大于C比D。

[V. 定义7]

其次我说，D比C也大于D比AB。

这是因为，同样作图，可以类似地证明，N大于K，而N不大于FH。

又，N是D的倍量，

而FH、K是AB、C的另外的任意的等倍量；

因此，D比C大于D比AB。

[V. 定义7]

[情况2]

又，设AE大于EB。

于是，把较小的量EB若干倍以后，它大于D。

[V. 定义4]

设加倍后的GH是EB的倍量且大于D；

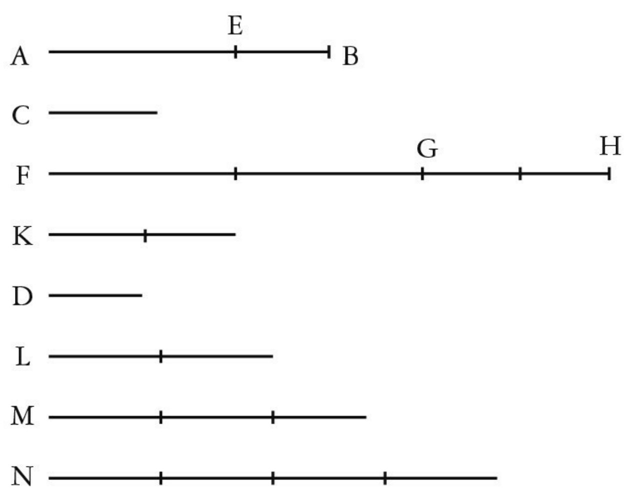
把EB若干倍，设GH是EB的倍量，且大于D；

GH是EB的多少倍，就取FG是AE的多少倍，取K是C的同样倍数；

于是可以类似地证明，FH、K是AB、C的等倍量；

而且类似地，取N是首次大于FG的D的倍量，

这样，FG不再小于M。



但GH大于D；

因此，整个FH大于D、M之和，即大于N。

现在，K不大于N，因为大于GH即大于K的FG也不大于N。

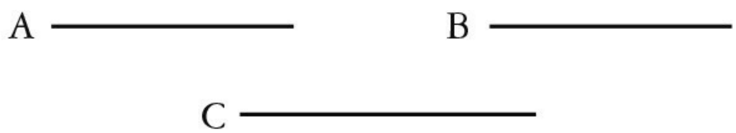
用相同的方式，根据以上论证，我们可以把证明补全。

这就是所要证明的。

命题**09**

与同一个量有相同比的几个量彼此相等；同一个量与之有相同比的几个量彼此相等。

Magnitudes which have the same ratio to the same are equal to one another; and magnitudes to which the same has the same ratio are equal.



设量A、B中的每一个都与C有相同的比；

我说，A等于B。

因为否则的话，量A、B中的每一个与C没有相同的比；

[V. 8]

但它们与C有相同的比；

因此，A等于B。

又设C与量A、B中的每一个都有相同的比；

我说，A等于B。

因为否则的话，C与量A、B中的每一个没有相同的比；

[V. 8]

但它与量A、B有相同的比；

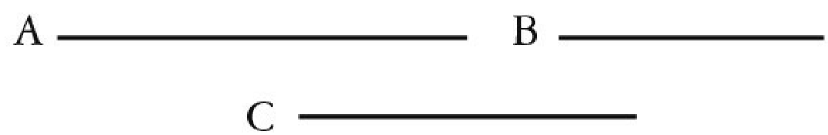
因此，A等于B。

这就是所要证明的。

命题**10**

几个量比同一个量，有较大比的量较大；同一个量比几个量，有较大比的量较小。

Of magnitudes which have a ratio to the same, that which has a greater ratio is greater; and that to which the same has a greater ratio is less.



设A比C大于B比C；

我说，A大于B。

因为否则的话，要么A等于B，要么A小于B。

现在，A不等于B；

因为在这种情况下，A、B与C有相同的比；

[V. 7]

但它们并没有相同的比；

因此，A不等于B。

又，A也不小于B；

因为在这种情况下，A比C小于B比C；

[V. 8]

实际上A比C并不小于B比C；

因此，A不小于B。

又，已证明，A不等于B；

因此，A大于B。

又，设C比B大于C比A；

我说，B小于A。

否则，要么B等于A，要么B大于A。

现在，B不等于A；

因为在这种情况下，C与量A、B中的每一个有相同的比；

[V. 7]

但C与量A、B中的每一个并没有相同的比；

因此，A不等于B。

又，B也不大于A；

因为在这种情况下，C比B小于C比A；

[V. 8]

但C比B并不小于C比A；

因此，B不大于A。

又，已证明，B也不等于A；

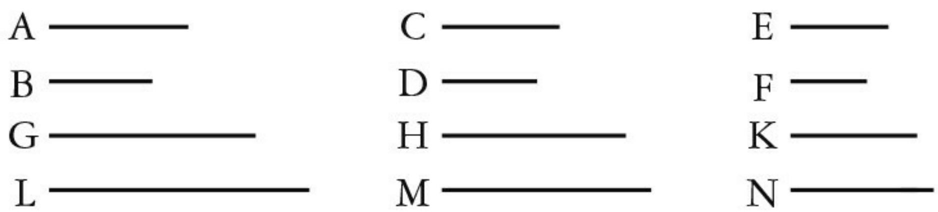
因此，B小于A。

这就是所要证明的。

命题**11**

与同一个比相同的比也彼此相同。

Ratios which are the same with the same ratio are also the same with one another.



设A比B如同C比D，C比D如同E比F；

我说，A比B如同E比F。

这是因为，取A、C、E的等倍量为G、H、K，并取B、D、F的任意等倍量为L、M、N。

于是，由于A比B如同C比D，

并且已取A、C的等倍量G、H，

以及B、D的等倍量L、M，

因此，如果G大于L，那么H也大于M，

如果G等于L，那么H也等于M，

如果G小于L，那么H也小于M。

又，由于C比D如同E比F，

并且已取C、E的等倍量H、K，

以及D、F的等倍量M、N，

因此，如果H大于M，那么K也大于N，

如果H等于M，那么K也等于N，

如果H小于M，那么K也小于N。

但我们看到，如果H大于M，那么G也大于L；

如果H等于M，那么G也等于L；如果H小于M，那么G也小于L；

因此，

如果G大于L，那么K也大于N，

如果G等于L，那么K也等于N，

如果G小于L，那么K也小于N。

又，G、K是A、E的等倍量，

而L、N是B、F的其他任意等倍量；

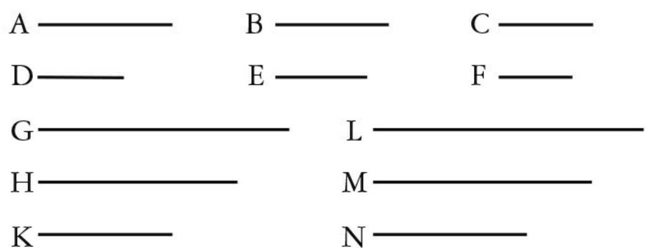
因此，A比B如同E比F。

这就是所要证明的。

命题**12**

若任意多个量成比例，则前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和。

If any number of magnitudes be propor-tional, as one of the antecedents is to one of the consequents, so will all the antecedents be to all the consequents.



设任意多个量A、B、C、D、E、F成比例，因此A比B如同C比D，又如同E比F；

我说，A比B如同A、C、E之和比B、D、F之和。

这是因为，取A、C、E的等倍量G、H、K，

以及B、D、F的其他任意等倍量L、M、N。

于是，由于A比B如同C比D，又如同E比F，

且已取A、C、E的等倍量G、H、K，

以及B、D、F的其他任意等倍量L、M、N，

因此，如果G大于L，那么H也大于M，K也大于N，

如果G等于L，那么H也等于M，K也等于N，

如果G小于L，那么H也小于M，K也小于N；

因此，

如果G大于L，那么G、H、K之和大于L、M、N之和，

如果G等于L，那么G、H、K之和等于L、M、N之和，

如果G小于L，那么G、H、K之和小于L、M、N之和。

现在，G与G、H、K之和是A与A、C、E之和的等倍量，这是因为，如果任意多个量分别是同样多个量的等倍量，那么其中一个量是其中一个量的多少倍，前者之和也是后者之和的多少倍。

[V. 1]

同理，

L与L、M、N之和也是B与B、D、F之和的等倍量；

因此，A比B如同A、C、E之和比B、D、F之和。

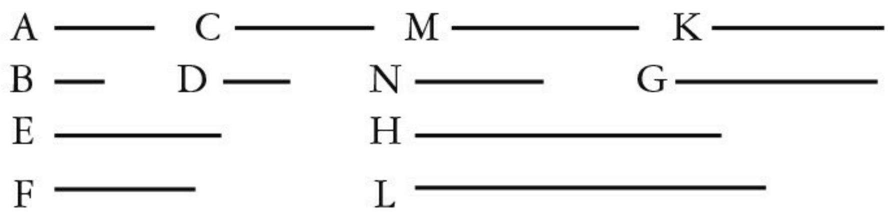
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**13**

若第一个量比第二个量与第三个量比第四个量有相同的比，第三个量比第四个量大于第五个量比第六个量，则第一个量比第二个量也大于第五个量比第六个量。

If a first magnitude have to a second the same ratio as a third to a fourth, and the third have to the fourth a greater ratio than a fifth has to a sixth, the first will also have to the second a greater ratio than the fifth to the sixth.



设第一个量A比第二个量B与第三个量C比第四个量D有相同的比，

又设第三个量C比第四个量D大于第五个量E比第六个量F；

我说，第一个量A比第二个量B也大于第五个量E比第六个量F。

这是因为，由于C、E有某些等倍量，

且D、F有其他任意等倍量，使得C的倍量大于D的倍量，

而E的倍量不大于F的倍量，

[V. 定义7]

设它们已被取定，

并设G、H是C、E的等倍量，

以及K、L是D、F的其他任意等倍量，使得G大于K，但H不大于L；

且G是C的多少倍，设M也是A的多少倍，

且K是D的多少倍，设N也是B的多少倍。

现在，由于A比B如同C比D，

且已取定A、C的等倍量M、G，

以及B、D的其他任意等倍量N、K，

因此，如果M大于N，那么G也大于K，

如果M等于N，那么G也等于K，

如果M小于N，那么G也小于K。

[V. 定义5]

但G大于K；

因此，M也大于N。

但H不大于L；

且M、H是A、E的等倍量，

且N、L是B、F的其他任意等倍量；

因此，A比B大于E比F。

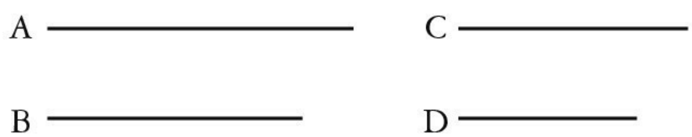
[V. 定义7]

这就是所要证明的。

命题**14**

若第一个量比第二个量与第三个量比第四个量有相同的比，且第一个量大于第三个量，则第二个量也大于第四个量；若第一个量等于第三个量，则第二个量也等于第四个量；若第一个量小于第三个量，则第二个量也小于第四个量。

If a first magnitude have to a second the same ratio as a third has to a fourth, and the first be greater than the third, the second will also be greater than the fourth; if equal, equal; and if less, less.



设第一个量A比第二个量B与第三个量C比第四个量D有相同的比；又设A大于C；

我说，B也大于D。

这是因为，由于A大于C，且B是其他任意的量，

因此，A比B大于C比B。

[V. 8]

但A比B如同C比D；

因此，C比D大于C比B。

[V. 13]

但同一个量比几个量，有较大比的量较小，

[V. 10]

因此，D小于B；

因此，B大于D。

类似地，可以证明，如果A等于C，那么B也等于D；

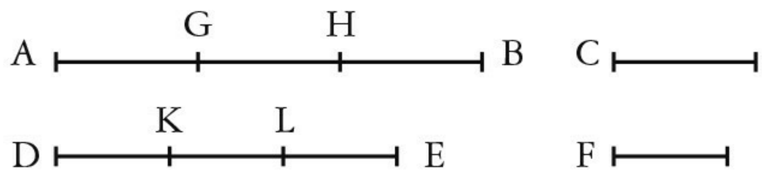
如果A小于C，那么B也小于D。

这就是所要证明的。

命题**15**

部分与部分之比以相应的次序如同其等倍量之比。

Parts have the same ratio as the same mul-tiples of them taken in corresponding order.



设AB是C的倍量，DE是F的倍量，其倍数相等；

我说，C比F如同AB比DE。

这是因为，由于AB是C的倍量，DE是F的倍量，其倍数相等，因此，AB中有多少个等于C的量，DE中就有多少个等于F的量。

设AB被分成等于C的量AG、GH、HB，

DE被分成等于F的量DK、KL、LE；

于是，量AG、GH、HB的个数等于量DK、KL、LE的个数。

又，由于AG、GH、HB彼此相等，

DK、KL、LE也彼此相等，

因此，AG比DK如同GH比KL，也如同HB比LE。

[V. 7]

因此，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[V. 12]

因此，AG比DK如同AB比DE。

但AG等于C，DK等于F；

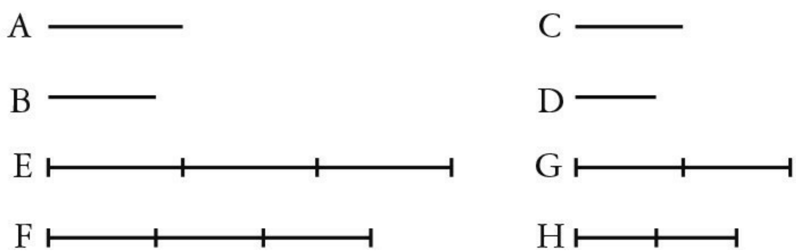
因此，C比F如同AB比DE。

这就是所要证明的。

命题**16**

若四个量成比例，则它们的更比例也成立。

If four magnitudes be proportional, they will also be proportional alternately.



设A、B、C、D是四个成比例的量，因此A比B如同C比D；

我说，它们的更比例也成立[V. 定义12]，即A比C如同B比D。

这是因为，取A、B的等倍量E、F，

以及C、D的其他任意等倍量G、H。

于是，由于E是A的倍量，F是B的倍量，其倍数相等，

且部分与部分之比如同其等倍量之比，

[V. 15]

因此，A比B如同E比F。

但A比B如同C比D；

因此也有，C比D如同E比F。

[V. 11]

又，由于G、H是C、D的等倍量，

因此，C比D如同G比H。

[V. 15]

但C比D如同E比F；

因此也有，E比F如同G比H。

[V. 11]

但如果四个量成比例，且第一个量大于第三个量，那么第二个量也大于第四个量；

如果第一个量等于第三个量，那么第二个量也等于第四个量；

如果第一个量小于第三个量，那么第二个量也小于第四个量。

[V. 14]

因此，如果E大于G，那么F也大于H，如果E等于G，那么F也等于H；

如果E小于G，那么F也小于H。

现在，E、F是A、B的等倍量，

且G、H是C、D的其他任意等倍量；

因此，A比C如同B比D。

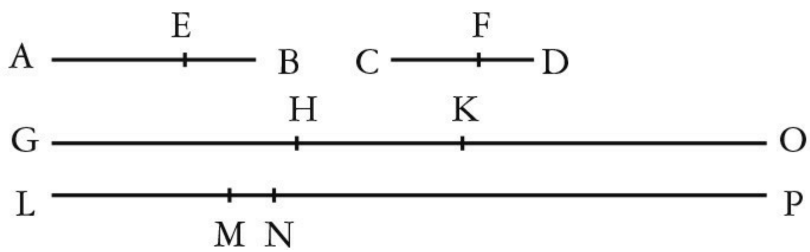
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**17**

若几个量成合比例，则它们的分比例也成立。

If magnitudes be proportional componendo, they will also be proportional separando.



设AB、BE、CD、DF是成合比例的量[V. 定义14]，因此AB比BE如同CD比DF；

我说，它们的分比例也成立[V. 定义15]，即AE比EB如同CF比FD。

这是因为，取AE、EB、CF、FD的等倍量GH、HK、LM、MN，

以及EB、FD的其他任意等倍量KO、NP。

于是，由于GH是AE的倍量，HK是EB的倍量，其倍数相等，

因此，GH是AE的倍量，GK是AB的倍量，其倍数相等。

[V. 1]

但GH是AE的倍量，LM是CF的倍量，其倍数相等；

因此，GK是AB的倍量，LM是CF的倍量，其倍数相等。

又，由于LM是CF的倍量，MN是FD的倍量，其倍数相等，

因此，LM是CF的倍量，LN是CD的倍量，其倍数相等。

[V. 1]

但LM是CF的倍量，GK是AB的倍量，其倍数相等；

因此，GK是AB的倍量，LN是CD的倍量，其倍数相等。

因此，GK、LN是AB、CD的等倍量。

又，由于HK是EB的倍量，MN是FD的倍量，其倍数相等，

且KO也是EB的倍量，NP是FD的倍量，其倍数相等，

因此，和HO也是EB的倍量，MP是FD的倍量，其倍数相等。

[V. 2]

又，由于AB比BE如同CD比FD，

且已取AB、CD的等倍量GK、LN，

以及EB、FD的等倍量HO、MP，

因此，如果GK大于HO，那么LN也大于MP，

如果GK等于HO，那么LN也等于MP，

如果GK小于HO，那么LN也小于MP。

设GK大于HO；

于是，如果从它们中各减去HK，那么

GH也大于KO。

但我们看到，如果GK大于HO，那么LN也大于MP；

因此，LN也大于MP，

又，如果从它们中各减去MN，那么

LM也大于NP；

因此，如果GH大于KO，那么LM也大于NP。

类似地，可以证明，

如果GH等于KO，那么LM也等于NP，

如果GH小于KO，那么LM也小于NP。

又，GH、LM是AE、CF的等倍量，

而KO、NP是EB、FD的其他任意等倍量；

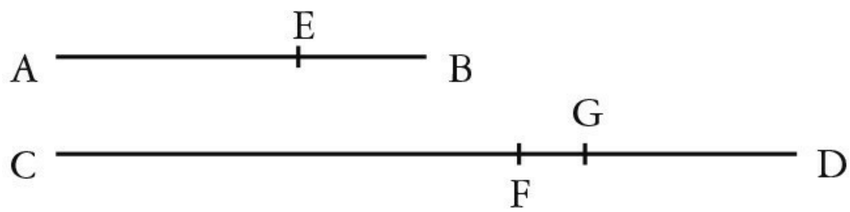
因此，AE比EB如同CF比FD。

这就是所要证明的。

命题**18**

若几个量成分比例，则它们的合比例也成立。

If magnitudes be proportional separando, they will also be proportional componendo.



设AE、EB、CF、FD是成分比例的量[V.　定义15]，因此AE比EB如同CF比FD；

我说，它们的合比例也成立[V.　　　定义14]，即AB比BE如同CD比DF。

这是因为，如果CD比DF不如同AB比BE，

那么，AB比BE如同CD比某个小于DF或大于DF的量。

首先，设在那个比中，它是一个小于DF的量DG。

于是，由于AB比BE如同CD比DG，所以

它们是成合比例的量；

因此，它们的分比例也成立。

[V. 17]

因此，AE比EB如同CG比GD。

但根据假设也有，

AE比EB如同CF比FD。

因此也有，CG比GD如同CF比FD。

[V. 11]

但第一个量CG大于第三个量CF；

因此，第二个量GD也大于第四个量FD。

[V. 14]

但GD也小于FD：这是不可能的。

因此，AB比BE不如同CD比一个小于DF的量。

类似地，可以证明，在那个比中，它也不是一个大于FD的量；

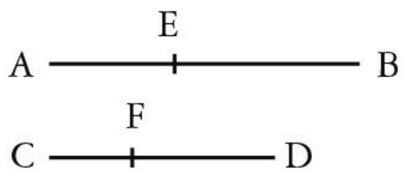
因此，在那个比例中，它是FD自身。

这就是所要证明的。

命题**19**

若整个比整个如同减去的部分比减去的部分，则剩余比剩余也如同整个比整个。

If, as a whole is to a whole, so is a part subtracted to a part subtracted, the remainder will also be to the remainder as whole to whole.



设整个AB比整个CD如同减去的部分AE比减去的部分CF;

我说，剩余的EB比剩余的FD也如同整个AB比整个CD。

这是因为，由于AB比CD如同AE比CF，所以

它们的更比例也成立，BA比AE如同DC比CF。

[V. 16]

又，由于这些量成合比例，所以它们的分比例也成立，

[V. 17]

即BE比EA如同DF比FC，

又，取更比例，

BE比DF如同EA比FC。

[V. 16]

但根据假设，AE比CF如同整个AB比整个CD。

因此也有，剩余的EB比剩余的FD如同整个AB比整个CD。

[V. 11]

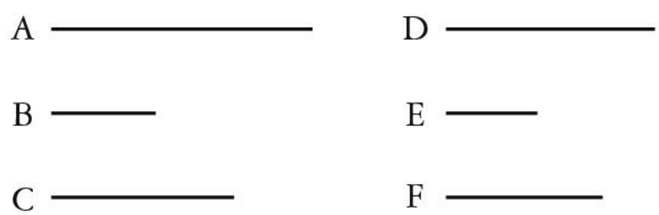
这就是所要证明的。

<推论 由此显然可得，若这些量成合比例[V. 定义14]，则它们的换比例也成立[V. 定义16]。>

命题**20**

如果有三个量，又有个数与之相等的另外三个量，它们两两成相同的比，若按照首末比例第一个量大于第三个量，则第四个量也大于第六个量；若第一个量等于第三个量，则第四个量也等于第六个量；若第一个量小于第三个量，则第四个量也小于第六个量。

If there be three magnitudes, and others equal to them in multitude, which taken two and two are in the same ratio, and if ex aequali the first be greater than the third, the fourth will also be greater than the sixth; if equal, equal; and, if less, less.



设有三个量A、B、C，又有个数与之相等的另外三个量D、E、F，它们两两成相同的比，因此，

A比B如同D比E，

且

B比C如同E比F；

又设按照首末比例A大于C；

我说，D也大于F；

如果A等于C，那么D也等于F；如果A小于C，那么D也小于F。

这是因为，由于A大于C，

且B是另外的某个量，

且两个不等的量比同一个量，较大量比这个量大于较小量比这个量，

[V. 8]

因此，A比B大于C比B。

但A比B如同D比E，

且根据逆比例，C比B如同F比E；

因此，D比E也大于F比E。

[V. 13]

但几个量比同一个量，有较大比的量较大；

[V. 10]

因此，D大于F。

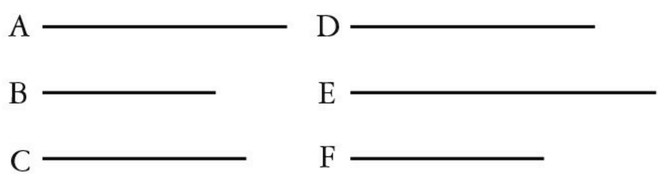
类似地，可以证明，如果A等于C，那么D也等于F；如果A小于C，那么D也小于F。

这就是所要证明的。

命题**21**

如果有三个量，又有个数与之相等的另外三个量，它们两两成相同的比，而且它们成调动比例，那么若按照首末比例第一个量大于第三个量，则第四个量也大于第六个量；若第一个量等于第三个量，则第四个量也等于第六个量；若第一个量小于第三个量，则第四个量也小于第六个量。

If there be three magnitudes, and others equal to them in multitude, which taken two and two together are in the same ratio, and the proportion of them be perturbed, then, if ex aequali the first magnitude is greater than the third, the fourth will also be greater than the sixth; if equal, equal; and if less, less.



设有三个量A、B、C，又有个数与之相等的另外三个量D、E、F，它们两两成相同的比，并设它们成调动比例[V. 定义18]，因此，

A比B如同E比F，

且

B比C如同D比E，

又设按照首末比例A大于C；

我说，D也大于F；

如果A等于C，那么D也等于F；如果A小于C，那么D也小于F。

这是因为，由于A大于C，且B是另外的某个量，

因此，A比B大于C比B。

[V. 8]

但A比B如同E比F，

且根据逆比例，C比B如同E比D。

因此，E比F也大于E比D。

[V. 13]

但同一个量比几个量，有较大比的量较小；

[V. 10]

因此，F小于D；

因此，D大于F。

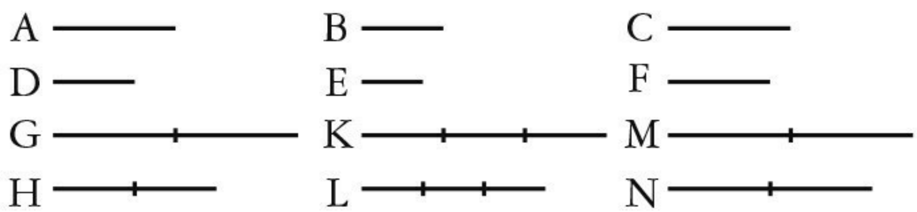
类似地，可以证明，如果A等于C，那么D也等于F；如果A小于C，那么D也小于F。

这就是所要证明的。

命题**22**

若有任意多个量，又有个数与之相等的另外几个量，它们两两成相同的比，则它们的首末比例也成立。

If there be any number of magnitudes whatever, and others equal to them in multitude, which taken two and two together are in the same ratio, they will also be in the same ratio ex aequali.



设有任意多个量A、B、C；又有个数与之相等的另外三个量D、E、F，它们两两成相同的比，因此，

A比B如同D比E，

且

B比C如同E比F；

我说，它们的首末比例也成立[V. 定义17]，

[即A比C如同D比F]。

这是因为，取A、D的等倍量G、H，

以及B、E的其他任意等倍量K、L；

以及C、F的其他任意等倍量M、N。

于是，由于A比B如同D比E，

且已取A、D的等倍量G、H，

以及B、E的其他任意等倍量K、L，

因此，G比K如同H比L。

[V. 4]

同理也有，

K比M如同L比N。

于是，由于有三个量G、K、M，又有个数与之相等的另外三个量H、L、N，它们两两成相同的比，

因此，按照首末比例，如果G大于M，那么H也大于N；

如果G等于M，那么H也等于N。

如果G小于M，那么H也小于N。

[V. 20]

又，G、H是A、D的等倍量，

且M、N是C、F的其他任意等倍量。

因此，A比C如同D比F。

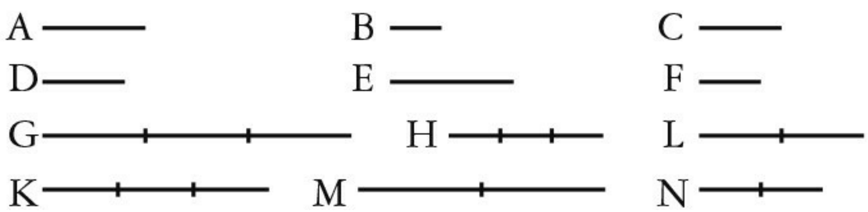
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**23**

若有三个量，又有个数与之相等的另外三个量，它们两两成相同的比，且成调动比例，则它们的首末比例也成立。

If there be three magnitudes, and others equal to them in multitude, which taken two and two together are in the same ratio, and the proportion of them be perturbed, they will also be in the same ratio ex aequali.



设有三个量A、B、C，又有个数与之相等的另外三个量D、E、F，它们两两成相同的比；并设它们成调动比例[V. 定义18]，因此，

A比B如同E比F，

且

B比C如同D比E；

我说，A比C如同D比F。

取A、B、D的等倍量G、H、K，

以及C、E、F的其他任意等倍量L、M、N。

于是，由于G、H是A、B的等倍量，

且部分与部分之比如同其等倍量之比，

[V. 15]

因此，A比B如同G比H。

同理也有，

E比F如同M比N。

且A比B如同E比F；

因此也有，G比H如同M比N。

[V. 11]

其次，由于B比C如同D比E，

其更比例为，B比D如同C比E。

[V. 16]

又，由于H、K是B、D的等倍量，

且部分与部分之比如同其等倍量之比，

因此，B比D如同H比K。

[V. 15]

但B比D如同C比E；

因此也有，H比K如同C比E。

[V. 11]

又，由于L、M是C、E的等倍量，

因此，C比E如同L比M。

[V. 15]

但C比E如同H比K；

因此也有，H比K如同L比M，

[V. 11]

其更比例为，H比L如同K比M。

[V. 16]

但已证明，

G比H如同M比N。

于是，由于有三个量G、H、L，又有个数与之相等的另外三个量K、M、N，它们两两成相同的比，且它们成调动比例，

因此，按照首末比例，如果G大于L，那么K也大于N；

如果G等于L，那么K也等于N；

如果G小于L，那么K也小于N。

[V. 21]

又，G、K是A、D的等倍量，

且L、N是C、F的等倍量。

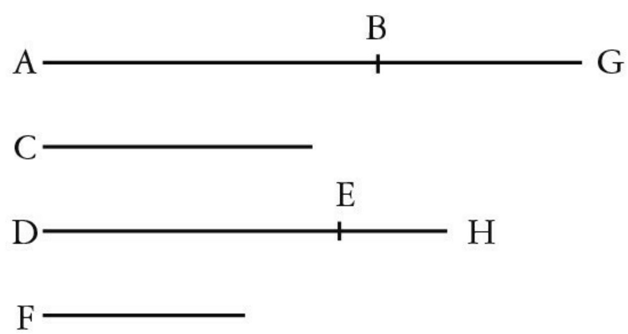
因此，A比C如同D比F。

这就是所要证明的。

命题**24**

若第一个量比第二个量与第三个量比第四个量有相同的比，且第五个量比第二个量与第六个量比第四个量有相同的比，则第一个量与第五个量之和比第二个量，第三个量与第六个量之和比第四个量有相同的比。

If a first magnitude have to a second the same ratio as a third has to a fourth, and also a fifth have to the second the same ratio as a sixth to the fourth, the first and fifth added together will have to the second the same ratio as the third and sixth have to the fourth.



设第一个量AB比第二个量C与第三个量DE比第四个量F有相同的比；

且设第五个量BG比第二个量C与第六个量EH比第四个量F有相同的比；

我说，第一个量与第五个量之和AG比第二个量C，第三个量与第六个量之和DH比第四个量F有相同的比。

这是因为，由于BG比C如同EH比F，所以

其反比例为，C比BG如同F比EH。

于是，由于AB比C如同DE比F，

且C比BG如同F比EH，

因此，按照首末比例，AB比BG如同DE比EH。

[V. 22]

又，由于这些量成分比例，所以它们的合比例也成立；

[V. 18]

因此，AG比GB如同DH比HE。

但也有，BG比C如同EH比F；

因此，按照首末比例，AG比C如同DH比F。

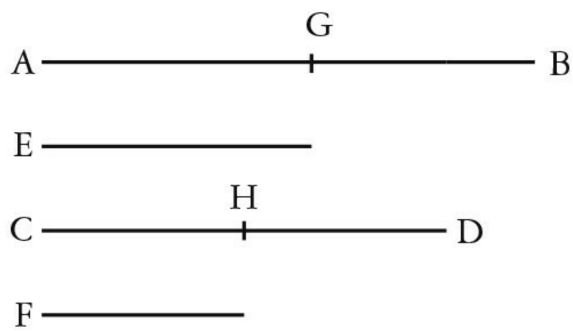
[V. 22]

这就是所要证明的。

命题**25**

若四个量成比例，则最大量与最小量之和大于其余两个量之和。

If four magnitudes be proportional, the greatest and the least are greater than the remaining two.



设四个量AB、CD、E、F成比例，因此AB比CD如同E比F，且设AB是它们之中最大的，F是最小的；

我说，AB与F之和大于CD与E之和。

这是因为，取AG等于E，且CH等于F。

由于AB比CD如同E比F，

且E等于AG，F等于CH，

因此，AB比CD如同AG比CH。

又，由于整个AB比整个CD如同减去的部分AG比减去的部分CH，所以

剩余的GB比剩余的HD也如同整个AB比整个CD。

[V. 19]

但AB大于CD；

因此，GB也大于HD。

又，由于AG等于E，且CH等于F，

因此，AG与F之和等于CH与E之和。

既然GB、HD不等，且GB较大，

若把AG、F加在GB上，

并把CH、E加在HD上，

那么可得，AB与F之和大于CD与E之和。

这就是所要证明的。

第六卷

定义 Definitions

01 / 相似直线形是指这样一些直线形，它们的角分别相等且夹等角的边成比例。

Similar rectilineal figures are such as have their angles severally equal and the sides about the equal angles proportional.

02 / <互反相关图形>[1]

<*Reciprocally related figures*>

03 / 将一直线分成两段，当整个直线比大段如同大段比小段时，则称此直线被分成中外比。

A straight line is said to have been *cut in extreme and mean ratio* when, as the whole line is to the greater segment, so is the greater to the less.

04 / 任一图形的高是从顶点到底所作的垂线。

The *height* of any figure is the perpendicular drawn from the vertex to the base.

---

[1]定义2被认为是伪造的。欧几里得从未使用过它。根据希思的说法，其希腊文本没有给出可理解的含义，希思没有翻译它。不过在对定义2的注释中，他列出了Simson所尝试给出的定义：“两个量与另外两个量成互反比例，即前两个量中的第一个量比后两个量中的第一个量如同后两个量中的第二个量比前两个量中的第二个量。”（译

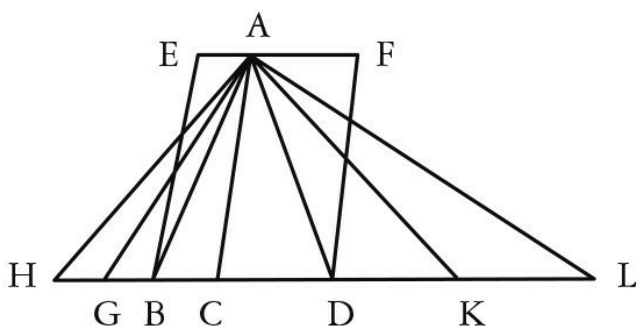
者注）

命题 **Proposition**

命题**01**

等高的三角形或平行四边形，它们彼此之比如同其底之比。

Triangles and parallelograms which are under the same height are to one another as their bases.



设ABC、ACD是等高的三角形，EC、CF是等高的平行四边形；

我说，底BC比底CD如同三角形ABC比三角形ACD，也如同平行四边形EC比平行四边形CF。

这是因为，沿两个方向延长BD至点H、L，并取任意条直线BG、GH等于底BC，以及任意条直线DK、KL等于底CD；

连接AG、AH、AK、AL。

于是，由于CB、BG、GH彼此相等，所以

三角形ABC、AGB、AHG也彼此相等。

[I. 38]

因此，底HC是底BC的多少倍，三角形AHC也是三角形ABC的多少倍。

同理，

底LC是底CD的多少倍，三角形ALC也是三角形ACD的多少倍；

而且，如果底HC等于底CL，那么三角形AHC也等于三角形ACL，

[I. 38]

如果底HC大于底CL，那么三角形AHC也大于三角形ACL，

如果底HC小于底CL，那么三角形AHC也小于三角形ACL。

于是，有四个量，两个底BC、CD和两个三角形ABC、ACD，

已取底BC和三角形ABC的等倍量，即底HC和三角形AHC，

以及底CD和三角形ADC的其他任意等倍量，即底LC和三角形ALC；

且已经证明，

如果底HC大于底CL，那么三角形AHC也大于三角形ALC；

如果底HC等于底CL，那么三角形AHC也等于三角形ALC；

如果底HC小于底CL，那么三角形AHC也小于三角形ALC。

因此，底BC比底CD如同三角形ABC比三角形ACD。

[V. 定义5]

其次，由于平行四边形EC是三角形ABC的二倍，

[I. 41]

且平行四边形FC是三角形ACD的二倍，

而部分比部分如同其等倍量比等倍量，

[V. 15]

因此，三角形ABC比三角形ACD如同平行四边形EC比平行四边形FC。

于是，由于已经证明，底BC比CD如同三角形ABC比三角形ACD，

且三角形ABC比三角形ACD如同平行四边形EC比平行四边形CF，

因此也有，底BC比底CD如同平行四边形EC比平行四边形FC。

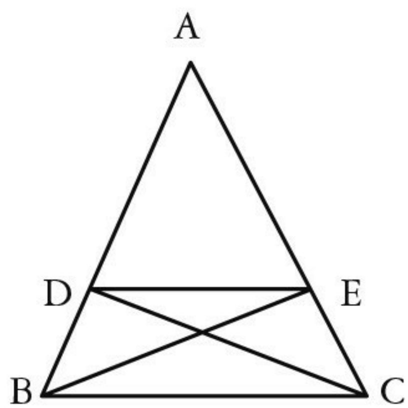
[V. 11]

这就是所要证明的。

命题**02**

若作一直线平行于三角形的一边，则它成比例地截三角形的两边；又，若三角形的两边被成比例地截，则截点的连线平行于三角形的其余一边。

If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle be cut proportionally, the line joining the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle.



作DE平行于三角形ABC的一边BC；

我说，BD比DA如同CE比EA。

连接BE、CD。

因此，三角形BDE等于三角形CDE；因为它们等底DE且在平行线DE、BC之间。

[I. 38]

又，三角形ADE是另一个面。

但等量比同一个量，其比相同；

[V. 7]

因此，三角形BDE比三角形ADE如同三角形CDE比三角形ADE。

但三角形BDE比ADE如同BD比DA；

这是因为它们有等高，即从E到AB所作垂线，它们彼此之比如同其底之比。

[VI. 1]

同理也有，

三角形CDE比ADE如同CE比EA。

因此也有，BD比DA如同CE比EA。

[V. 11]

其次，设三角形ABC的边AB、AC被成比例地截，因此BD比DA如同CE比EA；

并连接DE。

我说，DE平行于BC。

这是因为，根据同样的作图，

由于BD比DA如同CE比EA，

但BD比DA如同三角形BDE比三角形ADE，

且CE比EA如同三角形CDE比三角形ADE，

[VI. 1]

因此也有，

三角形BDE比三角形ADE如同三角形CDE比三角形ADE。

[V. 11]

因此，三角形BDE、CDE中的每一个比ADE有相同的比。

因此，三角形BDE等于三角形CDE；

[V. 9]

且它们在同底DE上。

但同底的相等三角形也在相同的平行线之间。

[I. 39]

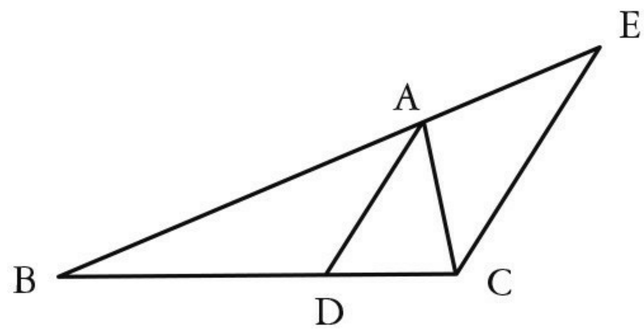
因此，DE平行于BC。

这就是所要证明的。

命题**03**

若将三角形的一个角二等分，分角线也把底截成两段，则底的两段之比如同三角形其余两边之比；又，若底的两段之比如同三角形其余两边之比，则从顶点到截点的直线将三角形的顶角二等分。

If an angle of a triangle be bisected and the straight line cutting the angle cut the base also, the segments of the base will have the same ratio as the remaining sides of the triangle; and, if the segments of the base have the same ratio as the remaining sides of the triangle, the straight line joined from the vertex to the point of section will bisect the angle of the triangle.



设ABC是一个三角形，直线AD将角BAC二等分；

我说，BD比CD如同BA比AC。

这是因为，过C作CE平行于DA，延长BA与之交于E。

于是，由于直线AC和平行线AD、EC相交，所以

角ACE等于角CAD。

[I. 29]

但根据假设，角CAD等于角BAD；

因此，角BAD也等于角ACE。

又，由于直线BAE和平行线AD、EC相交，所以

外角BAD等于内角AEC。

[I. 29]

但已证明，角ACE等于角BAD；

因此，角ACE也等于角AEC，

因此，边AE也等于边AC。

[I. 6]

又，由于已作AD平行于三角形BCE的一边EC，

因此按照比例，BD比DC如同BA比AE。

[VI. 2]

但AE等于AC；

因此，BD比DC如同BA比AC。

又，设BA比AC如同BD比DC，且连接AD；

我说，直线AD将角BAC二等分。

这是因为，用同样的作图，

由于BD比DC如同BA比AC，

又有，BD比DC如同BA比AE：这是因为已作AD平行于三角形BCE的一边EC：

[VI. 2]

因此也有，BA比AC如同BA比AE。

[V. 11]

因此，AC等于AE，

[V. 9]

因此，角AEC也等于角ACE。

[I. 5]

但同位角AEC等于角BAD，

[I. 29]

且内错角ACE等于角CAD；

[I. 29]

因此，角BAD也等于角CAD。

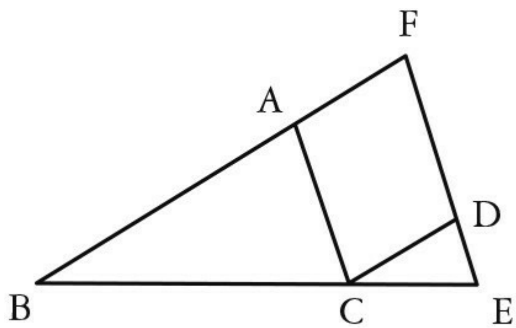
因此，直线AD将角BAC二等分。

这就是所要证明的。

命题**04**

在若干个等角三角形中，夹等角的边成比例，等角所对的边是对应边。

In equiangular triangles the sides about the equal angles are proportional, and those are corresponding sides which subtend the equal angles.



设ABC、DCE是等角三角形，角ABC等于角DCE，角BAC等于角CDE，且角ACB等于角CED；

我说，在三角形ABC、DCE中，夹等角的边成比例，等角所对的边是对应边。

这是因为，将BC和CE置于同一直线上。

于是，由于角ABC、ACB之和小于两直角，

[I. 17]

且角ACB等于角DEC，

因此，角ABC、DEC之和小于两直角；

因此，BA、ED延长后会相交。

[I. 公设5]

设它们交于F。

现在，由于角DCE等于角ABC，所以

BF平行于CD。

[I. 28]

又，由于角ACB等于角DEC，所以

AC平行于FE。

[I. 28]

因此，FACD是一个平行四边形；

因此，FA等于DC，且AC等于FD。

[I. 34]

又，由于AC平行于三角形FBE的边FE，

因此，BA比AF如同BC比CE。

[VI. 2]

但AF等于CD；

因此，BA比CD如同BC比CE，

其更比例为，AB比BC如同DC比CE。

[V. 16]

又，由于CD平行于BF，

因此，BC比CE如同FD比DE。

[VI. 2]

但FD等于AC；

因此，BC比CE如同AC比DE，

其更比例为，BC比CA如同CE比ED。

[V. 16]

于是，由于已经证明，

AB比BC如同DC比CE，

且BC比CA如同CE比ED；

因此，取首末比例，BA比AC如同CD比DE。

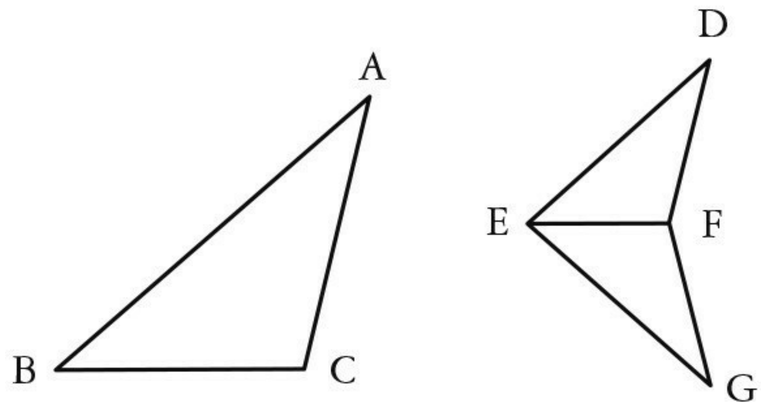
[V. 22]

这就是所要证明的。

命题**05**

若两个三角形的各边成比例，则它们是等角的，且对应边所对的角相等。

If two triangles have their sides proportional, the triangles will be equiangular and will have those angles equal which the corresponding sides subtend.



设ABC、DEF是各边成比例的两个三角形，即

AB比BC如同DE比EF，

BC比CA如同EF比FD，

且BA比AC如同ED比DF；

我说，三角形ABC与三角形DEF是等角的，对应边所对的角相等，即角ABC等于角DEF，角BCA等于角EFD，以及角BAC等于角EDF。

这是因为，在直线EF上的点E、F处作角FEG等于角ABC，且角EFG等于角ACB；

[I. 23]

因此，A处其余的角等于G处其余的角。

[I. 32]

因此，三角形ABC与三角形GEF是等角的。

因此，在三角形ABC、GEF中，夹等角的边成比例，等角所对的边是对应边；

[VI. 4]

因此，AB比BC如同GE比EF。

但根据假设，AB比BC如同DE比EF；

因此，DE比EF如同GE比EF。

[V. 11]

因此，直线DE、GE中的每一条与EF相比都有相同的比；

因此，DE等于GE。

[V. 9]

同理，

DF也等于GF。

于是，由于DE等于EG，

且EF公用，所以

两边DE、EF等于两边GE、EF；

且底DF等于底FG；

因此，角DEF等于角GEF，

[I. 8]

且三角形DEF等于三角形GEF，

又，其余的角等于其余的角，即等边所对的那些角。

[I. 4]

因此，角DFE也等于角GFE，

且角EDF等于角EGF。

又，由于角FED等于角GEF，

而角GEF等于角ABC，

因此，角ABC也等于角DEF。

同理，

角ACB也等于角DFE，

以及A处的角等于D处的角；

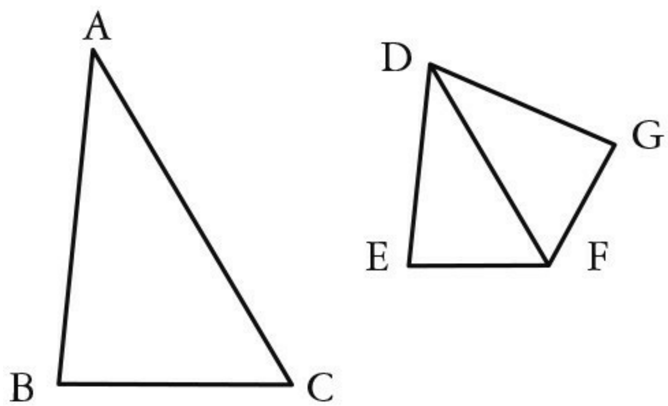
因此，三角形ABC与三角形DEF是等角的。

这就是所要证明的。

命题**06**

若两个三角形有一个对应的角相等，且夹等角的边成比例，则这两个三角形是等角的，且对应边所对的角相等。

If two triangles have one angle equal to one angle and the sides about the equal angles proportional, the triangles will be equiangular and will have those angles equal which the corresponding sides subtend.



设两个三角形ABC、DEF中，角BAC等于角EDF，且夹等角的边成比例，即

BA比AC如同ED比DF；

我说，三角形ABC与三角形DEF是等角的，即角ABC等于角DEF，角ACB等于角DFE。

这是因为，在直线DF上的点D、F处作角FDG等于角BAC或角EDF，且角DFG等于角ACB；

[I. 23]

因此，其余的B处的角等于其余的G处的角。

[I. 32]

因此，三角形ABC与三角形DGF是等角的。

因此成比例，BA比AC如同GD比DF。

[VI. 4]

但根据假设，BA比AC如同ED比DF；

因此也有，ED比DF如同GD比DF。

[V. 11]

因此，ED等于DG；

[V. 9]

而DF公用；

因此，两边ED、DF等于两边GD、DF；

而角EDF等于角GDF；

因此，底EF等于底GF，

三角形DEF等于三角形DGF，

其余的角等于其余的角，即等边所对的那些角。

[I. 4]

因此，角DFG等于角DFE，

角DGF等于角DEF。

但角DFG等于角ACB；

因此，角ACB也等于角DFE。

又根据假设，角BAC也等于角EDF；

因此，其余的B处的角也等于其余的E处的角；

[I. 32]

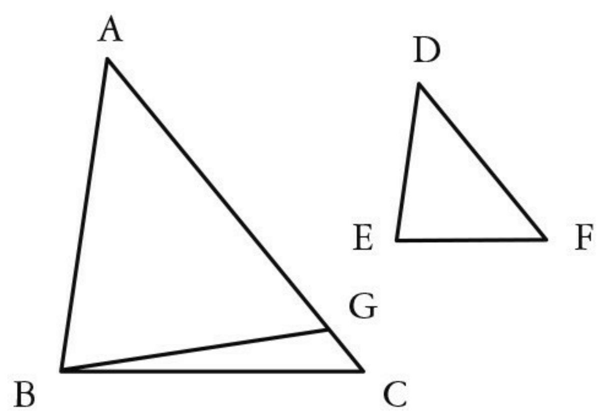
因此，三角形ABC与三角形DEF是等角的。

这就是所要证明的。

命题**07**

若两个三角形有一个角彼此相等，夹另外的角的边成比例，其余的角要么都小于要么都不小于一直角，则这两个三角形是等角的，成比例的边所夹的角相等。

If two triangles have one angle equal to one angle, the sides about other angles proportional, and the remaining angles either both less or both not less than a right angle, the triangles will be equiangular and will have those angles equal, the sides about which are proportional.



设ABC、DEF是两个三角形，有一个角彼此相等，即角BAC等于角EDF，夹另外的角ABC、DEF的边成比例，因此

AB比BC如同DE比EF，

且首先假设其余的C、F处的每一个角都小于一直角；

我说，三角形ABC与三角形DEF是等角的，角ABC等于角DEF，其余的C处的角等于其余的F处的角。

这是因为，如果角ABC不等于角DEF，则它们中有一个较大。

设角ABC较大；

且在直线AB上的点B处作角ABG等于角DEF。

[I. 23]

于是，由于角A等于角D，

且角ABG等于角DEF，

因此，其余的角AGB等于其余的角DFE。

[I. 32]

因此，三角形ABG与三角形DEF是等角的。

因此，AB比BG如同DE比EF。

[VI. 4]

但根据假设，DE比EF如同AB比BC；

因此，AB比直线BC、BG中的每一个有相同的比；

[V. 11]

因此，BC等于BG，

[V. 9]

因此，C处的角也等于角BGC。

[I. 5]

但根据假设，C处的角小于一直角；

因此，角BGC也小于一直角；

因此，它的邻角AGB大于一直角。

[I. 13]

而已经证明它等于F处的角；

因此，F处的角也大于一直角。

但根据假设，它小于一直角：这是荒谬的。

因此，角ABC并非不等于角DEF；

因此，角ABC等于角DEF。

但A处的角也等于D处的角；

因此，其余的C处的角等于其余的F处的角。

[I. 32]

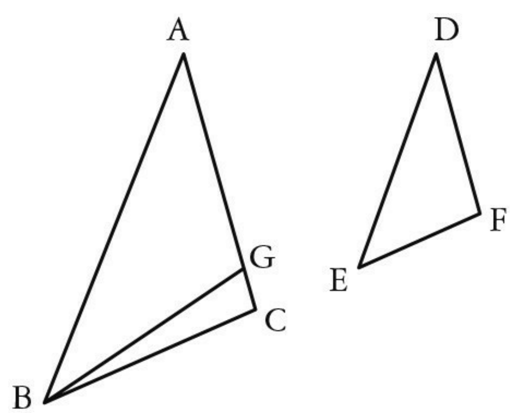
因此，三角形ABC与三角形DEF是等角的。

但又设C、F处的角每一个都不小于一直角；

我说，在这种情况下，三角形ABC与三角形DEF也是等角的。

这是因为，同样作图，类似地可以证明，

BC等于BG；



因此，C处的角也等于角BGC。

[I. 5]

但C处的角不小于一直角；

因此，角BGC也不小于一直角。

于是，在三角形BGC中，两个角之和不小于两直角：这是不可能

的。

[I. 17]

因此，同样，角ABC并非不等于角DEF；

因此，角ABC等于角DEF。

但A处的角也等于D处的角；

因此，其余的C处的角等于其余的F处的角。

[I. 32]

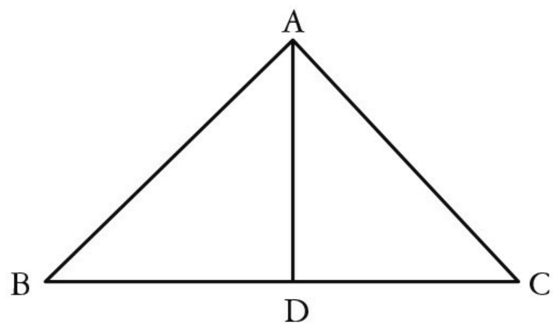
因此，三角形ABC与三角形DEF是等角的。

这就是所要证明的。

命题**08**

若在一直角三角形中，从直角向底作垂线，则与垂线相邻的两个三角形既与整个三角形相似又彼此相似。

If in a right-angled triangle a perpendicular be drawn from the right angle to the base, the triangles adjoining the perpendicular are similar both to the whole and to one another.



设ABC是一个直角三角形，角BAC为直角，从A向BC作垂线AD；

我说，三角形ABD、ADC中的每一个都与整个三角形ABC相似，且它们彼此相似。

由于角BAC等于角ADB，这是因为它们都是直角，

且B处的角为两三角形ABC和ABD所公用，

因此，其余的角ACB等于其余的角BAD；

[I. 32]

因此，三角形ABC与三角形ABD是等角的。

因此，三角形ABC中直角所对的边BC比三角形ABD中直角所对的边BA，如同三角形ABC中C处的角所对的边AB比三角形ABD中等角BAD所对的边BD，也如同两三角形公用的B处的角所对的边AC比AD。

[VI. 4]

因此，三角形ABC与三角形ABD是等角的，且夹等角的边成比例。

因此，三角形ABC与三角形ABD相似。

[VI. 定义1]

类似地，可以证明，

三角形ABC也相似于三角形ADC；

因此，三角形ABD、ADC中的每一个都相似于整个三角形ABC。

其次我说，三角形ABD、ADC也彼此相似。

这是因为，直角BDA等于直角ADC，

而且也已经证明，角BAD等于C处的角，

因此，其余的B处的角也等于其余的角DAC；

[I. 32]

因此，三角形ABD与三角形ADC是等角的。

因此，三角形ABD中角BAD所对的边BD比三角形ADC中C处的角所对的边DA，如同三角形ABD中B处的角所对的边AD比三角形ADC中等于B处的角的角DAC所对的边DC，

也如同直角所对的边BA比AC；

[VI. 4]

因此，三角形ABD相似于三角形ADC。

[VI. 定义1]

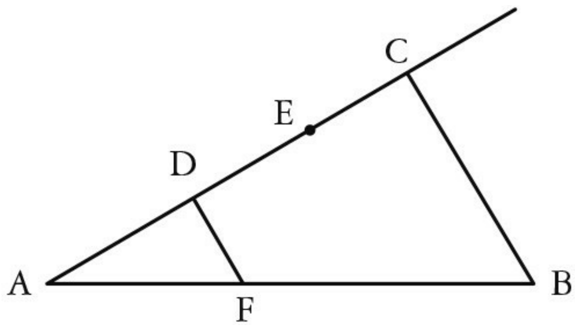
这就是所要证明的。

推论　　由此显然可得，若在一个直角三角形中从直角向底作一垂线，则该直线是底上两段的比例中项。

命题**09**

从一给定直线上截取一个指定的部分。

From a given straight line to cut off a prescribed part.



设AB是给定的直线；

于是，要求从AB上截取一个指定的部分。

设那个指定的部分是三分之一部分。

从A作直线AC与AB成任意角；

在AC上任取一点D，使DE、EC等于AD。

[I. 3]

连接BC，过D作DF平行于它。

[I. 31]

于是，由于FD平行于三角形ABC的一边BC，

因此，按照比例，CD比DA如同BF比FA。

[VI. 2]

但CD是DA的二倍；

因此，BF也是FA的二倍；

因此，BA是AF的三倍。

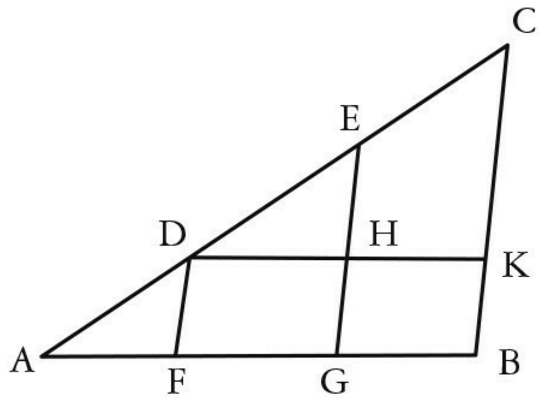
这样便在给定的直线AB上截取了指定的三分之一部分AF。

这就是所要作的。

命题**10**

分一给定的未分直线，使它相似于一条给定的已分直线。

To cut a given uncut straight line similarly to a given cut straight line.



设AB是给定的未分直线，且直线AC被截于点D、E；并设它们交成任意角；

连接CB，过D、E作DF、EG平行于BC，过D作DHK平行于AB。

[I. 31]

因此，图形FH、HB中的每一个都是平行四边形；

因此，DH等于FG，且HK等于GB。

[I. 34]

现在，由于已作直线HE平行于三角形DKC的一边KC，

因此，按照比例，CE比ED如同KH比HD。

[VI. 2]

但KH等于BG，且HD等于GF；

因此，CE比ED如同BG比GF。

又，由于已作FD平行于三角形AGE的一边GE，

因此，按照比例，ED比DA如同GF比FA。

[VI. 2]

但已证明，CE比ED如同BG比GF；

因此，CE比ED如同BG比GF，

ED比DA如同GF比FA。

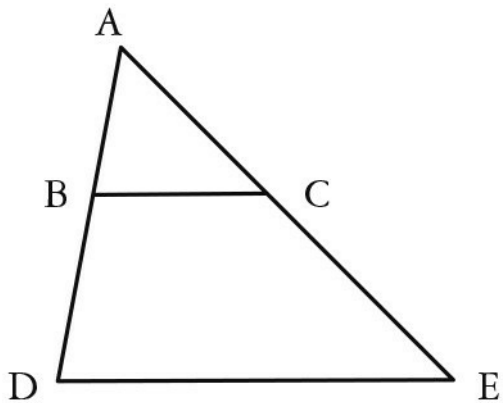
这样便把给定的未分直线AB分成了与给定的已分直线AC相似的直线。

这就是所要作的。

命题**11**

求作两条给定直线的第三比例项。

To two given straight lines to find a third proportional.



设BA、AC是两条给定的直线，并设它们交成任意角；

于是，要求作BA、AC的第三比例项。

延长它们到点D、E，

并且取BD等于AC；

[I. 3]

连接BC，

过D作DE平行于BC。

[I. 31]

于是，由于已作BC平行于三角形ADE的一边DE，

按照比例，AB比BD如同AC比CE。

[VI. 2]

但BD等于AC；

因此，AB比AC如同AC比CE。

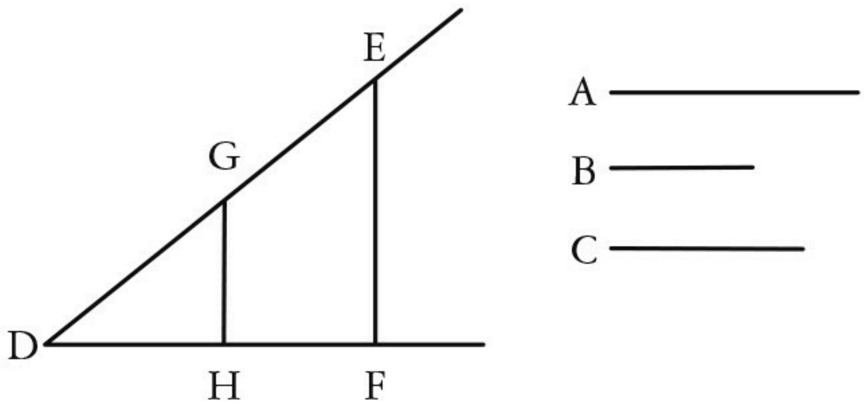
这样便对两条给定的直线AB、AC作出了它们的第三比例项CE。

这就是所要作的。

命题**12**

求作三条给定直线的第四比例项。

To three given straight lines to find a fourth proportional.



设A、B、C是三条给定的直线；

于是，要求作A、B、C的第四比例项。

设两条直线DE、DF交成任意角EDF；

取DG等于A，GE等于B，且DH等于C；

连接GH，过E作EF平行于它。

[I. 31]

于是，由于已作GH平行于三角形DEF的一边EF，

因此，DG比GE如同DH比HF。

[VI. 2]

但DG等于A，GE等于B，且DH等于C；

因此，A比B如同C比HF。

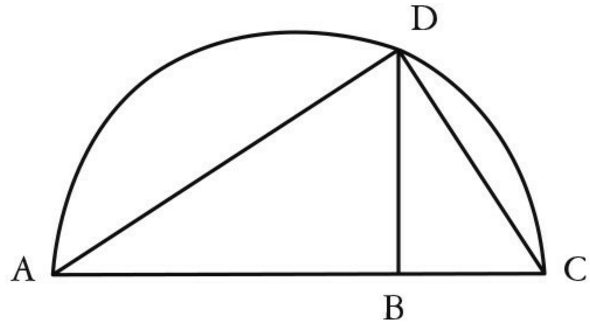
这样便对三条给定的直线A、B、C作出了第四比例项HF。

这就是所要作的。

命题**13**

求作两条给定直线的比例中项。

To two given straight lines to find a mean proportional.



设AB、BC是两条给定的直线；

于是，要求作AB、BC的比例中项。

设它们在同一直线上，并且在AC上作半圆ADC；

在点B处作BD与直线AC成直角，

并且连接AD、DC。

由于角ADC是半圆上的角，所以它是直角。

[III. 31]

又，由于在直角三角形ADC中，已作DB垂直于底，

因此，DB是底段AB、BC的比例中项。

[VI. 8，推论]

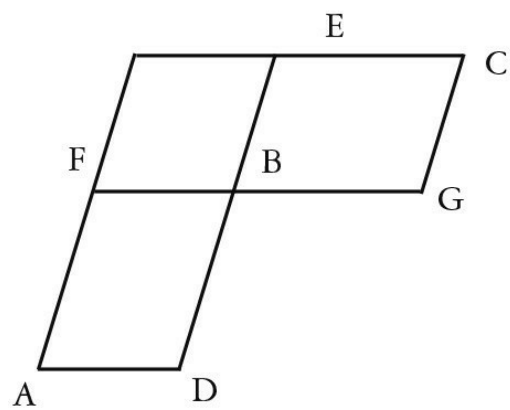
这样便对两条给定的直线AB、BC作出了比例中项DB。

这就是所要作的。

命题**14**

在相等且等角的平行四边形中，夹等角的边成互反比例；在等角的平行四边形中，若夹等角的边成互反比例，则它们相等。

In equal and equiangular parallelograms the sides about the equal angles are reciprocally proportional; and equiangular parallelograms in which the sides about the equal angles are reciprocally proportional are equal.



设AB、BC是相等且等角的平行四边形，且B处的角相等，

又设DB、BE在同一直线上；

因此，FB、BG也在同一直线上。

[I. 14]

我说，在AB、BC中，夹等角的边成互反比例，也就是说，DB比BE如同GB比BF。这是因为，将平行四边形FE补充完整。

于是，由于平行四边形AB等于平行四边形BC，

且FE是另一个面，

因此，AB比FE如同BC比FE。

[V. 7]

但AB比FE如同DB比BE，

[VI. 1]

且BC比FE如同GB比BF，

[VI. 1]

因此也有，DB比BE如同GB比BF。

[V. 11]

因此，在平行四边形AB、BC中，夹等角的边成互反比例。

其次，设BG比BF如同DB比BE；

我说，平行四边形AB等于平行四边形BC。

这是因为，由于DB比BE如同GB比BF，

而DB比BE如同平行四边形AB比平行四边形FE，

[VI. 1]

且BG比BF如同平行四边形BC比平行四边形FE，

[VI. 1]

因此也有，AB比FE如同BC比FE；

[V. 11]

因此，平行四边形AB等于平行四边形BC。

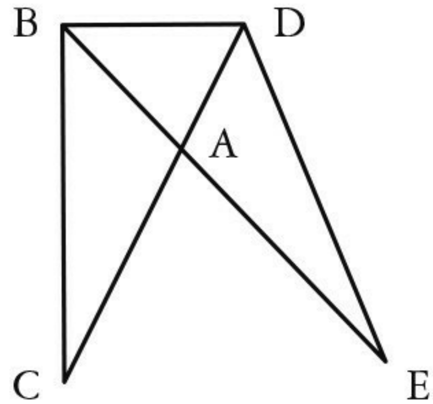
[V. 9]

这就是所要证明的。

命题**15**

在有一个角彼此相等的相等的三角形中，夹等角的边成互反比例；
又，有一个角彼此相等且夹等角的边成互反比例的三角形是相等的。

In equal triangles which have one angle equal to one angle the sides about the equal angles are reciprocally proportional; and those triangles which have one angle equal to one angle, and in which the sides about the equal angles are reciprocally proportional, are equal.



设ABC、ADE是相等的三角形，且有一个角彼此相等，即角BAC等于角DAE；

我说，在三角形ABC、ADE中，夹等角的边成互反比例，

也就是说，CA比AD如同EA比AB。

这是因为，设CA和AD在同一直线上；

因此，EA和AB也在同一直线上。

[I. 14]

连接BD。

于是，由于三角形ABC等于三角形ADE，且BAD是另一个面，

因此，三角形CAB比三角形BAD如同三角形EAD比三角形BAD。

[V. 7]

但CAB比BAD如同CA比AD，

[VI. 1]

且EAD比BAD如同EA比AB。

[VI. 1]

因此也有，CA比AD如同EA比AB。

[V. 11]

于是，在三角形ABC、ADE中，夹等角的边成互反比例。

其次，设三角形ABC、ADE的边成互反比例，也就是说，设EA比AB如同CA比AD；

我说，三角形ABC等于三角形ADE。

这是因为，如果再连接BD，

由于CA比AD如同EA比AB，

而CA比AD如同三角形ABC比三角形BAD，

且EA比AB如同三角形EAD比三角形BAD，

[VI. 1]

因此，三角形ABC比三角形BAD如同三角形EAD比三角形BAD。

[V. 11]

因此，三角形ABC、EAD中的每一个都与BAD有相同的比。

因此，三角形ABC等于三角形EAD。

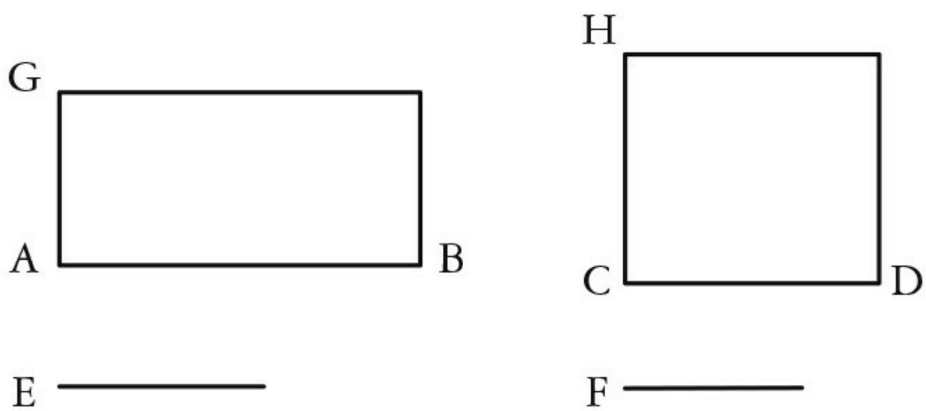
[V. 9]

这就是所要证明的。

命题**16**

若四条直线成比例，则两外项所围成的矩形等于两内项所围成的矩形；又，若两外项所围成的矩形等于两内项所围成的矩形，则四条直线成比例。

If four straight lines be proportional, the rectangle contained by the extremes is equal to the rectangle contained by the means; and, if the rectangle contained by the extremes be equal to the rectangle contained by the means, the four straight lines will be proportional.



设四条直线AB、CD、E、F成比例，因此AB比CD如同E比F；

我说，AB、F所围成的矩形等于CD、E所围成的矩形。

从点A、C作AG、CH与直线AB、CD成直角，且取AG等于F，CH等于E。

将平行四边形BG、DH补充完整。

于是，由于AB比CD如同E比F，

而E等于CH，且F等于AG，

因此，AB比CD如同CH比AG。

因此，在平行四边形BG、DH中，夹等角的边成互反比例。

但在这两个等角的平行四边形中，若夹等角的边成互反比例，则它们是相等的；

[VI. 14]

因此，平行四边形BG等于平行四边形DH。

又，BG是矩形AB、F，这是因为AG等于F；

且DH是矩形CD、E，这是因为E等于CH；

因此，AB、F所围成的矩形等于CD、E所围成的矩形；

其次，设AB、F所围成的矩形等于CD、E所围成的矩形；

我说，这四条直线成比例，因此AB比CD如同E比F。

这是因为，同样作图，

由于矩形AB、F等于矩形CD、E，

且矩形AB、F是BG，这是因为AG等于F，

且矩形CD、E是DH，这是因为CH等于E，

因此，BG等于DH。

且它们是等角的。

但在相等且等角的平行四边形中，夹等角的边成互反比例。

[VI. 14]

因此，AB比CD如同CH比AG。

但CH等于E且AG等于F；

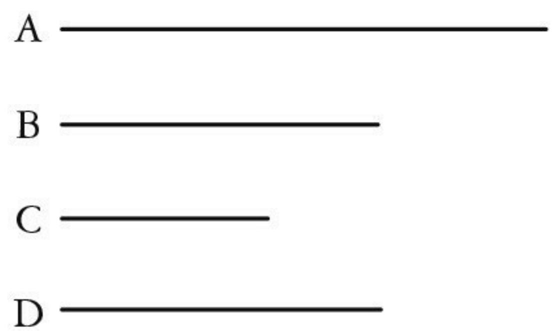
因此，AB比CD如同E比F。

这就是所要证明的。

命题**17**

若三条直线成比例，则两外项所围成的矩形等于中项上的正方形；又，若两外项所围成的矩形等于中项上的正方形，则这三条直线成比例。

If three straight lines be proportional, the rectangle contained by the extremes is equal to the square on the mean; and, if the rectangle contained by the extremes be equal to the square on the mean, the three straight lines will be proportional.



设三条直线A、B、C成比例，因此A比B如同B比C；

我说，A、C所围成的矩形等于B上的正方形。

取D等于B。

于是，由于A比B如同B比C，

且B等于D，

因此，A比B如同D比C。

但若四条直线成比例，则两外项所围成的矩形等于两内项所围成的矩形。

[VI. 16]

因此，矩形A、C等于矩形B、D。

但矩形B、D是B上的正方形，这是因为B等于D；

因此，A、C所围成的矩形等于B上的正方形。

其次，设矩形A、C等于B上的正方形；

我说，A比B如同B比C。

这是因为，用同样的作图，

由于矩形A、C等于B上的正方形，

而B上的正方形是矩形B、D，这是因为B等于D，

因此，矩形A、C等于矩形B、D。

但若两外项所围成的矩形等于两内项所围成的矩形，则这四条直线成比例；

[VI. 16]

因此，A比B如同D比C。

但B等于D；

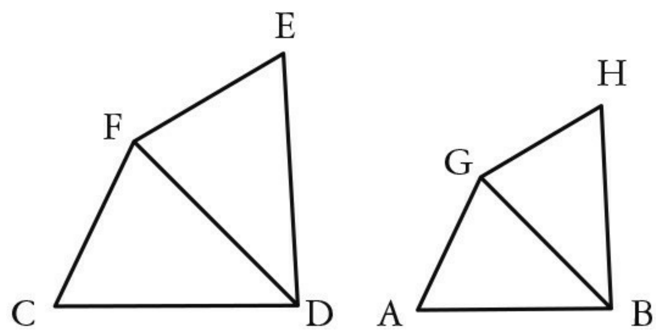
因此，A比B如同B比C。

这就是所要证明的。

命题**18**

在给定直线上作一直线形，使之与给定的直线形相似且有相似位置。

On a given straight line to describe a rectilineal figure similar and similarly situated to a given rectilineal figure.



设AB是给定的直线，CE是给定的直线形；

于是，要求在直线AB上作一个与直线形CE相似且有相似位置的直线形。

连接DF，在直线AB上的点A、B处作角GAB等于C处的角，且角ABG等于角CDF。

[I. 23]

因此，其余的角CFD等于角AGB；

[I. 32]

因此，三角形FCD与三角形GAB是等角的。

因此，按照比例，FD比BG如同FC比GA，又如同CD比AB。

又，在直线BG上的点B、G处作角BGH等于角DFE，以及角GBH等于角FDE。

[I. 23]

因此，其余的E处的角等于H处的角；

[I. 32]

因此，三角形FDE与三角形GBH是等角的；

因此，按照比例，FD比GB如同FE比GH，又如同ED比HB。

[VI. 4]

但已证明，FD比GB如同FC比GA，又如同CD比AB；

因此也有，FC比AG如同CD比AB，又如同FE比GH，又如同ED比HB。

又，由于角CFD等于角AGB，

且角DFE等于角BGH，

因此，整个角CFE等于整个角AGH。

同理，

角CDE也等于角ABH。

而C处的角也等于A处的角，

且E处的角等于H处的角。

因此，AH与CE是等角的；

而它们夹等角的边成比例；

因此，直线形AH相似于直线形CE。

[VI. 定义1]

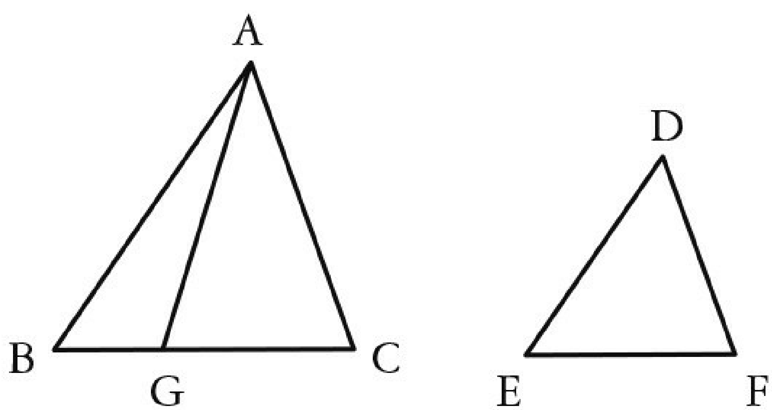
这样便在给定的直线AB上作出了直线形AH，它与给定的直线形CE相似且有相似位置。

这就是所要作的。

命题**19**

相似三角形彼此之比是对应边之比的二倍比。

Similar triangles are to one another in the duplicate ratio of the corresponding sides.



设ABC、DEF是相似三角形，B处的角等于E处的角，因此AB比BC如同DE比EF，因此BC对应EF；

[V. 定义11]

我说，三角形ABC比三角形DEF是BC比EF的二倍比。

这是因为，取BC、EF的第三比例项为BG，因此BC比EF如同EF比BG；

[VI. 11]

连接AG。

于是，由于AB比BC如同DE比EF，

因此，取更比例，AB比DE如同BC比EF。

[V. 16]

但BC比EF如同EF比BG；

因此也有，AB比DE如同EF比BG。

[V. 11]

因此，在三角形ABG、DEF中，夹等角的边成互反比例。

但有一个角彼此相等且夹等角的边成互反比例的三角形是相等的；

[VI. 15]

因此，三角形ABG等于三角形DEF。

现在，由于BC比EF如同EF比BG，

且若三条直线成比例，则第一条比第三条是第一条比第二条的二倍比。

[V. 定义9]

因此，BC比BG是CB比EF的二倍比。

但CB比BG如同三角形ABC比三角形ABG；

[VI. 1]

因此，三角形ABC比三角形ABG是BC比EF的二倍比。

但三角形ABG等于三角形DEF；

因此，三角形ABC比三角形DEF也是BC比EF的二倍比。

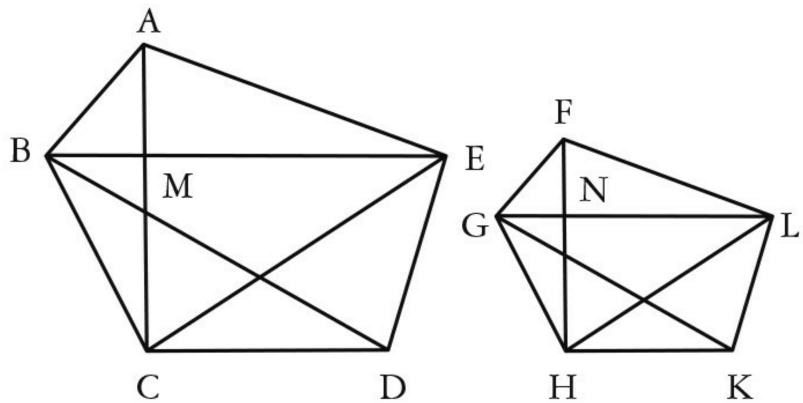
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若三条直线成比例，则第一条直线比第三条直线如同在第一条直线上所作的图形比在第二条直线上所作的与之相似且有相似位置的图形。

命题**20**

相似多边形被分成同样多个相似三角形，则对应三角形之比如同整个多边形之比，多边形与多边形之比是对应边与对应边之比的二倍比。

Similar polygons are divided into similar triangles, and into triangles equal in multitude and in the same ratio as the wholes, and the polygon has to the polygon a ratio duplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side.



设ABCDE、FGHKL是相似多边形，且设AB对应于FG；

我说，多边形ABCDE、FGHKL被分成同样多个相似三角形，相似三角形之比如同整个多边形之比，多边形ABCDE比多边形FGHKL是AB比FG的二倍比。

连接BE、EC、GL、LH。

现在，由于多边形ABCDE相似于多边形FGHKL，所以

角BAE等于角GFL；

且BA比AE如同GF比FL。

[VI. 定义1]

于是，由于ABE、FGL这两个三角形有一个对应的角相等，且夹等角的边成比例，

因此，三角形ABE与三角形FGL是等角的；

[VI. 6]

因此也是相似的；

[VI. 4和定义1]

因此，角ABE等于角FGL。

而整个角ABC也等于整个角FGH，这是因为多边形是相似的；

因此，其余的角EBC等于角LGH。

又，由于三角形ABE、FGL是相似的，所以

EB比BA如同LG比FG，

以及由于多边形是相似的，所以

AB比BC如同FG比GH，

因此，取首末比例，EB比BC如同LG比GH；

[V. 22]

也就是说，夹等角EBC、LGH的边成比例；

因此，三角形EBC与三角形LGH是等角的，

[VI. 6]

因此，三角形EBC也相似于三角形LGH。

[VI. 4和定义1]

同理，

三角形ECD也相似于三角形LHK。

因此，相似多边形ABCDE、FGHKL被分成同样多个相似三角形。

我说，它们之比如同整个多边形之比，即各个三角形成比例，ABE、EBC、ECD是前项，而FGL、LGH、LHK是其后项，多边形ABCDE比多边形FGHKL是对应边比对应边的二倍比，即AB比FG的二倍比。

连接AC、FH。

于是，由于多边形是相似的，

角ABC等于角FGH，

AB比BC如同FG比GH，所以

三角形ABC与三角形FGH是等角的；

[VI. 6]

因此，角BAC等于角GFH，

角BCA等于角GHF。

又，由于角BAM等于角GFN，

角ABM也等于角FGN，

因此，其余的角AMB也等于其余的角FNG；

[I. 32]

因此，三角形ABM与三角形FGN是等角的。

类似地，可以证明，

三角形BMC与三角形GNH也是等角的。

因此，按照比例，

AM比MB如同FN比NG，

BM比MC如同GN比NH；

因此，按照首末比例，

AM比MC如同FN比NH。

但AM比MC如同三角形ABM比MBC，又如同AME比EMC；这是因为它们彼此之比如同其底之比。

[VI. 1]

因此也有，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[V. 12]

因此，三角形AMB比BMC如同ABE比CBE。

但AMB比BMC如同AM比MC；

因此也有，AM比MC如同三角形ABE比三角形EBC。

同理也有，

FN比NH如同三角形FGL比三角形GLH。

又，AM比MC如同FN比NH；

因此也有，三角形ABE比三角形BEC如同三角形FGL比三角形GLH；

取更比例，三角形ABE比三角形FGL如同三角形BEC比三角形GLH。

类似地，可以证明，如果连接BD、GK，那么三角形BEC比三角形LGH也如同三角形ECD比三角形LHK。

又，由于三角形ABE比三角形FGL如同EBC比LGH，又如同ECD比LHK，

因此也有，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[V. 12]

因此，三角形ABE比三角形FGL如同多边形ABCDE比多边形FGHKL。

但三角形ABE比三角形FGL是对应边AB比对应边FG的二倍比；这是因为相似三角形之比是对应边之比的二倍比。

[VI. 19]

因此，多边形ABCDE比多边形FGHKL也是对应边AB比对应边FG的二倍比。

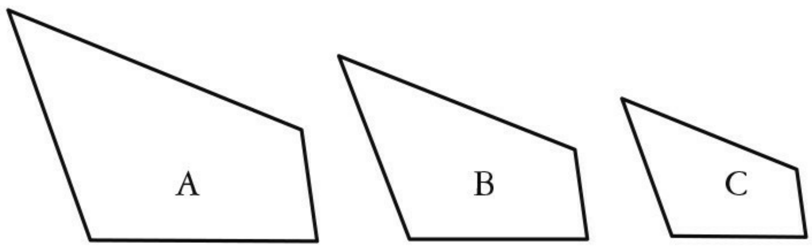
这就是所要证明的。

推论　类似地，可以证明，四边形与四边形之比是对应边之比的二倍比。前已证明三角形的情况；因此一般地也有，相似直线形彼此之比是对应边之比的二倍比。

命题**21**

与同一直线形相似的图形也彼此相似。

Figures which are similar to the same rectilineal figure are also similar to one another.



设直线形A、B中的每一个都与C相似；

我说，A与B也相似。

这是因为，由于A与C相似，所以

它们是等角的且夹等角的边成比例；

[VI. 定义1]

又，由于B与C相似，所以

它们是等角的且夹等角的边成比例。

因此，图形A、B中的每一个都与C是等角的且夹等角的边成比例；

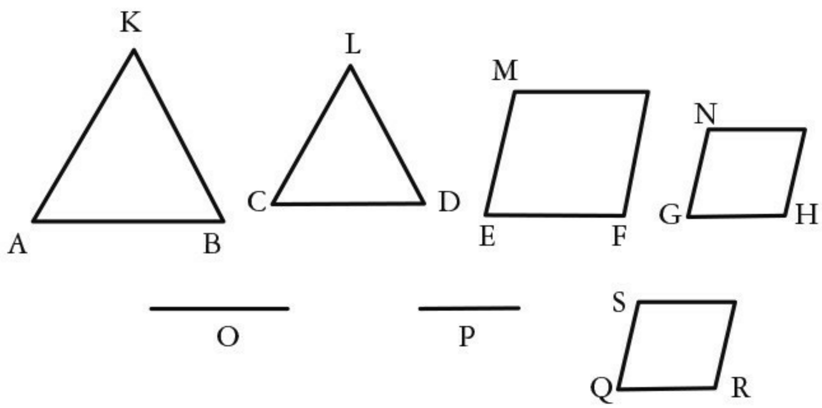
因此，A与B相似。

这就是所要证明的。

命题**22**

若四条直线成比例，则在它们上面所作的相似且有相似位置的直线形也成比例；又，若在各直线上所作的相似且有相似位置的直线形成比例，则这些直线本身也成比例。

If four straight lines be proportional, the rectilineal figures similar and similarly described upon them will also be proportional; and, if the rectilineal figures similar and similarly described upon them be proportional, the straight lines will themselves also be proportional.



设四条直线AB、CD、EF、GH成比例，因此

AB比CD如同EF比GH，

在AB、CD上作相似且有相似位置的直线形KAB、LCD，

又在EF、GH上作相似且有相似位置的直线形MF、NH；

我说，KAB比LCD如同MF比NH。

这是因为，取AB、CD的第三比例项O，

以及取EF、GH的第三比例项P，

[VI. 11]

于是，由于AB比CD如同EF比GH，

且CD比O如同GH比P，

因此，取首末比例，AB比O如同EF比P。

[V. 22]

但AB比O如同KAB比LCD，

[VI. 19，推论]

且EF比P如同MF比NH；

因此也有，KAB比LCD如同MF比NH。

[V. 11]

其次，设MF比NH如同KAB比LCD；

我也说，AB比CD如同EF比GH。

这是因为，如果EF比GH不如同AB比CD，

设EF比QR如同AB比CD，

[VI. 12]

且在QR上作直线形SR与MF、NH中的任何一个相似且有相似位置。

[VI. 18]

于是，由于AB比CD如同EF比QR，

且已在AB、CD上作相似且有相似位置的图形KAB、LCD，

以及在EF、QR上作相似且有相似位置的图形MF、SR，

因此，KAB比LCD如同MF比SR。

但根据假设也有，

KAB比LCD如同MF比NH；

因此也有，MF比SR如同MF比NH。

[V. 11]

因此，MF比图形NH、SR中的每一个有相同的比；

因此，NH等于SR。

[V. 9]

但它们也相似且有相似位置；

因此，GH等于QR。

又，由于AB比CD如同EF比QR，

而QR等于GH，

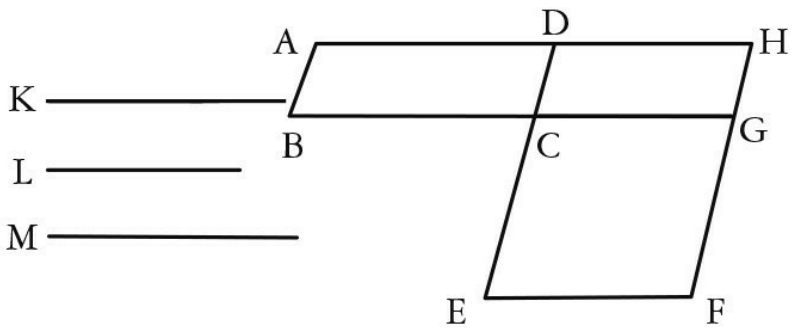
因此，AB比CD如同EF比GH。

这就是所要证明的。

命题**23**

等角的平行四边形彼此之比是其边之比的复比。

Equiangular parallelograms have to one another the ratio compounded of the ratios of their sides.



设AC、CF是等角的平行四边形，角BCD等于角ECG；

我说，平行四边形AC比平行四边形CF是其边之比的复比。

这是因为，设BC与CG在同一直线上；

因此，DC与CE也在同一直线上。

将平行四边形DG补充完整；

设计一条直线K，使得

BC比CG如同K比L，

且DC比CE如同L比M。

[VI. 12]

于是，K比L与L比M如同边与边之比，即BC比CG与DC比CE。

但K比M是K比L与L比M的复比；

因此，K比M是边与边之比的复比。

现在，由于BC比CG如同平行四边形AC比平行四边形CH，

[VI. 1]

而BC比CG如同K比L，

因此也有，K比L如同AC比CH。

[V. 11]

又，由于DC比CE如同平行四边形CH比CF，

[VI. 1]

而DC比CE如同L比M，

因此也有，L比M如同平行四边形CH比平行四边形CF。

[V. 11]

于是，由于已经证明，K比L如同平行四边形AC比平行四边形CH，

且L比M如同平行四边形CH比平行四边形CF，

因此，取首末比例，K比M如同平行四边形AC比平行四边形CF。

但K比M是边与边之比的复比；

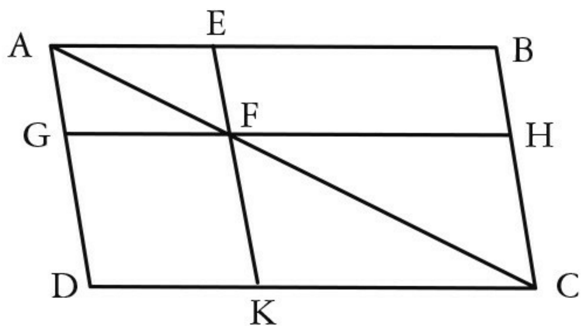
因此，AC比CF也是边与边之比的复比。

这就是所要证明的。

命题**24**

在任何平行四边形中，对角线周围的平行四边形既与整个平行四边形相似，又彼此相似。

In any parallelogram the parallelograms about the diameter are similar both to the whole and to one another.



设ABCD是平行四边形，AC是其对角线，又设EG、HK是AC周围的平行四边形；

我说，平行四边形EG、HK中的每一个都既与整个平行四边形ABCD相似，又彼此相似。

这是因为，由于已作EF平行于三角形ABC的一边BC，所以

按照比例，BE比EA如同CF比FA。

[VI. 2]

又，由于已作FG平行于三角形ACD的一边CD，所以

按照比例，CF比FA如同DG比GA。

[VI. 2]

但已证明，CF比FA如同BE比EA；

因此也有，BE比EA如同DG比GA，

因此取合比例，

BA比AE如同DA比AG，

[V. 18]

根据更比例，

BA比AD如同EA比AG。

[V. 16]

因此，在平行四边形ABCD、EG中，夹公共角BAD的各边成比例。

又，由于GF平行于DC，所以

角AFG等于角DCA；

且角DAC是两个三角形ADC、AGF的公共角；

因此，三角形ADC与三角形AGF是等角的。

同理，

三角形ACB与三角形AFE也是等角的，

且整个平行四边形ABCD与平行四边形EG是等角的。

因此，按照比例，

AD比DC如同AG比GF，

DC比CA如同GF比FA，

AC比CB如同AF比FE，

以及，CB比BA如同FE比EA。

又，由于已经证明，DC比CA如同GF比FA，

且AC比CB如同AF比FE，

因此，按照首末比例，DC比CB如同GF比FE。

[V. 22]

因此，在平行四边形ABCD、EG中，夹等角的边成比例；

因此，平行四边形ABCD相似于平行四边形EG。

[VI. 定义1]

同理，

平行四边形ABCD也相似于平行四边形KH；

因此，平行四边形EG、HK中的每一个都相似于ABCD。

但与同一直线形相似的图形也彼此相似；

[VI. 21]

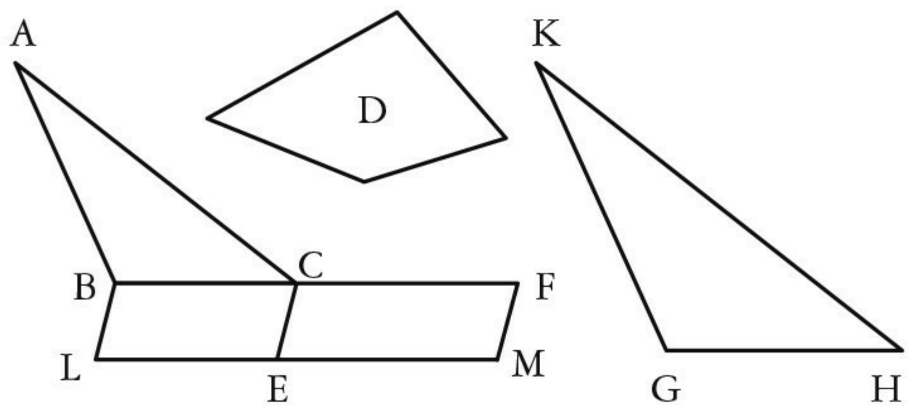
因此，平行四边形EG也相似于平行四边形HK。

这就是所要证明的。

命题**25**

作一个图形既与一给定的直线形相似，又等于另一给定的直线形。

To construct one and the same figure similar to a given rectilineal figure and equal to another given rectilineal figure.



设ABC是给定的直线形，所要作的图形必须既与之相似，又等于另一图形D。

于是，要求作一个图形与ABC相似且等于D。

对BC贴合出平行四边形BE等于三角形ABC，

[I. 44]

又以等于角CBL的角FCE，对CE贴合出平行四边形CM等于D。

[I. 45]

因此，BC与CF在同一直线上，LE与EM在同一直线上。

现在，取GH为BC、CF的比例中项，

[VI. 13]

且在GH上作KGH与ABC相似且有相似位置。

[VI. 18]

于是，由于BC比GH如同GH比CF，

又，若三条直线成比例，则第一条直线比第三条直线如同在第一条直线上所作的图形比在第二条直线上所作的与之相似且有相似位置的图形，

[VI. 19，推论]

因此，BC比CF如同三角形ABC比三角形KGH。

但BC比CF也如同平行四边形BE比平行四边形EF。

[VI. 1]

因此也有，三角形ABC比三角形KGH如同平行四边形BE比平行四边形EF；

因此，按照更比例，三角形ABC比平行四边形BE如同三角形KGH比平行四边形EF。

[V. 16]

但三角形ABC等于平行四边形BE；

因此，三角形KGH也等于平行四边形EF。

但平行四边形EF等于D；

因此，KGH也等于D。

而KGH也相似于ABC。

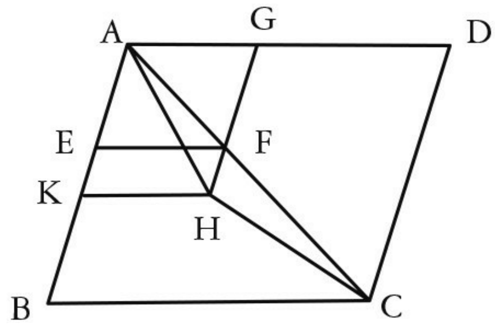
这样便作出了图形KGH，它既与给定的直线形ABC相似，又等于另一给定的图形D。

这就是所要作的。

命题**26**

若从一个平行四边形中取掉一个与整个平行四边形相似、有相似位置且有一个公共角的平行四边形，则它与整个平行四边形有相同的对角线。

If from a parallelogram there be taken away a parallelogram similar and similarly situated to the whole and having a common angle with it, it is about the same diameter with the whole.



从平行四边形ABCD取掉平行四边形AF，它与ABCD相似、有相似位置且有公共角DAB；

我说，ABCD与AF有相同的对角线。

这是因为，假设不是这样，如果可能，设AHC是[ABCD的]对角线，延长GF到H，过H作HK平行于直线AD、BC中的一条，

[I. 31]

于是，由于ABCD与KG有相同的对角线，

因此，DA比AB如同GA比AK。

[VI. 24]

但因为ABCD与EG相似，所以

DA比AB如同GA比AE；

因此也有，

GA比AK如同GA比AE。

[V. 11]

因此，GA与直线AK、AE中的每一条之比有相同的比。

因此，AE等于AK，

[V. 9]

较小的等于较大的：这是不可能的。

因此，ABCD与AF只可能有相同的对角线；

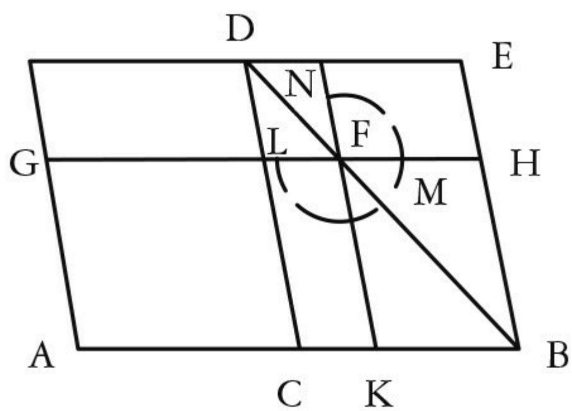
因此，平行四边形ABCD与平行四边形AF有相同的对角线。

这就是所要证明的。

命题**27**

在对同一直线贴合出的、亏缺一个与在半条直线上所作的平行四边形相似且有相似位置的平行四边形的所有平行四边形中，以对半条直线贴合出的那个平行四边形为最大，且与亏缺的图形相似。

Of all the parallelograms applied to the same straight line and deficient by parallelogrammic figures similar and similarly situated to that described on the half of the straight line, that parallelogram is greatest which is applied to the half of the straight line and is similar to the defect.



设AB是一条直线且被二等分于C；平行四边形AD是对直线AB贴合出的、亏缺在AB的一半即CB上所作的平行四边形DB的平行四边形；

我说，对直线AB贴合出的、亏缺与DB相似且有相似位置的平行四边形的所有平行四边形中，AD最大。

对直线AB贴合出平行四边形AF，它亏缺了与DB相似且有相似位置的平行四边形FB；

我说，AD大于AF。

这是因为，由于平行四边形DB相似于平行四边形FB，所以

它们有相同的对角线。

[VI. 26]

作它们的对角线DB，并且作出图形。

于是，由于CF等于FE，

[I. 43]

且FB公用，

因此，整个CH等于整个KE。

但CH等于CG，这是因为AC也等于CB。

[I. 36]

因此，GC也等于EK。

给它们分别加上CF；

因此，整个AF等于拐尺形LMN；

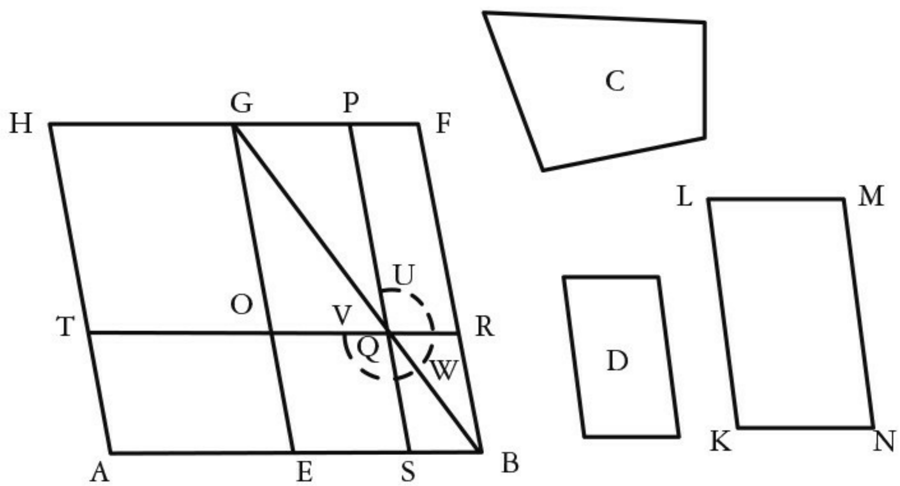
因此，平行四边形DB即AD大于平行四边形AF。

这就是所要证明的。

命题**28**

对一给定的直线贴合出一个平行四边形，它等于给定的直线形，且亏缺一个与给定的平行四边形相似的平行四边形：于是，这个给定的直线形必定不大于在一半直线上所作的、与亏缺的平行四边形相似的平行四边形。

To a given straight line to apply a parallelogram equal to a given rectilineal figure and deficient by a parallelogrammic figure similar to a given one: thus the given rectilineal figure must not be greater than the parallelogram described on the half of the straight line and similar to the defect.



设AB是给定的直线，C是给定的直线形，需要对AB贴合出一个与C相等的平行四边形，C不大于在一半AB上所作的、与亏缺的平行四边形相似的平行四边形，亏缺的平行四边形需要与平行四边形D相似；

于是，要求对给定的直线AB贴合出一个平行四边形等于给定的直线形C，且亏缺一个与D相似的平行四边形。

设AB在点E被二等分，在EB上作EBFG与D相似且有相似位置；

[VI. 18]

将平行四边形AG补充完整。

于是，如果AG等于C，那么就完成了所要求的作图；

这是因为已经对给定的直线AB贴合出了平行四边形AG，它等于给定的直线形C，且亏缺一个与D相似的平行四边形BG。

但如果不是这样，设HE大于C。

现在，HE等于GB；

因此，GB也大于C。

作KLMN等于GB与C之差，它与D相似且有相似位置。

[VI. 25]

但D相似于GB；

因此，KM也相似于GB。

[VI. 21]

于是，设KL对应于GE，LM对应于GF。

现在，由于GB等于C、KM之和，

因此，GB大于KM；

因此也有，GE大于KL，GF大于LM。

取GO等于KL，且GP等于LM；

并将平行四边形OGPQ补充完整；

因此，它等于且相似于KM。

因此，GQ也相似于GB；

[VI. 21]

因此，GQ与GB有相同的对角线。

[VI. 26]

设GQB是它们的对角线，作出该图形。

于是，由于BG等于C、KM之和，

且其中GQ等于KM，

因此，其余部分，即拐尺形UWV，等于其余部分C。

又，由于PR等于OS，

给它们分别加上QB；

因此，整个PB等于整个OB；

但OB等于TE，这是因为边AE也等于边EB；

[I. 36]

因此，TE也等于PB。

给它们分别加上OS；

因此，整个TS等于整个拐尺形VWU。

但已证明，拐尺形VWU等于C；

因此，TS也等于C。

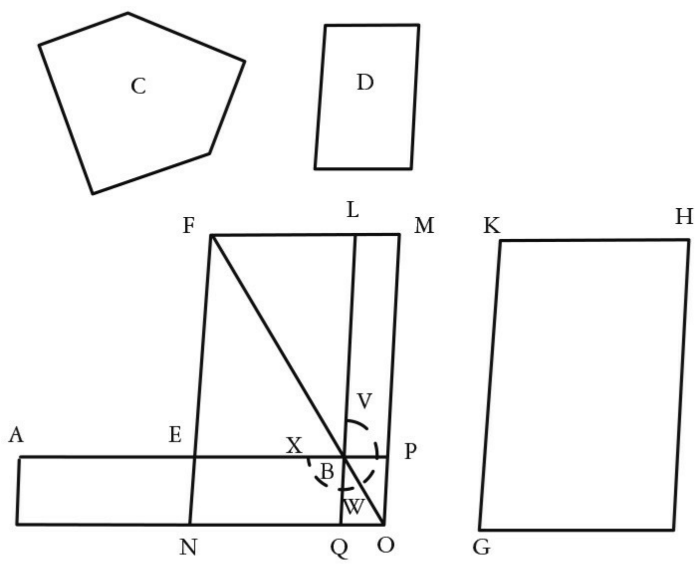
这样便对给定的直线AB贴合出了平行四边形ST，它等于给定的直线形C，且亏缺了一个与D相似的平行四边形QB。

这就是所要作的。

命题**29**

对一给定的直线贴合出一个平行四边形等于给定的直线形，并且超出一个与给定的平行四边形相似的平行四边形。

To a given straight line to apply a parallelogram equal to a given rectilineal figure and exceeding by a parallelogrammic figure similar to a given one.



设AB是给定的直线，C是给定的直线形，对AB贴合出的平行四边形需要与C相等，D是超出的平行四边形需要与之相似的平行四边形。

于是，要求对直线AB贴合出一个平行四边形，它等于直线形C，并且超出一个与D相似的平行四边形。

设AB被二等分于E；

在EB上作平行四边形BF与D相似且有相似位置；

又作GH等于BF与C之和，并与D相似且有相似位置。

[VI. 25]

设KH对应于FL，且KG对应于FE。

现在，由于GH大于FB，

因此，KH也大于FL，且KG大于FE。

延长FL、FE，

设FLM等于KH，且FEN等于KG，

将平行四边形MN补充完整；

因此，MN等于且相似于GH。

但GH相似于EL；

因此，MN也相似于EL；

[VI. 21]

因此，EL与MN有相同的对角线。

[VI. 26]

作它们的对角线FO，并且作出图形。

由于GH等于EL与C之和，

而GH等于MN，

因此，MN也等于EL与C之和。

从它们中各减去EL；

因此，其余部分即拐尺形XWV等于C。

现在，由于AE等于EB，所以

AN也等于NB，

[I. 36]

即等于LP。

[I. 43]

给它们分别加上EO；

因此，整个AO等于拐尺形VWX。

但拐尺形VWX等于C；

因此，AO也等于C。

这样便对给定的直线AB贴合出平行四边形AO，它等于给定的直线形C，并且超出一个与D相似的平行四边形QP，因为PQ也相似于EL。

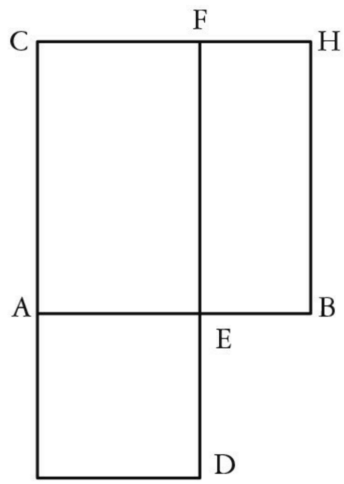
[VI. 24]

这就是所要作的。

命题**30**

将一给定的有限直线分成中外比。

To cut a given finite straight line in extreme and mean ratio.



设AB是给定的有限直线；

于是，要求将AB分成中外比。

在AB上作正方形BC；对AC贴合出平行四边形CD等于BC，且超出的图形AD相似于BC。

[VI. 29]

现在，BC是正方形；

因此，AD也是正方形。

又，由于BC等于CD，

从它们中各减去CE；

因此，其余部分BF等于其余部分AD。

但它们也是等角的；

因此，在BF、AD中，夹等角的边成互反比例；

[VI. 14]

因此，FE比ED如同AE比EB。

但FE等于AB，且ED等于AE。

因此，BA比AE如同AE比EB。

而AB大于AE；

因此，AE也大于EB。

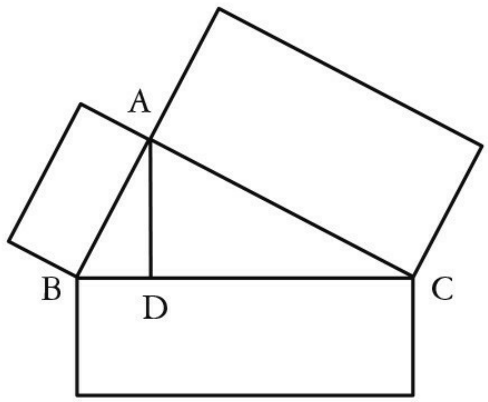
这样直线AB便被点E分成了中外比，AE是较大的线段。

这就是所要作的。

命题**31**

在直角三角形中，直角所对边上的图形等于夹直角的边上相似且有相似位置的图形之和。

In right-angled triangles the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.



设ABC是有直角BAC的直角三角形；

我说，BC上的图形等于BA、AC上相似且有相似位置的图形之和。

作垂线AD。

于是，由于在直角三角形ABC中，已从A处的直角作AD垂直于底BC，所以

垂线两边的三角形ABD、ADC既与整个ABC相似，也彼此相似。

[VI. 8]

又，由于ABC相似于ABD，

因此，CB比BA如同AB比BD。

[VI. 定义1]

又，由于三条直线成比例，所以

第一条直线比第三条直线如同在第一条直线上所作的图形比在第二条直线上所作的与之相似且有相似位置的图形。

[VI. 19，推论]

因此，CB比BD如同CB上的图形比BA上相似且有相似位置的图形。

同理也有，

BC比CD如同BC上的图形比CA上的图形；

因此还有，

BC比BD、DC之和如同BC上的图形比BA、AC上相似且有相似位置的图形之和。

[V. 24]

但BC等于BD、DC之和；

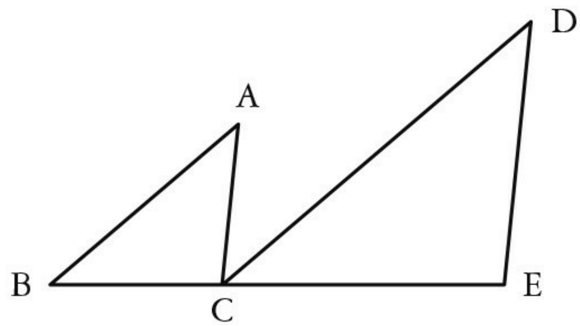
因此，BC上的图形也等于BA、AC上相似且有相似位置的图形之和。

这就是所要证明的。

命题**32**

若有两边彼此成比例的两个三角形在一个角被放置在一起，使得对应的边也平行，则这两个三角形的其余边在同一直线上。

If two triangles having two sides proportional to two sides be placed together at one angle so that their corresponding sides are also parallel, the remaining sides of the triangles will be in a straight line.



设ABC、DCE这两个三角形的两边BA、AC与两边DC、DE成比例，因此AB比AC如同DC比DE，且AB平行于DC，AC平行于DE；

我说，BC与CE在同一直线上。

这是因为，由于AB平行于DC，

且直线AC与它们相交，所以错角BAC、ACD彼此相等。

[I. 29]

同理，

角CDE也等于角ACD；

因此，角BAC等于角CDE。

又，由于ABC、DCE这两个三角形在A处的角等于在D处的角，

且夹等角的边成比例，

因此BA比AC如同CD比DE，

因此，三角形ABC与三角形DCE是等角的；

[VI. 6]

因此，角ABC等于角DCE。

但已证明，角ACD等于角BAC；

因此，整个角ACE等于两个角ABC、BAC之和。

给它们分别加上角ACB；

因此，角ACE、ACB之和等于角BAC、ACB、CBA之和。

但角BAC、ABC、ACB之和等于两直角；

[I. 32]

因此，角ACE、ACB之和也等于两直角。

因此，在直线AC上的点C处，两直线BC、CE不在直线AC的同侧，且和AC所成邻角ACE与ACB之和等于两直角；

因此，BC与CE在同一直线上。

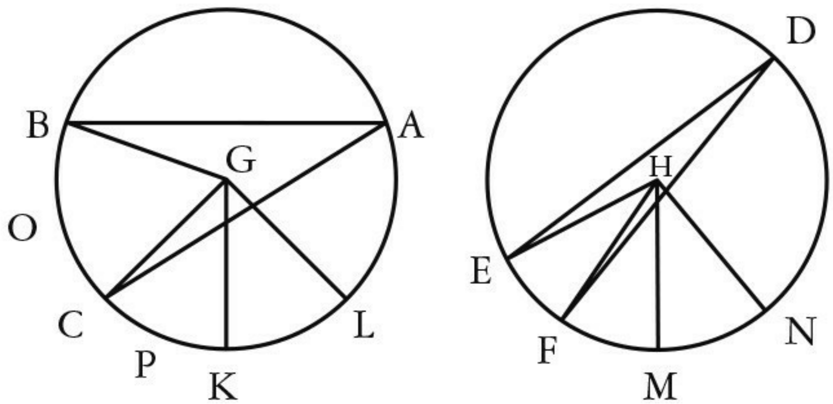
[I. 14]

这就是所要证明的。

命题**33**

在等圆中，圆心角或圆周角之比如同它们所对圆周之比。

In equal circles angles have the same ratio as the circumferences on which they stand, whether they stand at the centres or at the circumferences.



设ABC、DEF是等圆，角BGC、EHF是圆心G、H处的角，角BAC、EDF是圆周角；

我说，圆周BC比圆周EF如同角BGC比角EHF，也如同角BAC比角EDF。

这是因为，取任意多个连续的圆周CK、KL等于圆周BC，

并取任意多个连续的圆周FM、MN等于圆周EF；

连接GK、GL、HM、HN。

于是，由于圆周BC、CK、KL彼此相等，所以

角BGC、CGK、KGL也彼此相等；

[III. 27]

因此，圆周BL是BC的多少倍，角BGL也是角BGC的多少倍。

同理也有，

圆周NE是EF的多少倍，角NHE也是角EHF的多少倍。

于是，如果圆周BL等于圆周EN，那么

角BGL也等于角EHN；

[III. 27]

如果圆周BL大于圆周EN，那么角BGL也大于角EHN；

如果圆周BL小于圆周EN，那么角BGL也小于角EHN。

于是有四个量，两个圆周BC、EF，以及两个角BGC、EHF，

已取圆周BC和角BGC的等倍量，即圆周BL和角BGL，

又，已取圆周EF和角EHF的等倍量，即圆周EN和角EHN。

已经证明，

如果圆周BL大于圆周EN，那么

角BGL也大于角EHN；

如果圆周BL等于圆周EN，那么

角BGL也等于角EHN；

如果圆周BL小于圆周EN，那么

角BGL也小于角EHN。

因此，圆周BC比EF如同角BGC比角EHF。

[V. 定义5]

但角BGC比角EHF如同角BAC比角EDF；这是因为它们分别是二倍。

因此也有，圆周BC比圆周EF如同角BGC比角EHF，又如同角BAC比角EDF。

这就是所要证明的。

第七卷

定义 **Definitions**

01 / 每一个存在的事物凭借单元而被称为一。

An *unit* is that by virtue of which each of the things that exist is called one.

02 / 一个数是由若干单元组成的“多少”。

A *number* is a multitude composed of units.

03 / 一个较小数量尽较大数时，是较大数的一部分；

A number is *a part* of a number, the less of the greater, when it measures the greater;

04 / 但一个较小数量不尽较大数时，是较大数的几部分。

but *parts* when it does not measure it.

05 / 较大数被较小数量尽时，是较小数的一个倍数。

The greater number is a *multiple* of the less when it is measured by the less.

06 / 偶数是能被分成两个相等部分的数。

An *even number* is that which is divisible into two equal parts.

07 / 奇数是不能被分成两个相等部分的数，或者与一个偶数相差一个单元的数。

An *odd number* is that which is not divisible into two equal parts, or that which differs by an unit from an even number.

08 / 偶倍偶数是被一个偶数按照偶数量尽的数。

An *even-times even number* is that which is measured by an even number according to an even number.

09 / 偶倍奇数是被一个偶数按照奇数量尽的数。

An *even-times odd number* is that which is measured by an even number according to an odd number.

10 / 奇倍奇数是被一个奇数按照奇数量尽的数。

An *odd-times odd number* is that which is measured by an odd number according to an odd number.

11 / 素数是只能被单元量尽的数。

A *prime number* is that which is measured by an unit alone.

12 / 互素的数是只能被作为公度的一个单元量尽的那些数。

Numbers *prime to one another* are those which are measured by an unit alone as a common measure.

13 / 合数是能被某个数量尽的数。

A *composite number* is that which is measured by some number.

14 / 互合的数是能被作为公度的某个数量尽的那些数。

Numbers *composite to one another* are those which are measured by some number as a common measure.

15 / 所谓一个数乘一个数，就是被乘数自身相加另一个数中单元的个数那么多次，从而得出某个数。

A number is said to *multiply* a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is produced.

16 / 当两数相乘得出某个数时，得出的数叫作面数，它的边就是相乘的两数。

And, when two numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is called *plane*, and its *sides* are the numbers which have multiplied one another.

17 / 当三数相乘得出某个数时，得出的数叫作体数，它的边就是相乘的三数。

And, when three numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is *solid*, and its *sides* are the numbers which have multiplied one another.

18 / 平方数是相等数乘相等数，或由两个相等数所包含的数。

A *square number* is equal multiplied by equal, or a number which is

contained by two equal numbers.

19 / 立方数是相等数乘相等数再乘相等数，或由三个相等数所包含的数。

And a *cube* is equal multiplied by equal and again by equal, or a number which is contained by three equal numbers.

20 / 当第一个数是第二个数的某倍、某一部分或某几部分，第三个数也是第四个数的同样倍数、一部分或几部分时，这四个数成比例。

Numbers are *proportional* when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts, of the second that the third is of the fourth.

21 / 相似的面数和体数是其边成比例的那些面数和体数。

Similar plane and *solid* numbers are those which have their sides proportional.

22 / 完全数是等于其自身所有部分之和的数。

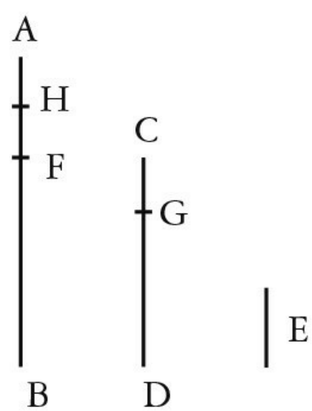
A *perfect number* is that which is equal to its own parts.

命题 **Proposition**

命题**01**

设有两个不相等的数，依次从较大数中不断减去较小数，若余数总是量不尽它前面一个数，直到余数为一个单元，则这两个数互素。

Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to one another.



设有两个不相等的数AB、CD，从较大数中不断减去较小数，设余数总是量不尽它前面一个数，直到余数为一个单元；

我说，AB、CD互素，即只有一个单元能量尽AB、CD。

这是因为，如果AB、CD不互素，则有某个数量尽它们。

设量尽它们的数是E；

用CD量BF，设余数FA小于CD，

又用AF量DG，设余数GC小于AF，

以及用GC量FH，设余数为一个单元HA。

于是，由于E量尽CD，且CD量尽BF，

因此，E也量尽BF。

但E也量尽整个BA；

因此，E也量尽余数AF。

但AF量尽DG；

因此，E也量尽DG。

但E也量尽整个DC；

因此，它也量尽余数CG。

由于CG量尽FH；

因此，E也量尽FH。

但E也量尽整个FA；

因此，E也量尽余数，即单元AH，尽管E是一个数：这是不可能的。

因此，没有数同时量尽AB、CD；

因此，AB、CD互素。

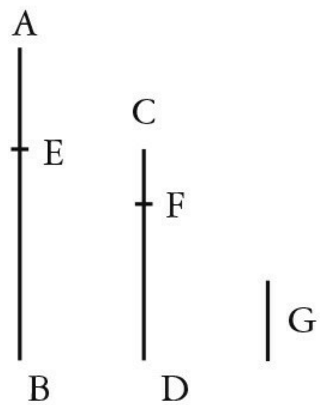
[VII. 定义12]

这就是所要证明的。

命题**02**

给定两个不互素的数，求它们的最大公度数。

Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.



设AB、CD是两个不互素的数。

于是，要求AB、CD的最大公度数。

现在，如果CD量尽AB（它也量尽它自身），那么CD就是CD、AB的一个公度数。

而且显然，CD也是最大公度数；这是因为没有比CD更大的数能量尽CD。

但如果CD量不尽AB，那么从AB、CD的较大者中不断减去较小者，则有某个余数能量尽它前面一个余数。

这是因为，余数不会是一个单元；否则AB、CD互素，

[VII. 1]

而这与假设矛盾。

因此，某个余数会量尽它前面一个余数。

现在，用CD量BE，设余数EA小于CD，

用EA量DF，设余数FC小于EA，

又设CF量尽AE。

于是，由于CF量尽AE，且AE量尽DF，

因此，CF也量尽DF。

但CF也量尽它自身；

因此，CF也量尽整个CD。

但CD量尽BE；

因此，CF也量尽BE。

但CF也量尽EA；

因此，CF也量尽整个BA。

但CF也量尽CD；

因此，CF量尽AB、CD。

因此，CF是AB、CD的一个公度数。

其次我说，它也是最大公度数。

这是因为，如果CF不是AB、CD的最大公度数，则有某个大于CF的数量尽AB、CD这两个数。

设量尽它们的这样一个数是G。

现在，由于G量尽CD，而CD量尽BE，所以

G也量尽BE。

但G也量尽整个BA；

因此，G也量尽余数AE。

但AE量尽DF；

因此，G也量尽DF。

但G也量尽整个DC；

因此，G也量尽余数CF，较大的量尽较小的：这是不可能的。

因此，没有大于CF的数量尽AB、CD；

因此，CF是AB、CD的最大公度数。

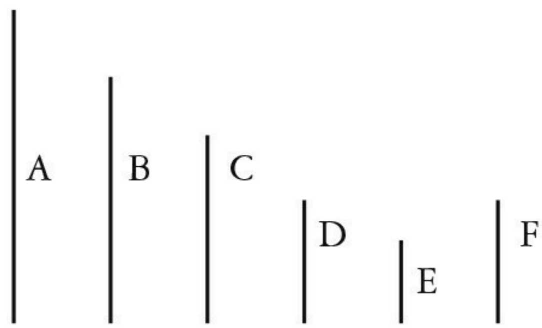
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若一个数量尽两个数，则它也量尽这两个数的最大公度数。

命题**03**

给定三个不互素的数，求它们的最大公度数。

Given three numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.



设A、B、C是给定的三个不互素的数；

于是，要求A、B、C的最大公度数。

取两数A、B的最大公度数D；

[VII. 2]

于是，D要么量尽，要么量不尽C。

首先，设D量尽C。

但D也量尽A、B；

因此，D量尽A、B、C；

因此，D是A、B、C的一个公度数。

我说，它也是最大公度数。

这是因为，如果D不是A、B、C的最大公度数，则有某个大于D的数量尽A、B、C。

设量尽它们的这样一个数是E。

由于E量尽A、B、C，所以，

E也量尽A、B；

因此，E也量尽A、B的最大公度数。

[VII. 2，推论]

而A、B的最大公度数是D；

因此，E量尽D，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，没有大于D的数量尽数A、B、C；

因此，D是A、B、C的最大公度数。

其次，设D量不尽C；

首先我说，C、D不互素。

这是因为，由于A、B、C不互素，所以有某个数量尽它们。

既然量尽A、B、C的数也量尽A、B，并且量尽A、B的最大公度数D。[VII. 2，推论]但它也量尽C；

因此，这个数量尽数D、C；

因此，D，C不互素。

然后，取它们的最大公度数E。

[VII. 2]

于是，由于E量尽D，

而D量尽A、B，

因此，E也量尽A、B。

但E也量尽C；

因此，E量尽A、B、C；

因此，E是A、B、C的一个公度数。

其次，我说，E也是最大公度数。

这是因为，如果E不是A、B、C的最大公度数，那么有某个大于E的数量尽数A、B、C。

设这样一个量尽它们的数是F。

现在，由于F量尽A、B、C，所以

F也量尽A、B；

因此，F也量尽A、B的最大公度数。

[VII. 2，推论]

但A、B的最大公度数是D；

因此，F量尽D。

而F也量尽C；

因此，F量尽D、C；

因此，F量尽D、C的最大公度数。

[VII. 2，推论]

但D、C的最大公度数是E；

因此，F量尽E，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，没有大于E的数量尽A、B、C；

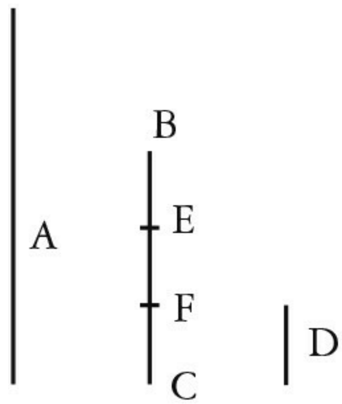
因此，E是A、B、C的最大公度数。

这就是所要证明的。

命题**04**

较小数是较大数的一部分或几部分。

Any number is either a part or parts of any number, the less of the greater.



设A、BC是两个数，BC是较小者。

我说，BC是A的一部分或几部分。

这是因为，A、BC要么互素，要么不互素。

首先，设A、BC互素。

于是，如果BC被分成若干单元，那么BC中的每一个单元都是A的某一部分；

因此，BC是A的几部分。

其次，设A、BC不互素；

于是，BC要么量尽，要么量不尽A。

现在，如果BC量尽A，那么BC是A的一部分。

但如果BC量不尽A，取A、BC的最大公度数D；

[VII. 2]

并将BC分成若干等于D的数，即BE、EF、FC。

现在，由于D量尽A，所以

D是A的一部分。

但D等于数BE、EF、FC中的每一个；

因此，BE、EF、FC中的每一个也是A的一部分；

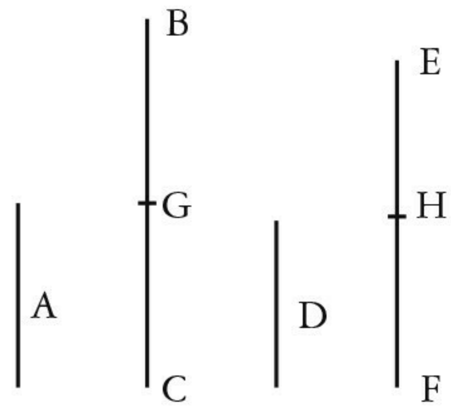
因此，BC是A的几部分。

这就是所要证明的。

命题**05**

若一数是一数的一部分，另一数是另一数的同样一部分，则两数之和也是另外两数之和的一部分，且与一数是一数的一部分相同。

If a number be a part of a number, and another be the same part of another, the sum will also be the same part of the sum that the one is of the one.



设数A是BC的一部分，

另一数D是另一数EF的一部分，且与A是BC的部分相同；

我说，A、D之和也是BC、EF之和的一部分，且与A是BC的部分相同。

这是因为，由于A是BC的怎样一部分，D也是EF的同样一部分，

因此，BC中有多少个等于A的数，FE中就有同样多少个等于D的数。

将BC分成若干个等于A的数，即BG、GC，

又将EF分成若干个等于D的数，即EH、HF；

于是，BG、GC的个数等于EH、HF的个数。

又，由于BG等于A，且EH等于D，

因此，BG、EH之和也等于A、D之和。

同理，

GC、HF之和也等于A、D之和。

因此，BC中有多少个等于A的数，BC、EF之和中就有同样多少个等于A、D之和的数。

因此，BC是A的多少倍，BC、EF之和也是A、D之和的同样多少倍。

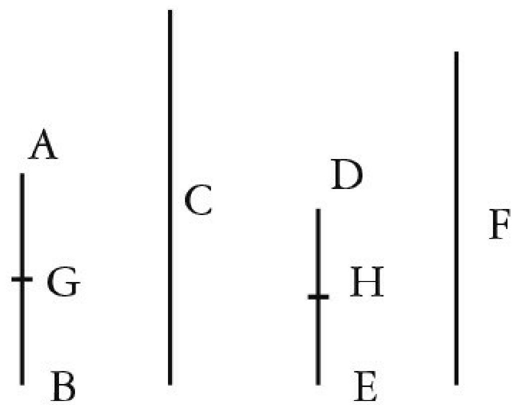
因此，A是BC的怎样一部分，A、D之和也是BC、EF之和的同样的一部分。

这就是所要证明的。

命题**06**

若一数是一数的几部分，另一数是另一数的同样几部分，则两数之和也是另外两数之和的几部分，且与一数是一数的几部分相同。

If a number be parts of a number, and another be the same parts of another, the sum will also be the same parts of the sum that the one is of the one.



设数AB是数C的几部分，另一数DE是另一数F的几部分，且与AB是C的几部分相同；

我说，AB、DE之和也是C、F之和的几部分，且与AB是C的几部分相同。

这是因为，由于AB是C的怎样几部分，DE也是F的同样几部分，

因此，AB中有多少个C的一部分，DE中也有同样多个F的一部分。

将AB分成若干个C的一部分，即AG、GB，

又将DE分成若干个F的一部分，即DH、HE；

于是，AG、GB的个数等于DH、HE的个数。

又，由于AG是C的怎样一部分，DH也是F的同样一部分，

因此，AG是C的怎样一部分，AG、DH之和也是C、F之和的同样一部分。

[VII. 5]

同理，

GB是C的怎样一部分，GB、HE之和也是C、F之和的同样一部分。

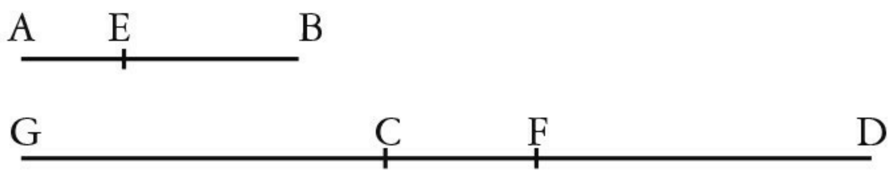
因此，AB是C的怎样几部分，AB、DE之和也是C、F之和的同样几部分。

这就是所要证明的。

命题**07**

若一数是一数的一部分，一减数是一减数的同样一部分，则余数也是余数的一部分，且与整个数是整个数的一部分相同。

If a number be that part of a number, which a number subtracted is of a number subtracted, the remainder will also be the same part of the remainder that the whole is of the whole.



设数AB是数CD的一部分，减数AE是减数CF的同样一部分；

我说，余数EB也是余数FD的一部分，且与整个数AB是整个数CD的一部分相同。

这是因为，AE是CF的怎样一部分，设EB也是CG的同样一部分。

现在，由于AE是CF的怎样一部分，EB也是CG的同样一部分，

因此，AE是CF的怎样一部分，AB也是GF的同样一部分。

[VII. 5]

但根据假设，AE是CF的怎样一部分，AB也是CD的同样一部分；

因此，AB是GF的怎样一部分，AB也是CD的同样一部分；

因此，GF等于CD。

从它们中分别减去CF；

因此，余数GC等于余数FD。

现在，由于AE是CF的怎样一部分，EB也是GC的同样一部分，

而GC等于FD，

因此，AE是CF的怎样一部分，EB也是FD的同样一部分。

但AE是CF的怎样一部分，AB也是CD的同样一部分；

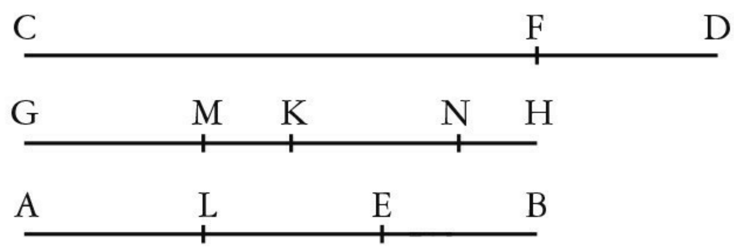
因此，余数EB也是余数FD的一部分，且与整个数AB是整个数CD的一部分相同。

这就是所要证明的。

命题**08**

若一数是一数的几部分，一减数是一减数的同样几部分，则余数也是余数的几部分，且与整个数是整个数的几部分相同。

If a number be the same parts of a number that a number subtracted is of a number subtracted, the remainder will also be the same parts of the remainder that the whole is of the whole.



设数AB是数CD的几部分，减数AE是减数CF的同样几部分；

我说，余数EB也是余数FD的几部分，且与整个数AB是整个数CD的几部分相同。

这是因为，取GH等于AB。

因此，GH是CD的怎样几部分，AE也是CF的同样几部分。

将GH分成若干个CD的一部分，即GK、KH，

又将AE分成若干个CF的一部分，即AL、LE；

于是，GK、KH的个数等于AL、LE的个数。

现在，由于GK是CD的怎样一部分，AL也是CF的同样一部分，

而CD大于CF，

因此，GK也大于AL。

取GM等于AL。

因此，GK是CD的怎样一部分，GM也是CF的同样一部分；

因此，余数MK也是余数FD的一部分，且与整个数GK是整个数CD的一部分相同。

[VII. 7]

又，由于KH是CD的怎样一部分，EL也是CF的同样一部分，

而CD大于CF；

因此，HK也大于EL。

取KN等于EL。

因此，KH是CD的怎样一部分，KN也是CF的同样一部分；

因此，余数NH是余数FD的一部分，且与整个KH是整个CD的一部分相同。

[VII. 7]

但已证明，余数MK是余数FD的一部分，且与整个GK是整个CD的一部分相同；

因此，MK、NH之和是DF的几部分，且与整个HG是整个CD的几部分相同。

但MK、NH之和等于EB，

又HG等于BA；

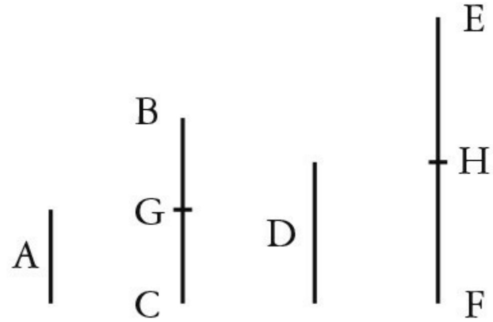
因此，余数EB是余数FD的几部分，且与整个AB是整个CD的几部分相同。

这就是所要证明的。

命题**09**

若一数是一数的一部分，另一数是另一数的同样一部分，则取更比例后，第一数是第三数的怎样一部分或几部分，第二数也是第四数的同样一部分或几部分。

If a number be a part of a number, and another be the same part of another, alternately also, whatever part or parts the first is of the third, the same part, or the same parts, will the second also be of the fourth.



设数A是数BC的一部分，另一数D是另一数EF的一部分，且与A是BC的一部分相同；

我说，取更比例后，A是D的怎样一部分或几部分，BC也是EF的同样一部分或几部分。

这是因为，由于A是BC的怎样一部分，D也是EF的相同一部分，

因此，BC中有多少个等于A的数，EF中也有多少个等于D的数。

将BC分成若干个等于A的数，即BG、GC，

又将EF分成若干个等于D的数，即EH、HF；

于是，BG、GC的个数等于EH、HF的个数。

现在，由于数BG、GC彼此相等，

且数EH、HF也彼此相等，

而BG、GC的个数等于EH、HF的个数，

因此，BG是EH的怎样一部分或几部分，GC也是HF的同样一部分或几部分；

因此还有，BG是EH的怎样一部分或几部分，BC也是EF的同样一部分或几部分。

[VII. 5，6]

但BG等于A，且EH等于D；

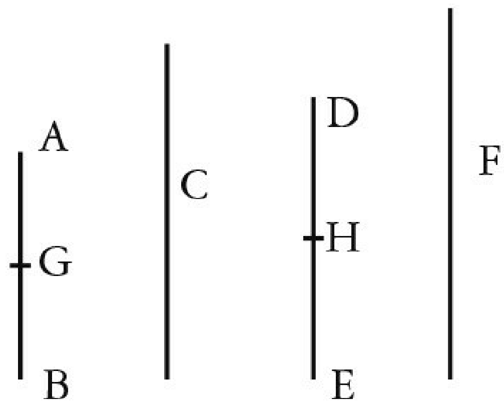
因此，A是D的怎样一部分或几部分，BC也是EF的同样一部分或几部分。

这就是所要证明的。

命题**10**

若一数是一数的几部分，另一数是另一数的同样几部分，则取更比例后，第一数是第三数的怎样几部分或一部分，第二数也是第四数的同样几部分或一部分。

If a number be parts of a number, and another be the same parts of another, alternately also, whatever parts or part the first is of the third, the same parts or the same part will the second also be of the fourth.



设数AB是数C的几部分，另一数DE是另一数F的同样几部分；

我说，取更比例后，AB是DE的怎样几部分或一部分，C也是F的同样几部分或一部分。

这是因为，由于AB是C的怎样几部分，DE也是F的同样几部分，

因此，AB中有多少个C的一部分，DE中也有多少个F的一部分。

将AB分成若干个C的一部分，即AG、GB，

又将DE分成若干个F的一部分，即DH、HE；

于是，AG、GB的个数等于DH、HE的个数。

现在，由于AG是C的怎样一部分，DH也是F的同样一部分，所以

取更比例后也有，AG是DH的怎样一部分或几部分，C也是F的同样一部分或几部分。

[VII. 9]

同理也有，

GB是HE的怎样一部分或几部分，

C也是F的同样一部分或几部分；

因此还有，AB是DE的怎样几部分或一部分，C也是F的同样几部分或一部分。

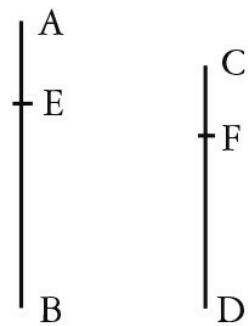
[VII. 5，6]

这就是所要证明的。

命题**11**

若整个数比整个数如同减数比减数，则余数比余数也如同整个数比整个数。

If, as whole is to whole, so is a number subtracted to a number subtracted, the remainder will also be to the remainder as whole to whole.



设整个数AB比整个数CD如同减数AE比减数CF;

我说，余数EB比余数FD也如同整个数AB比整个数CD。

由于AB比CD如同AE比CF，所以

AB是CD的怎样一部分或几部分，AE也是CF的同样一部分或几部分;

[VII. 定义20]

因此也有，余数EB是余数FD的一部分或几部分，且与AB是CD的一部分或几部分相同。

[VII. 7，8]

因此，EB比FD如同AB比CD。

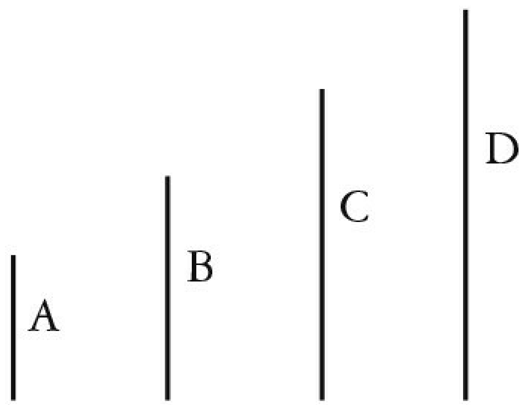
[VII. 定义20]

这就是所要证明的。

命题**12**

若有成比例的任意多个数，则前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和。

If there be as many numbers as we please in proportion, then, as one of the antecedents is to one of the consequents, so are all the antecedents to all the consequents.



设A、B、C、D是成比例的任意多个数，因此A比B如同C比D；

我说，A比B如同A、C之和比B、D之和。

这是因为，由于A比B如同C比D，

因此，A是B的怎样一部分或几部分，C也是D的同样一部分或几部分。

[VII. 定义20]

因此也有，A、C之和是B、D之和的一部分或几部分，且与A是B的一部分或几部分相同。

[VII. 5，6]

因此，A比B如同A、C之和比B、D之和。

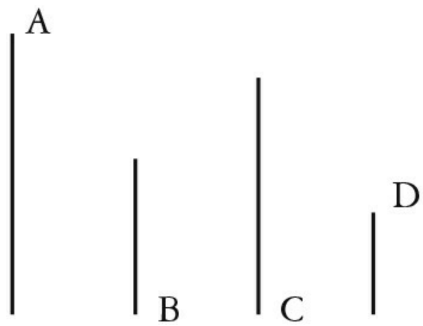
[VII. 定义20]

这就是所要证明的。

命题**13**

若四个数成比例，则它们的更比例也成立。

If four numbers be proportional, they will also be proportional alternately.



设四个数A、B、C、D成比例，因此A比B如同C比D；

我说，它们的更比例也成立，即A比C如同B比D。

这是因为，由于A比B如同C比D，

因此，A是B的怎样一部分或几部分，C也是D的同样一部分或几部分。

[VII. 定义20]

因此，取更比例后，A是C的怎样一部分或几部分，B也是D的同样一部分或几部分。

[VII. 10]

因此，A比C如同B比D。

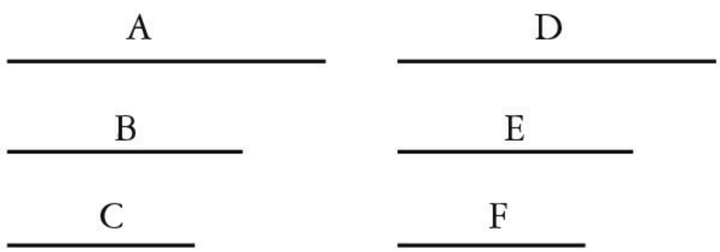
[VII. 定义20]

这就是所要证明的。

命题**14**

若有任意多个数，以及与它们个数相等的另一些数，它们两两成相同的比，则它们的首末比例也成立。

If there be as many numbers as we please, and others equal to them in multitude, which taken two and two are in the same ratio, they will also be in the same ratio ex aequali.



设有任意多个数A、B、C，以及与它们个数相等的另一些数D、E、F，它们两两成相同的比，因此

A比B如同D比E，

且B比C如同E比F；

我说，按照首末比例，

A比C如同D比F。

这是因为，由于A比B如同D比E，

因此，取更比例，

A比D如同B比E。

[VII. 13]

又，由于B比C如同E如F，

因此，取更比例，

B比E如同C比F。

[VII. 13]

但B比E如同A比D；

因此也有，A比D如同C比F。

因此，取更比例，

A比C如同D比F。

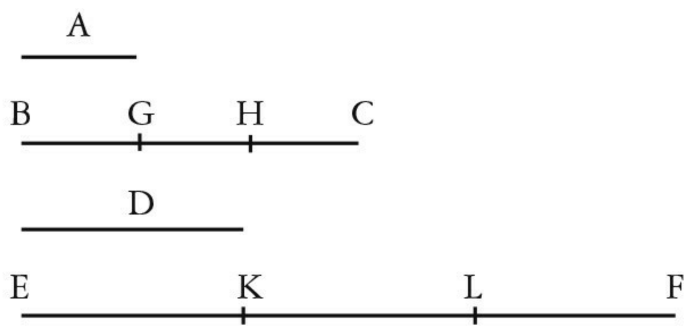
[VII. 13]

这就是所要证明的。

命题**15**

若一个单元量尽任一数与另一数量尽任一其他数有相同的次数，则取更比例后，单元量尽第三数与第二数量尽第四数有相同的次数。

If an unit measure any number, and another number measure any other number the same number of times, alternately also, the unit will measure the third number the same number of times that the second measures the fourth.



设单元A量尽任一数BC与另一数D量尽任一其他数EF有相同的次数；

我说，取更比例后，单元A量尽数D与BC量尽EF有相同的次数。

这是因为，由于单元A量尽数BC与D量尽EF有相同的次数，

因此，BC中有多少单元A，EF中也有同样数量等于D的数。

将BC分成单元BG、GH、HC，

又将EF分成等于D的数EK、KL、LF。

于是，BG、GH、HC的个数等于EK、KL、LF的个数。

又，由于单元BG、GH、HC彼此相等，

且数EK、KL、LF也彼此相等，

而单元BG、GH、HC的个数等于数EK、KL、LF的个数，

因此，单元BG比数EK如同单元GH比数KL，又如同单元HC比数LF。

因此也有，前项之一比后项之一等于所有前项之和比所有后项之和；

[VII. 12]

因此，单元BG比数EK如同BC比EF。

但单元BG等于单元A，

且数EK等于数D。

因此，单元A比数D如同BC比EF。

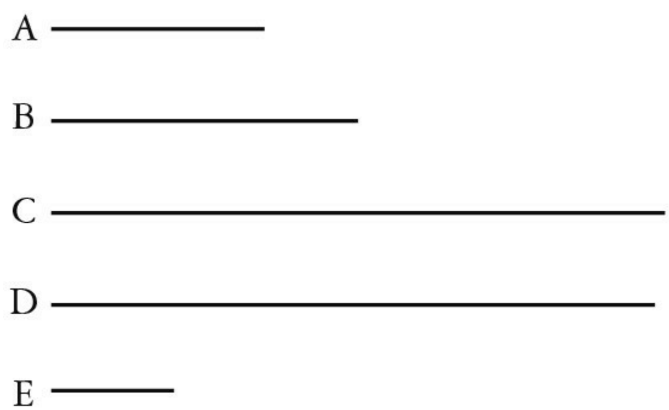
因此，单元A量尽D与BC量尽EF有相同的次数。

这就是所要证明的。

命题**16**

若两数彼此相乘得两数，则所得两数彼此相等。

If two numbers by multiplying one another make certain numbers, the numbers so produced will be equal to one another.



设A、B是两数，又设A乘B得C，且B乘A得D；

我说，C等于D。

这是因为，由于A乘B得C，

因此，B按照A中的单元数量尽C。

但单元E也按照A中的单元数量尽数A；

因此，单元E量尽A与B量尽C有相同的次数。

因此，取更比例，单元E量尽B与A量尽C有相同的次数。

[VII. 15]

又，由于B乘A得D，

因此，A按照B中的单元数量尽D。

但单元E也按照B中的单元数量尽B；

因此，单元E量尽数B与A量尽D有相同的次数。

但单元E量尽数B与A量尽C有相同的次数；

因此，A量尽数C、D中的每一个有相同的次数。

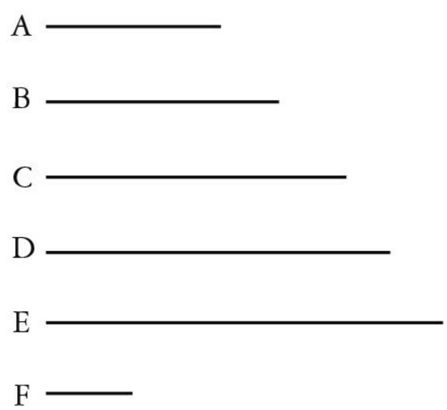
因此，C等于D。

这就是所要证明的。

命题**17**

若一数乘两数得某两数，则所得两数之比与被乘的两数之比相同。

If a number by multiplying two numbers make certain numbers, the numbers so produced will have the same ratio as the numbers multiplied.



设数A乘两数B、C得D、E;

我说，B比C如同D比E。

这是因为，由于A乘B得D，

因此，B按照A中的单元数量尽D。

但单元F也按照A中的单元数量尽数A;

因此，单元F量尽数A与B量尽D有相同的次数。

因此，单元F比数A如同B比D。

[VII. 定义20]

同理，

单元F比数A也如同C比E;

因此也有，B比D如同C比E。

因此，取更比例，B比C如同D比E。

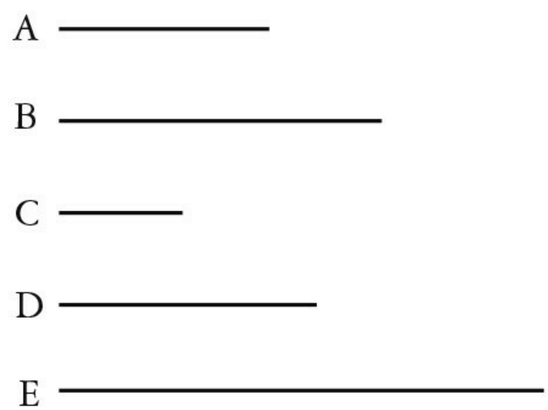
[VII. 13]

这就是所要证明的。

命题**18**

若两数各乘任一数得某两数，则所得两数之比与两乘数之比相同。

If two numbers by multiplying any number make certain numbers, the numbers so produced will have the same ratio as the multipliers.



设两数A、B乘任一数C得D、E；

我说，A比B如同D比E。

这是因为，由于A乘C得D，

因此，C乘A也得D。

[VII. 16]

同理也有，

C乘B得E。

因此，数C乘两数A、B得D、E。

因此，A比B如同D比E。

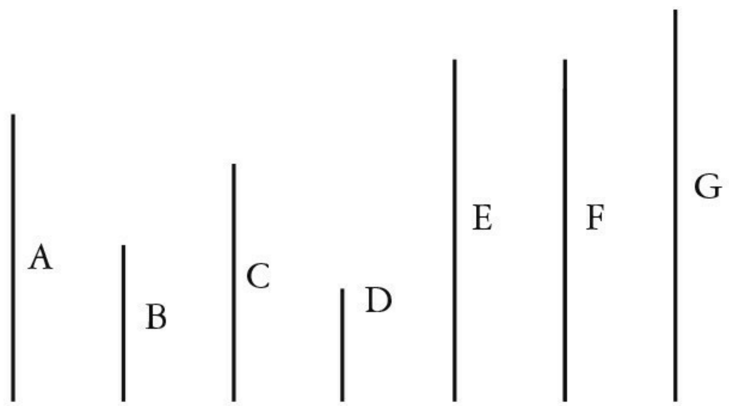
[VII. 17]

这就是所要证明的。

命题**19**

若四个数成比例，则第一数与第四数乘得的数等于第二数与第三数乘得的数；又，若第一数与第四数乘得的数等于第二数与第三数乘得的数，则这四个数成比例。

If four numbers be proportional, the number produced from the first and fourth will be equal to the number produced from the second and third; and, if the number produced from the first and fourth be equal to that produced from the second and third, the four numbers will be proportional.



设A、B、C、D是四个成比例的数，因此A比B如同C比D；

又设A乘D得E，

且B乘C得F；

我说，E等于F。

这是因为，设A乘C得G。

于是，由于A乘C得G，且A乘D得E，所以

数A乘两数C、D得G、E。

因此，C比D如同G比E。

[VII. 17]

但C比D如同A比B；

因此也有，A比B如同G比E。

又，由于A乘C得G，

但还有B乘C得F，

因此，两数A、B乘某一确定的数C得G、F。

因此，A比B如同G比F。

[VII. 18]

但还有，A比B如同G比E；

因此也有，G比E如同G比F。

因此，G与两数E、F中的每一个有相同的比；

因此，E等于F。

[参见V. 9]

又，设E等于F；

我说，A比B如同C比D。

这是因为，同样作图，由于E等于F，

因此，G比E如同G比F。

[参见V. 7]

但G比E如同C比D，

[VII. 17]

且G比F如同A比B。

[VII. 18]

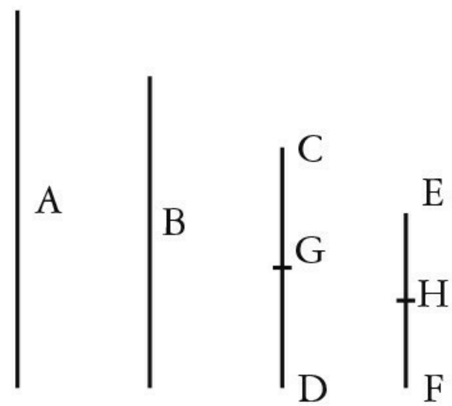
因此也有，A比B如同C比D。

这就是所要证明的。

命题**20**

用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数。

The least numbers of those which have the same ratio with them measure those which have the same ratio the same number of times, the greater the greater and the less the less.



设CD、EF是与A、B有相同比的数对中最小的数对；

我说，CD量尽A与EF量尽B有相同的次数。

现在，CD不是A的几部分。

这是因为，如果是，设它是这样；

因此，EF是B的几部分与CD是A的几部分相同。

[VII. 13和定义20]

因此，CD中有A的多少个一部分，EF中也有B的同样多少个一部分。

将CD分成若干个A的一部分，即CG、GD，

并将EF分成若干个B的一部分，即EH、HF；

于是，CG、GD的个数等于EH、HF的个数。

现在，由于数CG、GD彼此相等，且数EH、HF也彼此相等，而CG、GD的个数等于EH、HF的个数，

因此，CG比EH如同GD比HF。

因此也有，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和。

[VII. 12]

因此，CG比EH如同CD比EF。

因此，CG、EH与小于它们的CD、EF有相同的比：

这是不可能的，因为根据假设，CD、EF是和它们有相同比的数对中最小的数对。

因此，CD不是A的几部分；

因此，CD是A的一部分。

[VII. 4]

且EF是B的一部分与CD是A的一部分相同；

[VII. 13和定义20]

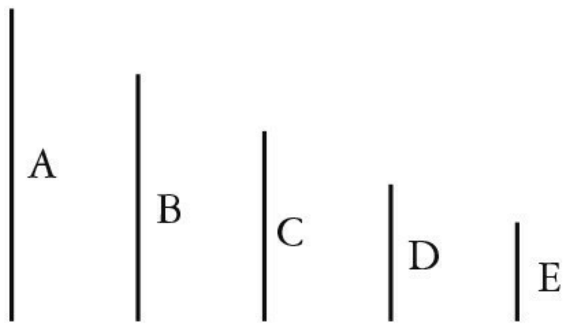
因此，CD量尽A与EF量尽B有相同的次数。

这就是所要证明的。

命题**21**

互素的数是与它们有相同比的数对中最小的。

Numbers prime to one another are the least of those which have the same ratio with them.



设A、B是互素的数；

我说，A、B是与它们有相同比的数对中最小的。

这是因为，如果不是这样，则有小于A、B的数对与A、B有相同的比。

设它们是C、D。

于是，由于用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，C量尽A与D量尽B有相同的次数。

现在，C量尽A有多少次，就设E中有多少单元。

因此，按照E中的单元数，D也量尽B。

又，由于按照E中的单元数，C量尽A，

因此，按照C中的单元数，E也量尽A。

[VII. 16]

同理，

按照D中的单元数，E也量尽B。

[VII. 16]

因此，E量尽互素的A、B：

这是不可能的。

[VII. 定义12]

因此，没有小于A、B的数对与A、B有相同的比。

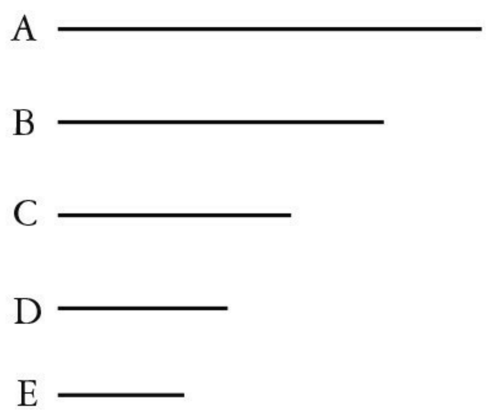
因此，A、B是与它们有相同比的数对中最小的。

这就是所要证明的。

命题**22**

有相同比的数对中最小的数对互素。

The least numbers of those which have the same ratio with them are prime to one another.



设A、B是与它们有相同比的数对中最小的数对；

我说，A、B互素。

这是因为，如果它们不互素，那么就有某个数量尽它们。

设量尽它们的数是C。

又，C量尽A有多少次，就设D中有多少单元，

且C量尽B有多少次，就设E中有多少单元。

由于按照D中的单元数，C量尽A，

因此，C乘D得A。

[VII. 定义15]

同理也有，

C乘E得B。

于是，数C乘两数D、E得A、B；

因此，D比E如同A比B；

[VII. 17]

因此，D、E与A、B有相同的比，且小于它们：

这是不可能的。

因此，没有数量尽数A、B。

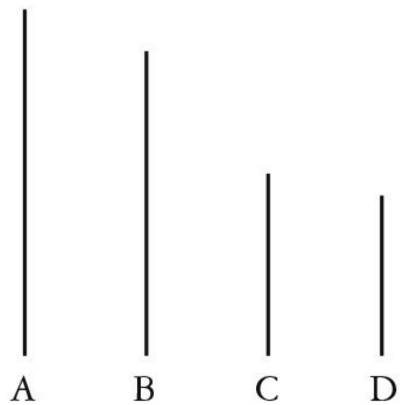
因此，A、B互素。

这就是所要证明的。

命题**23**

若两数互素，则量尽其一的数与另一数互素。

If two numbers be prime to one another, the number which measures the one of them will be prime to the remaining number.



设A、B是两个互素的数，设数C量尽A；

我说，C、B也互素。

这是因为，如果C、B不互素，那么

有某个数量尽C、B。

设量尽它们的数是D。

由于D量尽C且C量尽A，

因此，D也量尽A。

但D也量尽B；

因此，D量尽互素的A、B：

这是不可能的。

[VII. 定义12]

因此，没有数量尽数C、B。

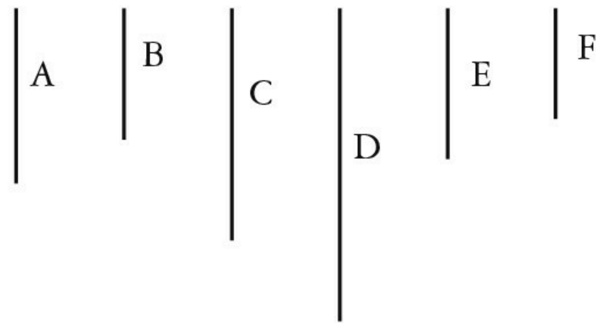
因此，C、B互素。

这就是所要证明的。

命题**24**

若两数与某数互素，则它们的乘积与该数也互素。

If two numbers be prime to any number, their product also will be prime to the same.



设两数A、B与某个数C互素，又设A乘B得D；

我说，C、D互素。

这是因为，如果C、D不互素，则有某个数量尽C、D。

设量尽它们的数是E。

现在，由于C、A互素，

且某个数E量尽C，

因此，A、E互素。

[VII. 23]

于是，E量尽D有多少次，就设F中有多少单元；

因此，按照E中的单元数，F也量尽D。

[VII. 16]

因此，E乘F得D。

[VII. 定义15]

但还有，A乘B也得D。

因此，E、F的乘积等于A、B的乘积。

但如果两外项之积等于两内项之积，则这四个数成比例；

[VII. 19]

因此，E比A如同B比F。

但A、E互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，也就是说，前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽B。

但E也量尽C；

因此，E量尽互素的B、C：

这是不可能的。

[VII. 定义12]

因此，没有数量尽数C、D。

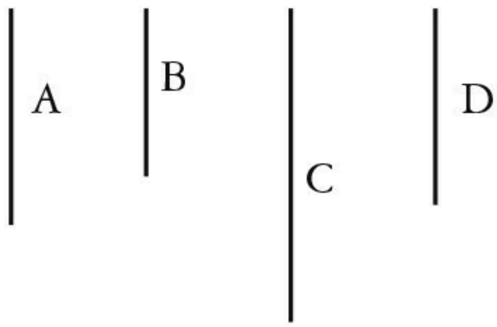
因此，C、D互素。

这就是所要证明的。

命题**25**

若两数互素，则其中一数的自乘积与另一数互素。

If two numbers be prime to one another, the product of one of them into itself will be prime to the remaining one.



设A、B两数互素，

又设A自乘得C；

我说，B、C互素。

这是因为，取D等于A。

由于A、B互素，且A等于D，

因此，D、B也互素，

因此，两数D、A中的每一个都与B互素；

因此，D、A的乘积也与B互素。

[VII. 24]

但D、A的乘积是C。

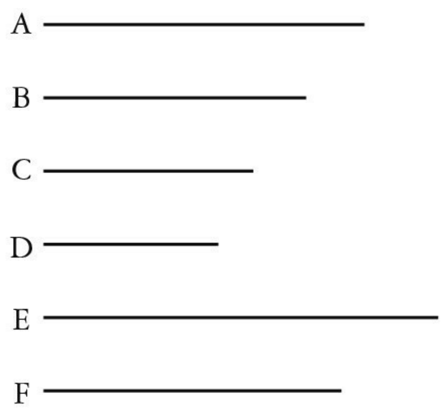
因此，C、B互素。

这就是所要证明的。

命题**26**

若两数与另外两数中的每一个都互素，则两数的乘积与另外两数的乘积也互素。

If two numbers be prime to two numbers, both to each, their products also will be prime to one another.



设两数A、B与两数C、D中的每一个都互素，又设A乘B得E，C乘D得F；

我说，E、F互素。

这是因为，由于数A、B中的每一个与C互素，

因此，A、B的乘积也与C互素。

[VII. 24]

但A、B的乘积是E；

因此，E、C互素。

同理，

E、D也互素。

因此，数C、D中的每一个与E互素。

因此，C、D的乘积也与E互素。

[VII. 24]

但C、D的乘积是F。

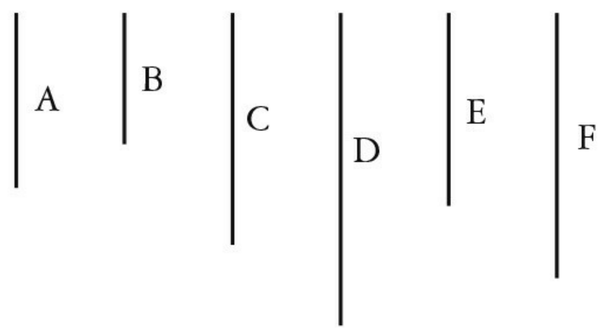
因此，E、F互素。

这就是所要证明的。

命题**27**

若两数互素，且每个数自乘得某个数，则这些乘积互素；又，若原数乘以乘积得某数，则后者也互素＜外项也是如此＞。

If two numbers be prime to one another, and each by multiplying itself make a certain number, the products will be prime to one another; and, if the original numbers by multiplying the products make certain numbers, the latter will also be prime to one another <and this is always the case with the extremes>.



设A、B两数互素，

又设A自乘得C，A乘C得D，

且设B自乘得E，B乘E得F；

我说，C、E互素，D、F互素。

这是因为，由于A、B互素，且A自乘得C，

因此，C、B互素。

[VII. 25]

于是，由于C、B互素，

且B自乘得E，

因此，C、E互素。

[VII. 25]

又，由于A、B互素，

且B自乘得E，

因此，A、E互素。

[VII. 25]

于是，由于两数A、C与两数B、E中的每一个互素，

因此，A、C的乘积与B、E的乘积也互素。

[VII. 26]

而A、C的乘积是D；B、E的乘积是F。

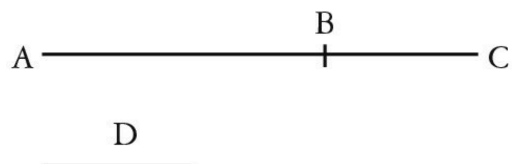
因此，D、F互素。

这就是所要证明的。

命题**28**

若两数互素，则其和与它们中的每一个也互素；又，若两数之和与它们中的每一个互素，则原来的两数也互素。

If two numbers be prime to one another, the sum will also be prime to each of them; and, if the sum of two numbers be prime to any one of them, the original numbers will also be prime to one another.



设互素的两数AB、BC相加；

我说，其和AC与数AB、BC中的每一个也互素。

这是因为，如果CA、AB不互素，则有某数量尽CA、AB。

设量尽它们的数是D。

于是，由于D量尽CA、AB，

因此，D也量尽余数BC。

但D也量尽BA；

因此，D量尽互素的AB、BC：

这是不可能的。

[VII. 定义12]

因此，没有数量尽CA、AB；

因此，CA、AB互素。

同理，

AC、BC也互素。

因此，CA与数AB、BC中的每一个互素。

又，设CA、AB互素；

我说，AB、BC也互素。

这是因为，如果AB、BC不互素，

则有某数量尽AB、BC。

设量尽它们的数是D。

于是，由于D量尽数AB、BC中的每一个，所以D也量尽整个CA。

但D也量尽AB；

因此，D量尽互素的CA、AB：

这是不可能的。

[VII. 定义12]

因此，没有数量尽AB、BC。

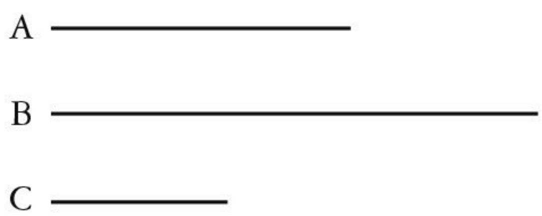
因此，AB、BC互素。

这就是所要证明的。

命题**29**

任一素数与它量不尽的任一数互素。

Any prime number is prime to any number which it does not measure.



设A是一个素数，且它量不尽B；

我说，B、A互素。

这是因为，如果B、A不互素，则有某数量尽它们。

设C量尽它们。

由于C量尽B，且A量不尽B，

因此，C与A不同。

现在，由于C量尽B、A，

因此，C也量尽与C不同的素数A：

这是不可能的。

因此，没有数量尽B、A。

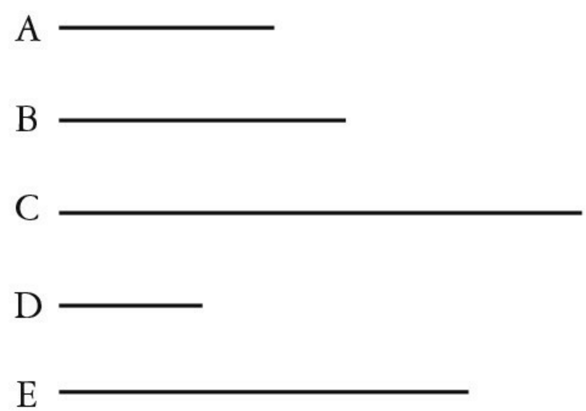
于是A、B互素。

这就是所要证明的。

命题**30**

若两数相乘得某数，且某素数量尽该乘积，则它也量尽原来两数之一。

If two numbers by multiplying one anther make some number, and any prime number measure the product, it will also measure one of the original numbers.



设两数A、B相乘得C，又设某素数D量尽C；

我说，D量尽A、B之一。

这是因为，设D量不尽A。

现在D是素数；

因此，A、D互素。

[VII. 29]

又，D量C有多少次，就设E中有多少单元。

于是，由于按照E中的单元数，D量尽C，

因此，D乘E得C。

[VII. 定义15]

此外，A乘B也得C；

因此，D、E的乘积等于A、B的乘积。

因此，D比A如同B比E。

[VII. 19]

但D、A互素，

互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数；

[VII. 20]

因此，D量尽B。

类似地，可以证明，如果D量不尽B，则它量尽A。

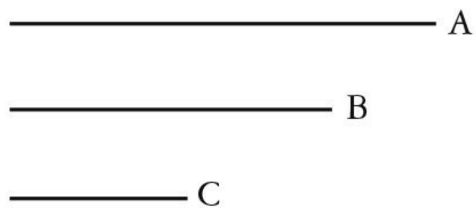
因此，D量尽A、B之一。

这就是所要证明的。

命题**31**

任一合数可被某素数量尽。

Any composite number is measured by some prime number.



设A是一个合数；

我说，A可被某素数量尽。

这是因为，由于A是合数，所以

有某数量尽它。

设量尽它的数是B。

现在，如果B是素数，则已经完成证明。

但如果B是合数，则有某数量尽它。

设量尽它的数是C。

于是，由于C量尽B，

且B量尽A，

因此，C也量尽A。

又，如果C是素数，则已经完成证明。

但如果C是合数，则有某数量尽它。

于是，如果继续以这种方式推理下去，就会找到某素数量尽它前面那个数，它也就量尽A。

这是因为，如果找不到该素数，就会有一个无穷数列量尽数A，其中每一个都小于它前面的数：

这在数里是不可能的。

因此，可找到某素数量尽它前面那个数，它也就量尽A。

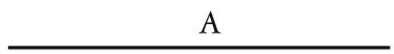
因此，任一合数可被某素数量尽。

这就是所要证明的。

命题**32**

任一数要么是素数，要么可被某素数量尽。

Any number either is prime or is measured by some prime number.



设A是一个数；

我说，A要么是素数，要么可被某素数量尽。

现在，如果A是素数，则已经完成证明。

但如果A是合数，则有某素数量尽它。

[VII. 31]

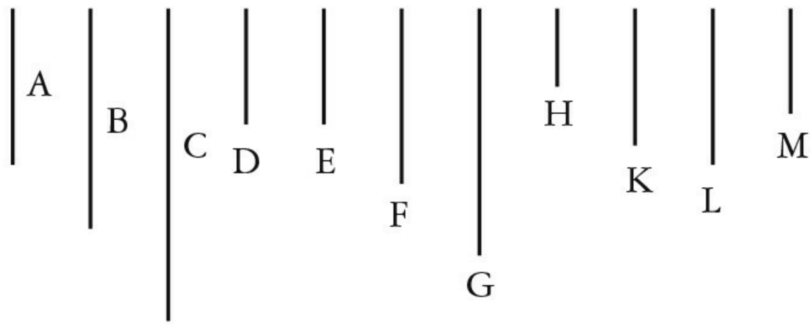
因此，任一数要么是素数，要么可被某素数量尽。

这就是所要证明的。

命题**33**

给定任意多个数，求与它们有相同比的数组中最小的数组。

Given as many numbers as we please, to find the least of those which have the same ratio with them.



设A、B、C是给定的任意多个数；

于是，要求找到与A、B、C有相同比的数组中最小的数组。

A、B、C要么互素，要么不互素。

现在，如果A、B、C互素，则它们是与它们有相同比的数组中最小的数组。

[VII. 21]

但如果A、B、C不互素，取D是A、B、C的最大公度数，

[VII. 3]

且D分别量尽A、B、C有多少次，就分别设数E、F、G中有多少单元。

因此，按照D中的单元数，E、F、G分别量尽A、B、C。

[VII. 16]

因此，E、F、G量尽A、B、C有相同的次数。

因此，E、F、G与A、B、C有相同的比。

[VII. 定义20]

其次我说，它们是有这个比的数组中最小的。

这是因为，如果E、F、G不是与A、B、C有相同比的数组中最小的数组，则有小于E、F、G的数组与A、B、C有相同的比。

设它们是H、K、L；

因此，H量尽A与K、L分别量尽数B、C有相同的次数。

现在，H量尽A有多少次，就设M中有多少单元；

因此，按照M中的单元数，K、L也分别量尽B、C。

又，由于按照M中的单元数，H量尽A，

因此，按照H中的单元数，M也量尽A。

[VII. 16]

同理，

分别按照在数K、L中的单元数，M也量尽数B、C；

因此，M量尽A、B、C。

现在，由于按照M中的单元数，H量尽A，

因此，H乘M得A。

[VII. 定义15]

同理也有，

E乘D得A。

因此，E、D的乘积等于H、M的乘积。

因此，E比H如同M比D。

[VII. 19]

但E大于H；

因此，M也大于D。

又，它量尽A、B、C：这是不可能的，

因为根据假设，D是A、B、C的最大公度数。

因此，不可能有任何小于E、F、G的数组与A、B、C有相同的比。

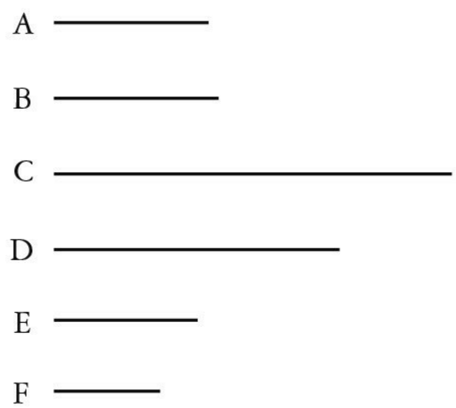
因此，E、F、G是与A、B、C有相同比的数组中最小的数组。

这就是所要证明的。

命题**34**

给定两数，求它们量尽的数中最小的数。

Given two numbers, to find the least number which they measure.



设A、B是两个给定的数；

于是，要求找到它们量尽的数中最小的数。

现在，A、B要么互素，要么不互素。

首先设A、B互素，

且设A乘B得C；

因此，B乘A也得C。

因此，A、B量尽C。

其次我说，它也是A、B量尽的最小的数。

这是因为，如果不是这样，那么A、B量尽某个比C小的数。

设它们量尽D。

于是，A量尽D有多少次，就设E中有多少单元，

且B量尽D有多少次，就设F中有多少单元；

因此，A乘E得D，

且B乘F得D；

[VII. 定义15]

因此，A、E的乘积等于B、F的乘积。

因此，A比B如同F比E。

[VII. 19]

但A、B互素，

互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数；

[VII. 20]

因此，后项B量尽后项E。

又，由于A乘B、E得C、D，

因此，B比E如同C比D。

[VII. 17]

但B量尽E；

因此，C也量尽D，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，A、B量不尽任何小于C的数；

因此，C是被A、B量尽的最小的数。

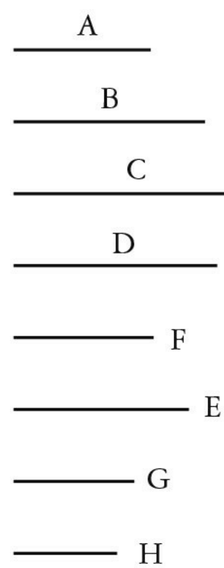
其次，设A、B不互素，

且设F、E为与A、B有相同比的数对中最小的数对；

[VII. 33]

因此，A、E的乘积等于B、F的乘积。

[VII. 19]



又，设A乘E得C；

因此也有，B乘F得C；

因此，A、B量尽C。

其次我说，它也是A、B量尽的数中最小的数。

这是因为，如果不是这样，A、B量尽某个小于C的数。

设它们量尽D。

又，A量尽D有多少次，就设G中有多少单元，

且B量尽D有多少次，就设H中有同样单元。

因此，A乘G得D，

且B乘H得D。

因此，A、G的乘积等于B、H的乘积；

因此，A比B如同H比G。

[VII. 19]

但A比B如同F比E。

因此也有，F比E如同H比G。

但F、E是最小的，

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽G。

又，由于A乘E、G得C、D，

因此，E比G如同C比D。

[VII. 17]

但E量尽G；

因此，C也量尽D，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，A、B量不尽任何小于C的数。

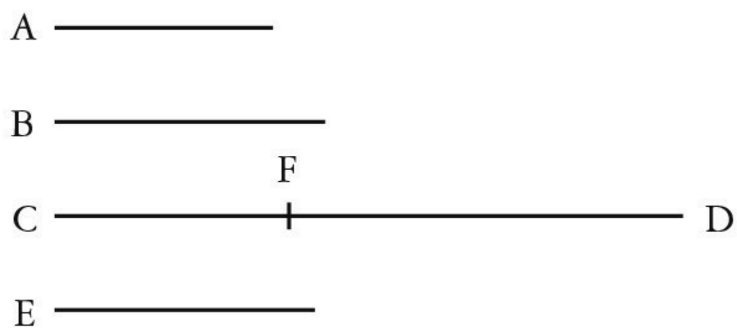
因此，C是A、B量尽的数中最小的数。

这就是所要证明的。

命题**35**

若两数量尽某数，则它们量尽的最小数也量尽这个数。

If two numbers measure any number, the least number measured by them will also measure the same.



设两数A、B量尽某数CD，

又设E是它们量尽的最小数；

我说，E也量尽CD。

这是因为，如果E量不尽CD，设E量出DF，其余数CF小于E。

现在，由于A、B量尽E，

且E量尽DF，

因此，A、B也量尽DF。

但它们也量尽整个CD；

因此，它们也量尽小于E的余数CF：

这是不可能的。

因此，E不可能量不尽CD；

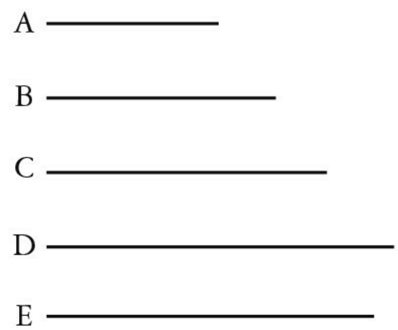
因此，E量尽CD。

这就是所要证明的。

命题**36**

给定三个数，求它们量尽的最小数。

Given three numbers, to find the least number which they measure.



设A、B、C是三个给定的数；

于是，要求找到它们量尽的最小数。

设D是两数A、B量尽的最小数。

[VII. 34]

于是，C要么量尽D，要么量不尽D。

首先，设C量尽D。

但A、B也量尽D；

因此，A、B、C量尽D。

其次我说，D也是它们量尽的最小数。

这是因为，如果不是这样，则A、B、C量尽某个小于D的数。

设它们量尽E。

由于A、B、C量尽E，

因此也有，A、B量尽E。

因此，A、B量尽的最小数也量尽E。

[VII. 35]

但D是A、B量尽的最小数；

因此，D量尽E，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，A、B、C量不尽任何小于D的数；

因此，D是A、B、C量尽的最小数。

又，设C量不尽D，

且设E是C、D量尽的最小数。

[VII. 34]

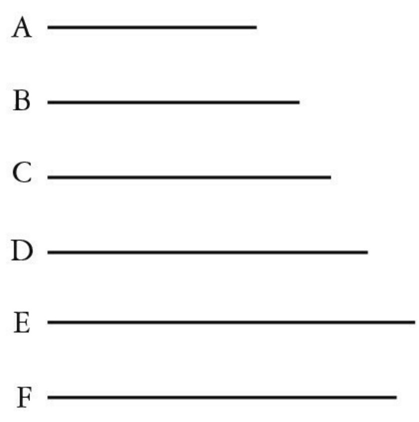
由于A、B量尽D，

且D量尽E，

因此也有，A、B量尽E。

但C也量尽E；

因此也有，A、B、C量尽E。



其次我说，E也是它们量尽的最小数。

这是因为，如果不是这样，则A、B、C量尽某个小于E的数。

设它们量尽F。

由于A、B、C量尽F，

因此也有，A、B量尽F；

因此，A、B量尽的最小数也量尽F。

[VII. 35]

但D是A、B量尽的最小数；

因此，D量尽F。

但C也量尽F；

因此，D、C量尽F，

因此，D、C量尽的最小数也量尽F。

但E是C、D量尽的最小数；

因此，E量尽F，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，A、B、C量不尽任何小于E的数。

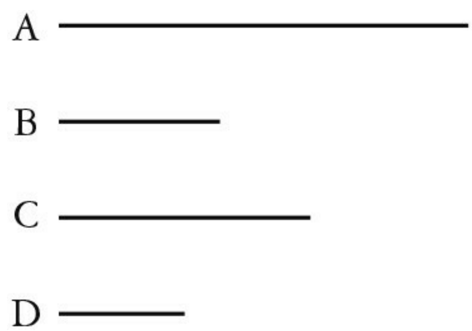
因此，E是A、B、C量尽的最小数。

这就是所要证明的。

命题**37**

若一个数被某个数量尽，则被量数有与量数的一部分同名的一部分。

If a number be measured by any number, the number which is measured will have a part called by the same name as the measuring number.



设数A被某数B量尽；

我说，A有与B的一部分同名的一部分。

这是因为，B量尽A有多少次，就设C中有多少单元。

由于按照C中的单元数，B量尽A，

且按照C中的单元数，单元D也量尽数C，

因此，单元D量尽数C与B量尽A有相同的次数。

因此，取更比例，单元D量尽数B与C量尽A有相同的次数。

[VII. 15]

因此，单元D是B的怎样一部分，C也是A的同样一部分。

但单元D是数B的与B的一部分同名的一部分；

因此，C也是A的与B的一部分同名的一部分，

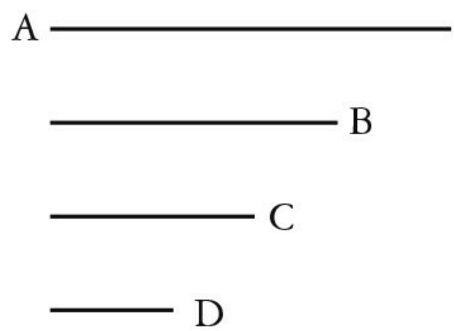
因此，A有与B的一部分同名的一部分C。

这就是所要证明的。

命题**38**

若一个数有任一部分，则它被与该部分同名的一个数量尽。

If a number have any part whatever, it will be measured by a number called by the same name as the part.



设数A有任一部分B，

且设C是与一部分B同名的一个数。

我说，C量尽A。

这是因为，由于B是A的与C的一部分同名的一部分，

且单元D也是C的与C的一部分同名的一部分，

因此，单元D是数C的怎样一部分，B也是A同样的一部分；

因此，单元D量尽数C与B量尽A有相同的次数。

因此，取更比例，单元D量尽B与C量尽A有相同的次数。

[VII. 15]

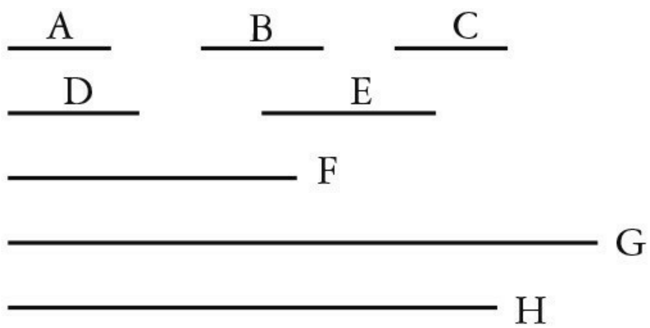
因此，C量尽A。

这就是所要证明的。

命题**39**

求有给定的几个一部分的数中最小的数。

To find the number which is the least that will have given parts.



设A、B、C是给定的几个一部分；

于是，要求找到有这几个一部分A、B、C的数中最小的数。

设D、E、F是与这几个一部分A、B、C同名的数，

且设G是D、E、F量尽的最小数。

[VII. 36]

因此，G有与D、E、F同名的几个一部分。

[VII. 37]

但A、B、C是与D、E、F同名的几个一部分；

因此，G有几个一部分A、B、C。

其次我说，G也是有这几个一部分A、B、C的数中最小的数。

这是因为，如果不是这样，则有某个小于G的数有这几个一部分A、B、C。

设它为H。

由于H有几个一部分A、B、C，

因此，H将被与这几个一部分A、B、C同名的数量尽。

[VII. 38]

但D、E、F是与这几个一部分A、B、C同名的数；

因此，H被D、E、F量尽。

且H小于G：这是不可能的。

因此，没有小于G的数有这几个一部分A、B、C。

这就是所要证明的。

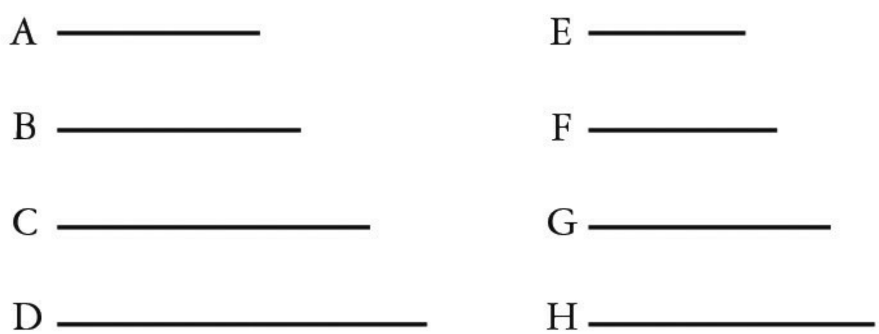
第八卷

命题 **Proposition**

命题**01**

若有任意多个数成连比例，且它们的两外项互素，则这些数是与它们有相同比的数组中最小的。

If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the extremes of them be prime to one another, the numbers are the least of those which have the same ratio with them.



设有任意多个数A、B、C、D成连比例，

且设它们的两外项A、D互素；

我说，A、B、C、D是与它们有相同比的数组中最小的。

这是因为，如果不是这样，设E、F、G、H分别小于A、B、C、D，且与它们有相同的比。

现在，由于A、B、C、D与E、F、G、H有相同的比，

且A、B、C、D的个数与E、F、G、H的个数相等，

因此，取首末比例，

A比D如同E比H。

[VII. 14]

但A、D互素，

互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数。

[VII. 20]

因此，A量尽E，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，小于A、B、C、D的E、F、G、H与它们没有相同的比。

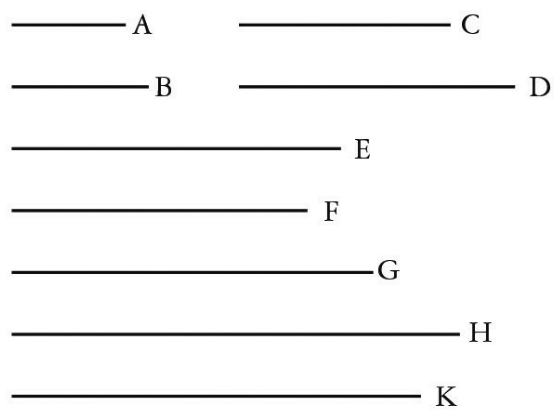
因此，A、B、C、D是与它们有相同比的数组中最小的。

这就是所要证明的。

命题**02**

按照指定的个数，求有给定比的成连比例的数组中最小的。

To find numbers in continued proportion, as many as may be prescribed, and the least that are in a given ratio.



设A、B是有给定比的最小数对；

于是，要求按照指定的个数求有A与B之比的成连比例的数组中最小的。

设指定的个数是四；

设A自乘得C，A乘B得D；

B自乘得E；

此外，设A乘C、D、E分别得F、G、H，

且设B乘E得K。

现在，由于A自乘得C，

且A乘B得D，

因此，A比B如同C比D。

[VII. 17]

又，由于A乘B得D，

且B自乘得E，

因此，数A、B乘B分别得数D、E。

因此，A比B如同D比E。

[VII. 18]

但A比B如同C比D;

因此也有，C比D如同D比E。

又，由于A乘C、D得F、G，

因此，C比D如同F比G。

[VII. 17]

但C比D如同A比B;

因此也有，A比B如同F比G。

又，由于A乘D、E得G、H，

因此，D比E如同G比H。

[VII. 17]

但D比E如同A比B。

因此也有，A比B如同G比H。

又，由于A、B乘E得H、K，

因此，A比B如同H比K。

[VII. 18]

但A比B如同F比G，也如同G比H。

因此也有，F比G如同G比H，也如同H比K；

因此，C、D、E以及F、G、H、K都以A比B成连比例。

其次我说，它们是以A比B成连比例的数组中最小的。

这是因为，由于A、B是与它们有相同比的最小数对，

且有相同比的最小数对互素，

[VII. 22]

因此，A、B互素。

又，数A、B分别自乘得数C、E，数A、B分别乘C、E得F、K；

因此，C、E和F、K分别互素。

[VII. 27]

但若有任意多个数成连比例，且它们的两外项互素，则这些数是与它们有相同比的数组中最小的。

[VIII. 1]

因此，C、D、E和F、G、H、K是与A比B有相同比的数组中最小的。

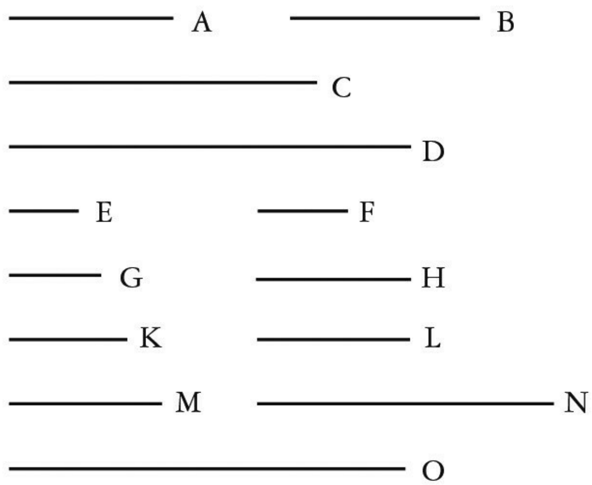
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若成连比例的三个数是与它们有相同比的最小者，则它们的两外项是平方数；若成连比例的四个数是与它们有相同比的最小者，则它们的两外项是立方数。

命题**03**

若成连比例的任意多个数是与它们有相同比的数组中最小的，则它们的两外项互素。

If as many numbers as we please in continued proportion be the least of those which have the same ratio with them, the extremes of them are prime to one another.



设成连比例的任意多个数A、B、C、D是与它们有相同比的数组中最小的。

我说，它们的两外项A、D互素。

这是因为，设数E、F是与A、B、C、D有相同比的数组中最小的，

[VII. 33]

然后取有相同性质的另外三个数G、H、K，

以及其他的数，一次多一个，

[VIII. 2]

直到个数等于数A、B、C、D的个数。

设所取的数是L、M、N、O。

现在，由于E、F是与它们有相同比的数组中最小的，所以它们互素。

[VII. 22]

又，由于数E、F分别自乘得数G、K，且E、F分别乘G、K得数L、O，

[VIII. 2，推论]

因此，G、K和L、O两者分别互素。

[VII. 27]

又，由于A、B、C、D是与它们有相同比的数组中最小的，

而L、M、N、O是与A、B、C、D有相同比的数组中最小的，

且数A、B、C、D的个数等于数L、M、N、O的个数，

因此，数A、B、C、D分别等于数L、M、N、O；

因此，A等于L，且D等于O。

又，L、O互素。

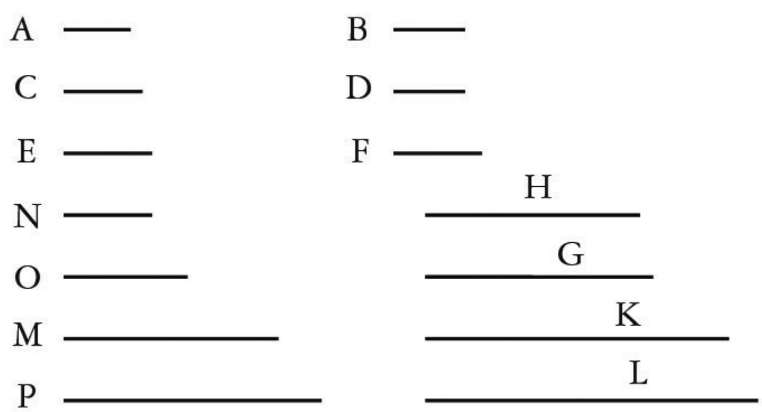
因此，A、D也互素。

这就是所要证明的。

命题**04**

给定以最小数给出的任意多个比，求以给定比成连比例的数组中最小的。

Given as many ratios as we please in least numbers, to find numbers in continued proportion which are the least in the given ratios.



设以最小数给出的比是A比B、C比D和E比F。

于是，要求找到成连比例的数组，它们是以A比B、C比D和E比F成连比例的数组中最小的。

设G是B、C量尽的最小数；

[VII. 34]

又，B量尽G有多少次，就设A量尽H有多少次，

且C量尽G有多少次，就设D量尽K有多少次。

现在，E要么量尽，要么量不尽K。

首先，设E量尽K。

又，E量尽K有多少次，就设F量尽L也有多少次。

现在，由于A量尽H与B量尽G有相同的次数，

因此，A比B如同H比G。

[VII. 定义20，VII. 13]

同理，

C比D如同G比K，

还有E比F如同K比L；

因此，H、G、K、L是以A比B、C比D和E比F成连比例的数组。

其次我说，它们也是有这个性质的数组中最小的。

这是因为，如果H、G、K、L不是以A比B、C比D和E比F成连比例的数组中最小的，则设最小数组是N、O、M、P。

于是，由于A比B如同N比O，

而A、B是最小的，

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数，

因此，B量尽O。

[VII. 20]

同理，

C也量尽O；

因此，B、C量尽O；

因此，B、C量尽的最小数也量尽O。

[VII. 35]

但G是B、C量尽的最小数；

因此，G量尽O，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，没有比H、G、K、L还小的数组能以A比B、C比D和E比F成连比例。

其次，设E量不尽K。

设M是E、K量尽的最小数。

又，K量尽M有多少次，就设H、G分别量尽N、O有多少次，

且E量尽M有多少次，就设F量尽P也有多少次。

由于H量尽N与G量尽O有相同的次数，

因此，H比G如同N比O。

[VII. 13和定义20]

但H比G如同A比B；

因此也有，A比B如同N比O。

同理也有，

C比D如同O比M。

又，由于E量尽M与F量尽P有相同的次数，

因此，E比F如同M比P；

[VII. 13和定义20]

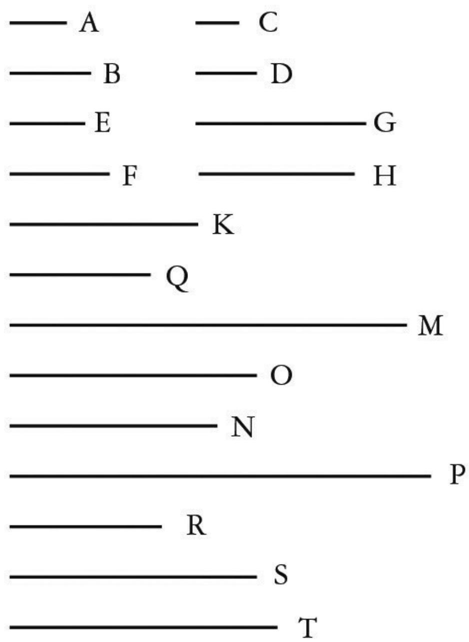
因此，N、O、M、P以A比B、C比D和E比F成连比例。

其次我说，它们也是以A比B、C比D和E比F成连比例的数组中最小的。

这是因为，如果不是这样，则有某数组小于N、O、M、P而以A比

B、C比D和E比F成连比例。

设它们是Q、R、S、T。



现在，由于Q比R如同A比B，

而A、B是最小的，

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，B量尽R。

同理，C也量尽R；

因此，B、C量尽R。

因此，B、C量尽的最小数也量尽R。

[VII. 35]

但G是B、C量尽的最小数；

因此，G量尽R。

又，G比R如同K比S，

因此，K也量尽S。

[VII. 13]

但E也量尽S；

因此，E、K量尽S。

因此，E、K量尽的最小数也量尽S。

[VII. 35]

但M是E、K量尽的最小数。

因此，M量尽S，较大的量尽较小的：

这是不可能的。

因此，没有小于N、O、M、P的数组以A比B、C比D和E比F成连比例；

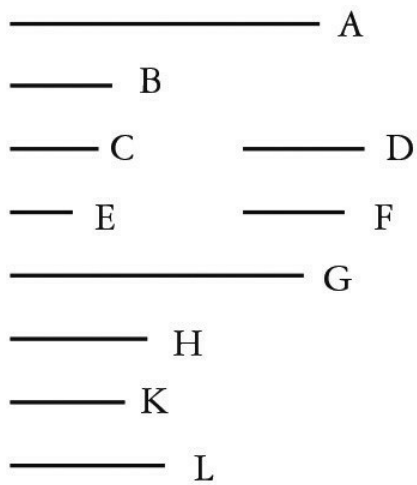
因此，N、O、M、P是以A比B、C比D和E比F成连比例的数组中最小的。

这就是所要证明的。

命题**05**

面数之比是其边之比的复比。

Plane numbers have to one another the ratio compounded of the ratios of their sides.



设A、B是面数，且设数C、D是A的边，数E、F是B的边；

我说，A与B之比是其边之比的复比。

这是因为，C比E和D比F已给定，设以C比E和D比F成连比例的最小数组是G、H、K，因此

C比E如同G比H，

且D比F如同H比K。

[VIII. 4]

又设D乘E得L。

现在，由于D乘C得A，且D乘E得L，

因此，C比E如同A比L。

[VII. 17]

但C比E如同G比H；

因此也有，G比H如同A比L。

又，由于E乘D得L，还有E乘F得B，

因此，D比F如同L比B。

[VII. 17]

但D比F如同H比K；

因此也有，H比K如同L比B。

但已证明，G比H如同A比L；

因此，取首末比例，G比K如同A比B。

[VII. 14]

但G与K之比是边之比的复比；

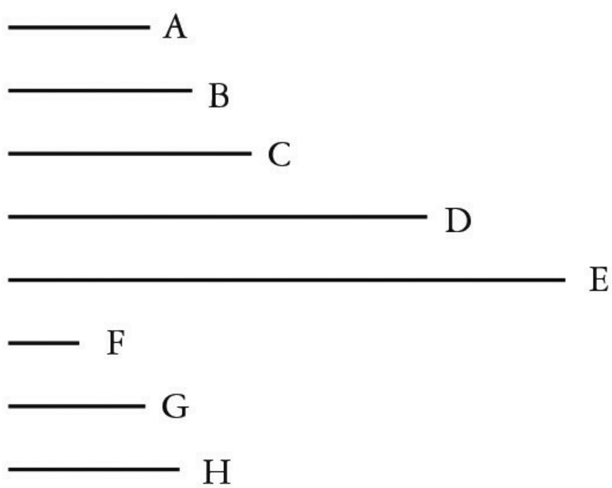
因此，A与B之比也是边之比的复比。

这就是所要证明的。

命题**06**

若有任意多个成连比例的数，且第一数量不尽第二数，则任一其他数也量不尽任一其他数。

If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the first do not measure the second, neither will any other measure any other.



设有任意多个成连比例的数A、B、C、D、E，

且设A量不尽B；

我说，任一其他数也量不尽任一其他数。

现在显然，A、B、C、D、E依次相互量不尽；这是因为A甚至量不尽B。

于是我说，任一其他数也量不尽任一其他数。

这是因为，如果可能，设A量尽C。

又，A、B、C有多少个，就取多少个数F、G、H，它们是与A、B、C有相同比的数组中最小的。

[VII. 33]

现在，由于F、G、H与A、B、C有相同的比，且数A、B、C的个数等于数F、G、H的个数，

因此，取首末比例，A比C如同F比H。

[VII. 14]

又，由于A比B如同F比G，

而A量不尽B，

因此，F也量不尽G；

[VII. 定义20]

因此，F不是一个单元，因为单元量尽任何数。

现在，F、H互素。

[VIII. 3]

又，F比H如同A比C；

因此，A也量不尽C。

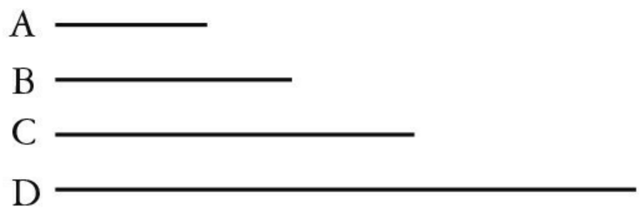
类似地，可以证明，任一其他数也量不尽任一其他数。

这就是所要证明的。

命题**07**

若有任意多个成连比例的数，且第一数量尽最后一数，则第一数也量尽第二数。

If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the first measure the last, it will measure the second also.



设有任意多个数A、B、C、D成连比例；且设A量尽D。

我说，A也量尽B。

这是因为，如果A量不尽B，则任一其他数也量不尽任一其他数。

[VIII. 6]

但A量尽D，

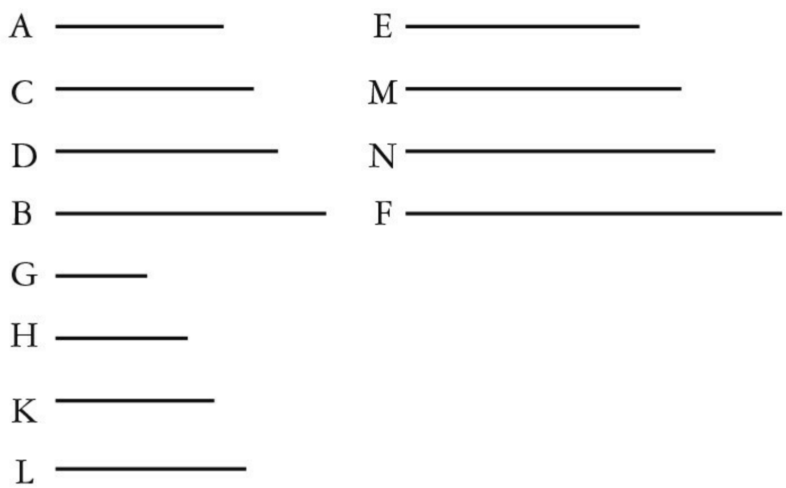
因此，A也量尽B。

这就是所要证明的。

命题**08**

若两数之间有几个与它们成连比例的数，则它们之间有多少个成连比例的数，与原来两数有相同比的两数之间就有多少个成连比例的数。

If between two numbers there fall numbers in continued proportion with them, then, however many numbers fall between them in continued proportion, so many will also fall in continued proportion between the numbers which have the same ratio with the original numbers.



设两数A、B之间有与它们成连比例的数C、D，且设E比F如同A比B。

我说，A、B之间有多少个成连比例的数，E、F之间也有多少个成连比例的数。

这是因为，A、B、C、D有多少个，就取多少个数G、H、K、L为与A、C、D、B有相同比的数组中最小的，

[VII. 33]

因此，它们的两端G、L互素。

[VIII. 3]

现在，由于A、C、D、B与G、H、K、L有相同的比，

且数A、C、D、B的个数等于数G、H、K、L的个数，

因此，取首末比例，A比B如同G比L。

[VII. 14]

但A比B如同E比F；

因此也有，G比L如同E比F。

但G、L互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，G量尽E与L量尽F有相同的次数。

其次，G量尽E有多少次，就设H、K分别量尽M、N也有多少次；

因此，G、H、K、L量尽E、M、N、F有相同的次数。

因此，G、H、K、L与E、M、N、F有相同的比。

[VII. 定义20]

但G、H、K、L与A、C、D、B有相同的比；

因此，A、C、D、B也与E、M、N、F有相同的比。

但A、C、D、B成连比例；

因此，E、M、N、F也成连比例。

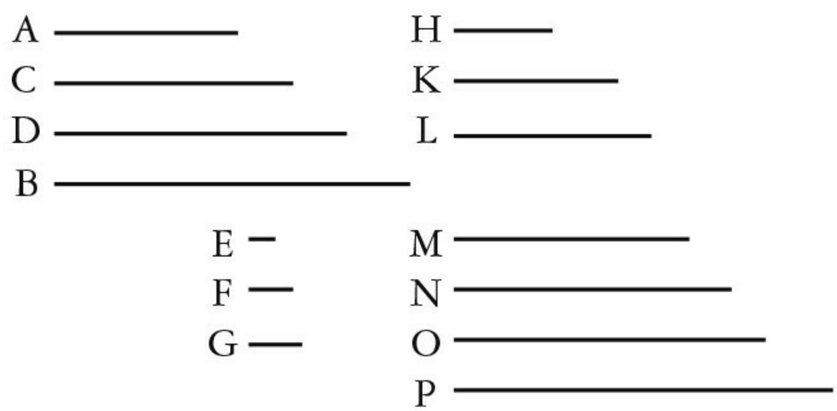
因此，A、B之间有多少个成连比例的数，E、F之间也有多少个成连比例的数。

这就是所要证明的。

命题**09**

若两数互素，且它们之间的一些数成连比例，则它们之间这些成连比例的数有多少个，它们中的每一个与单元之间成连比例的数就有多少个。

If two numbers be prime to one another, and numbers fall between them in continued proportion, then, however many numbers fall between them in continued proportion, so many will also fall between each of them and an unit in continued proportion.



设A、B两数互素，且设C、D是它们之间的成连比例的数，

且设单元为E；

我说，A、B之间成连比例的数有多少个，数A、B中的每一个与单元E之间成连比例的数就有多少个。

这是因为，设两数F、G是与A、C、D、B有相同比的数对中最小的，然后取有相同性质的三个数H、K、L，

直到个数等于A、C、D、B的个数。

[VIII. 2]

设它们是M、N、O、P。

现在，显然可得，F自乘得H，F乘H得M，G自乘得L，且G乘L得P。

[VIII. 2，推论]

又，由于M、N、O、P是与F、G有相同比的数组中最小的，

且A、C、D、B也是与F、G有相同比的数组中最小的，

[VIII. 1]

而数M、N、O、P的个数等于数A、C、D、B的个数，

因此，M、N、O、P分别等于A、C、D、B；

因此，M等于A，且P等于B。

现在，由于F自乘得H，

因此，按照F中的单元数，F量尽H。

但按照F中的单元数，单元E也量尽F；

因此，单元E量尽数F与F量尽H有相同的次数。

因此，单元E比数F如同F比H。

[VII. 定义20]

又，由于F乘H得M，

因此，按照F中的单元数，H量尽M。

但按照数F中的单元数，单元E也量尽数F；

因此，单元E量尽数F与H量尽M有相同的次数。

因此，单元E比数F如同H比M。

但也已证明，单元E比数F如同F比H；

因此也有，单元E比数F如同F比H，也如同H比M。

但M等于A；

因此，单元E比数F如同F比H，也如同H比A。

同理也有，

单元E比数G如同G比L，也如同L比B。

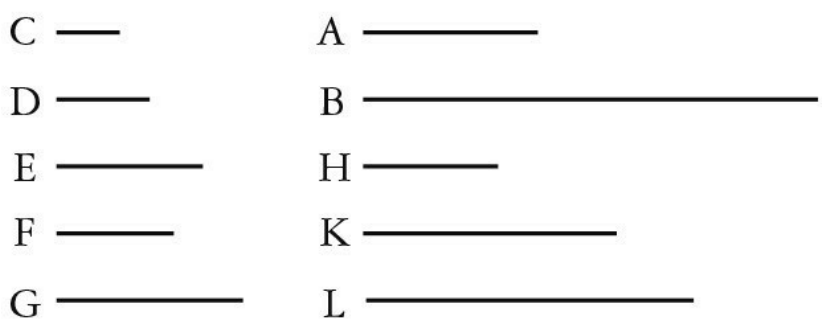
因此，A、B之间成连比例的数有多少个，数A、B中的每一个与单元E之间成连比例的数就有多少个。

这就是所要证明的。

命题**10**

若两数中的每一个与单元之间有一些数成连比例，则两数中的每一个与单元之间这些成连比例的数有多少个，这两数之间成连比例的数就有多少个。

If numbers fall between each of two numbers and an unit in continued proportion, however many numbers fall between each of them and an unit in continued proportion, so many also will fall between the numbers themselves in continued proportion.



设数D、E和F、G分别是两数A、B与单元C之间成连比例的数；

我说，数A、B中的每一个与单元C之间成连比例的数有多少个，A、B之间成连比例的数就有多少个。

这是因为，设D乘F得H，

且数D、F分别乘H得K、L。

现在，由于单元C比数D如同D比E，

因此，单元C量尽数D与D量尽E有相同的次数。

[VII. 定义20]

但按照D中的单元数，C量尽D；

按照D中的单元数，数D也量尽E；

因此，D自乘得E。

又，由于C比数D如同E比A，

因此，单元C量尽数D与E量尽A有相同的次数。

但按照D中的单元数，单元C量尽数D；

因此，按照D中的单元数，E也量尽A；

因此，D乘E得A。

同理也有，

F自乘得G，且F乘G得B。

又，由于D自乘得E，且D乘F得H，

因此，D比F如同E比H。

[VII. 17]

同理也有，

D比F如同H比G。

[VII. 18]

因此也有，E比H如同H比G。

又，由于D乘数E、H分别得A、K，

因此，E比H如同A比K。

[VII. 17]

但E比H如同D比F；

因此也有，D比F如同A比K。

又，由于数D、F乘H分别得K、L，

因此，D比F如同K比L。

[VII. 18]

但D比F如同A比K；

因此也有，A比K如同K比L。

还有，由于F乘数H、G分别得L、B，

因此，H比G如同L比B。

[VII. 17]

但H比G如同D比F；

因此也有，D比F如同L比B。

但已证明，D比F如同A比K，也如同K比L；

因此也有，A比K如同K比L，也如同L比B。

因此，A，K、L、B成连比例。

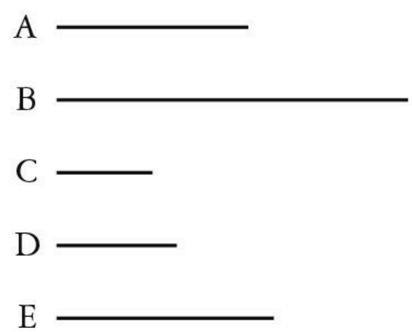
因此，数A、B中的每一个与单元C之间成连比例的数有多少个，A、B之间成连比例的数就有多少个。

这就是所要证明的。

命题**11**

两平方数之间有一个比例中项数，且平方数比平方数是其边比边的二倍比。

Between two square numbers there is one mean proportional number, and the square has to the square the ratio duplicate of that which the side has to the side.



设A、B是两平方数，

且设C是A的边，D是B的边。

我说，A、B之间有一个比例中项数，且A比B是C比D的二倍比。

这是因为，设C乘D得E。

现在，由于A是平方数，且C是它的边，

因此，C自乘得A。

同理也有，

D自乘得B。

于是，由于C乘数C、D分别得A、E，

因此，C比D如同A比E。

[VII. 17]

同理也有，

C比D如同E比B。

[VII. 18]

因此也有，A比E如同E比B。

因此，A、B之间有一个比例中项数。

其次我说，A比B也是C比D的二倍比。

这是因为，由于A、E、B是三个成比例的数，

因此，A比B是A比E的二倍比。

[V. 定义9]

但A比E如同C比D。

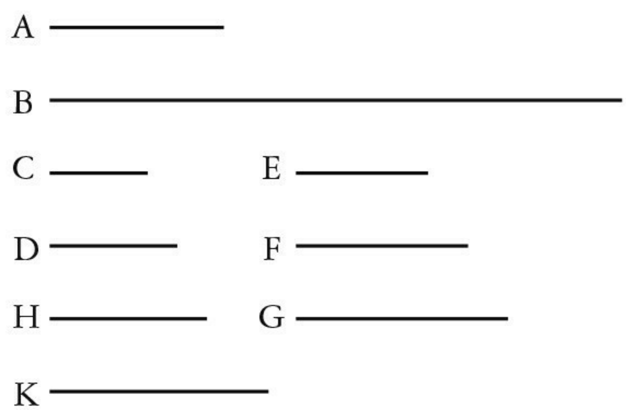
因此，A比B是边C比D的二倍比。

这就是所要证明的。

命题**12**

两立方数之间有两个比例中项数，且立方数比立方数是其边比边的三倍比。

Between two cube numbers there are two mean proportional numbers, and the cube has to the cube the ratio triplicate of that which the side has to the side.



设A、B是两立方数，

且设C是A的边，D是B的边；

我说，A、B之间有两个比例中项数，且A比B是C比D的三倍比。

这是因为，设C自乘得E，且C乘D得F；

设D自乘得G，

且设数C、D乘F分别得H、K。

现在，由于A是立方数，C是它的边，

且C自乘得E，

因此，C自乘得E，且C乘E得A。

同理也有，

D自乘得G，且D乘G得B。

又，由于C乘数C、D分别得E、F，

因此，C比D如同E比F。

[VII. 17]

同理也有，

C比D如同F比G。

[VII. 18]

又，由于C乘数E、F分别得A、H，

因此，E比F如同A比H。

[VII. 17]

但E比F如同C比D。

因此也有，C比D如同A比H。

又，由于数C、D乘F分别得H、K，

因此，C比D如同H比K。

[VII. 18]

又，由于D乘F、G分别得K、B，

因此，F比G如同K比B。

[VII. 17]

但F比G如同C比D;

因此也有，C比D如同A比H，也如同H比K，也如同K比B。

因此，H、K是A、B之间的两比例中项数。

其次我说，A比B也是C比D的三倍比。

这是因为，由于A、H、K、B是成比例的四个数，

因此，A比B是A比H的三倍比。

[V. 定义10]

但A比H如同C比D；

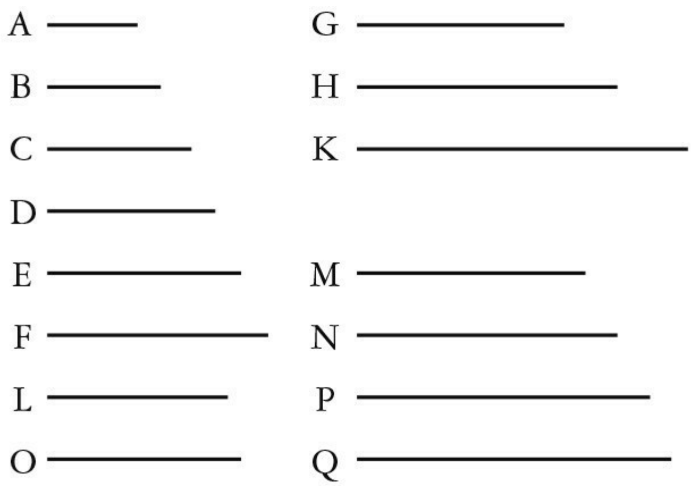
因此，A比B也是C比D的三倍比。

这就是所要证明的。

命题**13**

若有任意多个数成连比例，且每个数自乘得某数，则这些乘积成连比例；又，若原来的数乘这些乘积得某些数，则最后这些数也成连比例。

If there be as many numbers as we please in continued proportion, and each by multiplying itself make some number, the products will be proportional; and, if the original numbers by multiplying the products make certain numbers, the latter will also be proportional.



设有任意多个数A、B、C成连比例，因此A比B如同B比C；

设A、B、C自乘得D、E、F，

且A、B、C乘D、E、F得G、H、K；

我说，D、E、F和G、H、K都成连比例。

这是因为，设A乘B得L，

且设数A、B分别乘L得M、N。

又，设B乘C得O，

且设数B、C分别乘O得P、Q。

于是，以类似于之前的方式可以证明，

D、L、E和G、M、N、H都以A比B成连比例，

以及，

E、O、F和H、P、Q、K都以B比C成连比例。

现在，A比B如同B比C；

因此，D、L、E与E、O、F也有相同的比，

以及，G、M、N、H与H、P、Q、K有相同的比。

而D、L、E的个数等于E、O、F的个数，

且G、M、N、H的个数等于H、P、Q、K的个数；

因此，取首末比例，

D比E如同E比F，

以及，

G比H如同H比K。

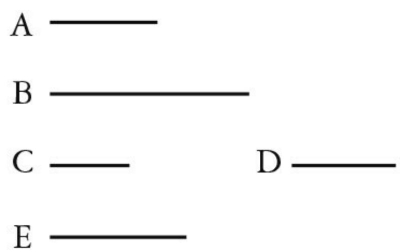
[VII. 14]

这就是所要证明的。

命题**14**

若一平方数量尽另一平方数，则一边也量尽另一边；又，若一边量尽另一边，则一平方数也量尽另一平方数。

If a square measure a square, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the square will also measure the square.



设A、B是平方数，C、D是它们的边，且设A量尽B；

我说，C也量尽D。

这是因为，设C乘D得E；

因此，A、E、B以C比D成连比例。

[VIII. 11]

又，由于A、E、B成连比例，且A量尽B，

因此，A也量尽E。

[VIII. 7]

又，A比E如同C比D；

因此，C也量尽D。

[VII. 定义20]

又，设C量尽D；

我说，A也量尽B。

这是因为，用同样的作图，可以类似地证明，A、E、B以C比D成连比例。

又，由于C比D如同A比E，

且C量尽D，

因此，A也量尽E。

[VII. 定义20]

而A、E、B成连比例；

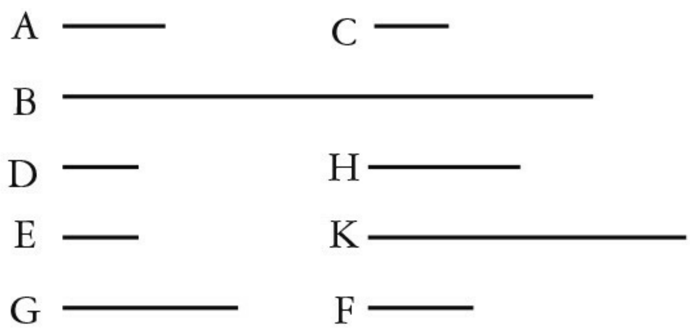
因此，A也量尽B。

这就是所要证明的。

命题**15**

若一立方数量尽另一立方数，则一边也量尽另一边；又，若一边量尽另一边，则一立方数也量尽另一立方数。

If a cube number measure a cube number, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the cube will also measure the cube.



设立方数A量尽立方数B，

且设C是A的边，D是B的边；

我说，C量尽D。

这是因为，设C自乘得E，

且D自乘得G；

又设C乘D得F，

且设C、D分别乘F得H、K。

现在显然可得，E、F、G和A、H、K、B都以C比D成连比例。

[VIII. 11，12]

又，由于A、H、K、B成连比例，

且A量尽B，

因此，它也量尽H。

[VIII. 7]

又，A比H如同C比D；

因此，C也量尽D。

[VII. 定义20]

其次，设C量尽D；

我说，A也量尽B。

这是因为，用同样的作图，可以类似地证明，A、H、K、B以C比D成连比例。

又，由于C量尽D，

且C比D如同A比H，

因此，A也量尽H。

[VII. 定义20]

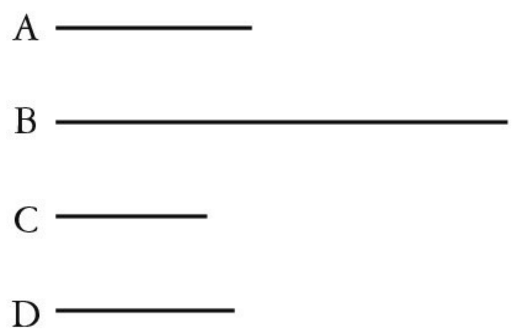
因此，A也量尽B。

这就是所要证明的。

命题**16**

若一平方数量不尽另一平方数，则一边也量不尽另一边；又，若一边量不尽另一边，则一平方数也量不尽另一平方数。

If a square number do not measure a square number, neither will the side measure the side; and, if the side do not measure the side, neither will the square measure the square.



设A、B是平方数，且C、D是它们的边；

且设A量不尽B；

我说，C也量不尽D。

这是因为，如果C量尽D，则A也量尽B。

[VIII. 14]

但A量不尽B；

因此，C也量不尽D。

又，设C量不尽D；

我说，A也量不尽B。

这是因为，如果A量尽B，则C也量尽D。

[VIII. 14]

但C量不尽D；

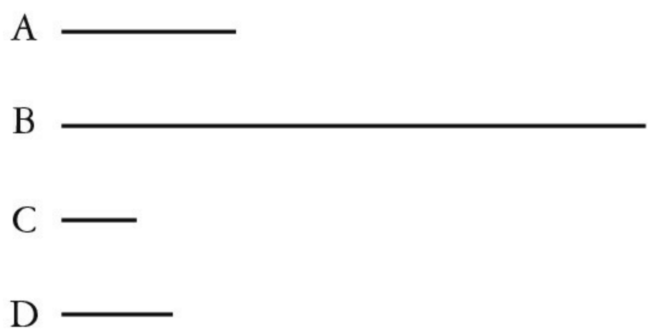
因此，A也量不尽B。

这就是所要证明的。

命题**17**

若一立方数量不尽另一立方数，则一边也量不尽另一边；又，若一边量不尽另一边，则一立方数也量不尽另一立方数。

If a cube number do not measure a cube number, neither will the side measure the side; and, if the side do not measure the side, neither will the cube measure the cube.



设立方数A量不尽立方数B，

且设C是A的边，D是B的边。

我说，C也量不尽D。

这是因为，如果C量尽D，则A也量尽B。

[VIII. 15]

但A量不尽B；

因此，C也量不尽D。

又，设C量不尽D；

我说，A也量不尽B。

这是因为，如果A量尽B，则C也量尽D。

[VIII. 15]

但C量不尽D；

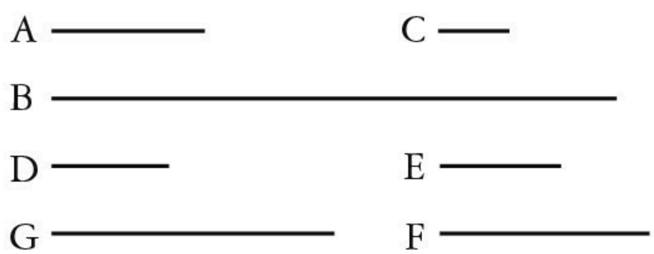
因此，A也量不尽B。

这就是所要证明的。

命题**18**

两相似面数之间有一个比例中项数；又，这两个面数之比是两对应边之比的二倍比。

Between two similar plane numbers there is one mean proportional number; and the plane number has to the plane number the ratio duplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side.



设A、B是两个相似面数，且设数C、D是A的两边，E、F是B的两边。

现在，由于相似面数的两边成比例，

[VII. 定义21]

因此，C比D如同E比F。

于是我说，A、B之间有一个比例中项数，且A比B是C比E的二倍比或D比F的二倍比，即两对应边之比的二倍比。

现在，由于C比D如同E比F，

因此，取更比例，C比E如同D比F。

[VII. 13]

又，由于A是面数，且C、D是它的两边，

因此，D乘C得A。

同理也有，

E乘F等于B。

现在，设D乘E得G。

于是，由于D乘C得A，且D乘E得G，

因此，C比E如同A比G。

[VII. 17]

但C比E如同D比F；

因此也有，D比F如同A比G。

又，由于E乘D得G，且E乘F得B，

因此，D比F如同G比B。

[VII. 17]

但已证明，D比F如同A比G；

因此也有，A比G如同G比B。

因此，A、G、B成连比例。

因此，A、B之间有一个比例中项数。

其次我说，A比B也是对应边之比的二倍比，即C比E或D比F的二倍比。

这是因为，由于A、G、B成连比例，所以

A比B是A比G的二倍比。

[V. 定义9]

又，A比G如同C比E，也如同D比F。

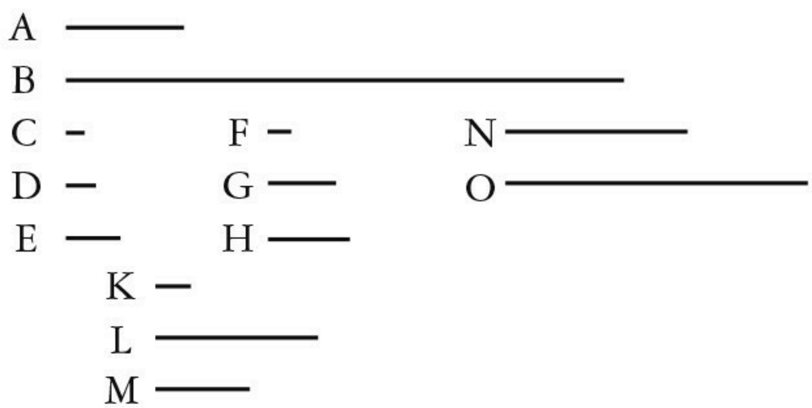
因此，A比B也是C比E或D比F的二倍比。

这就是所要证明的。

命题**19**

两相似体数之间有两个比例中项数；又，两相似体数之比是对应边之比的三倍比。

Between two similar solid numbers there fall two mean proportional numbers; and the solid number has to the similar solid number the ratio triplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side.



设A、B是两个相似体数，且设C、D、E是A的边，F、G、H是B的边。

现在，由于相似体数的边成比例，

[VII. 定义21]

因此，C比D如同F比G。

且D比E如同G比H。

我说，A、B之间有两个比例中项数，且A比B是C比F、D比G和E比H的三倍比。

这是因为，设C乘D得K，且F乘G得L。

现在，由于C、D与F、G有相同的比，

且K是C、D的乘积，

以及L是F、G的乘积，所以

K、L是相似面数；

[VII. 定义21]

因此，K、L之间有一个比例中项数。

[VIII. 18]

设它是M。

因此，M是D、F的乘积，如这之前的命题所证明的。

[VIII. 18]

这时，由于D乘C得K，且D乘F得M，

因此，C比F如同K比M。

[VII. 17]

但K比M如同M比L。

因此，K、M、L以C比F之比成连比例。

又，由于C比D如同F比G，

取更比例，C比F如同D比G。

[VII. 13]

同理也有，

D比G如同E比H。

因此，K、M、L以C比F、D比G和E比H成连比例。

其次，设E、H分别乘M得N、O。

现在，由于A是一个体数，且C、D、E是它的边，

因此，E乘C、D之积得A。

但C、D之积是K；

因此，E乘K得A。

同理也有，

H乘L得B。

现在，由于E乘K得A，且E乘M得N，

因此，K比M如同A比N。

[VII. 17]

但K比M如同C比F、D比G以及E比H；

因此也有，C比F、D比G和E比H如同A比N。

又，由于E、H分别乘M得N、O，

因此，E比H如同N比O。

[VII. 18]

但E比H如同C比F和D比G；

因此也有，C比F、D比G和E比H如同A比N和N比O。

又，由于H乘M得O，且H乘L得B，

因此，M比L如同O比B。

[VII. 17]

但M比L如同C比F、D比G和E比H。

因此也有，C比F、D比G和E比H不仅如同O比B，而且也如同A比N和N比O。

因此，A、N、O、B以前述边之比成连比例。

其次我说，A比B是对应边之比的三倍比，即是C比F、D比G和E比H的三倍比。

这是因为，由于A、N、O、B是四个成连比例的数，

因此，A比B是A比N的三倍比。

[V. 定义10]

但已证明，A比N如同C比F、D比G和E比H。

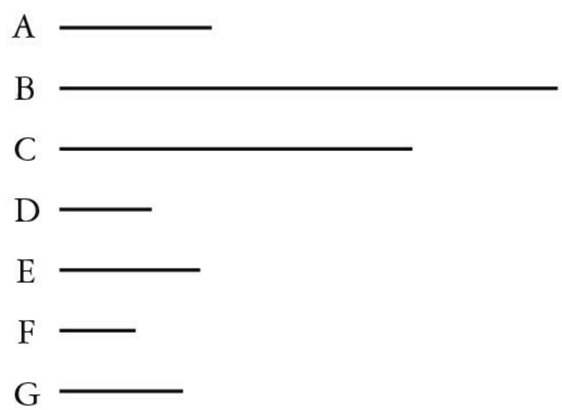
因此，A比B是对应边之比的三倍比，即C比F、D比G和E比H的三倍比。

这就是所要证明的。

命题**20**

若两数之间有一个比例中项数，则这两数是相似面数。

If one mean proportional number fall between two numbers, the numbers will be similar plane numbers.



设两数A、B之间有一个比例中项数C；

我说，A、B是相似面数。

设D、E是与A、C有相同比的数对中最小的，

[VII. 33]

因此，D量尽A与E量尽C有相同的次数。

[VII. 20]

现在，D量尽A有多少次，就设F中有多少单元；

因此，F乘D得A，

因此A是面数，D、F是它的边。

又，由于D、E是与C、B有相同比的数对中最小的，

因此，D量尽C与E量尽B有相同的次数。

[VII. 20]

于是，E量尽B有多少次，就设G中有多少单元；

因此，按照G中的单元数，E量尽B；

因此，G乘E得B。

因此，B是面数，且E、G是它的边。

因此，A、B是面数。

其次我说，它们也相似。

这是因为，由于F乘D得A，且F乘E得C，

因此，D比E如同A比C，即如同C比B。

[VII. 17]

又，由于E分别乘F、G得C、B，

因此，F比G如同C比B。

[VII. 17]

但C比B如同D比E；

因此也有，D比E如同F比G。

取更比例，D比F如同E比G。

[VII. 13]

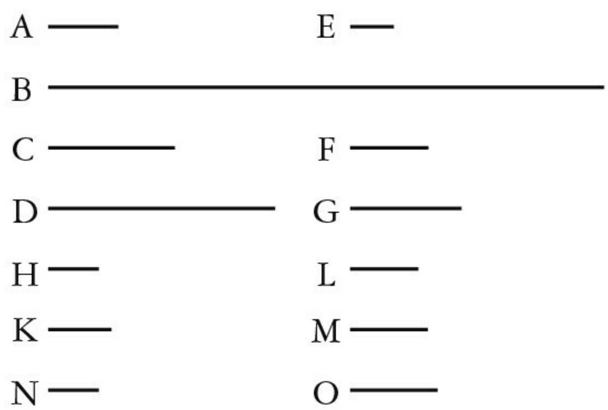
因此，A、B是相似面数；这是因为它们的边成比例。

这就是所要证明的。

命题**21**

若两数之间有两个比例中项数，则这两数是相似体数。

If two mean proportion numbers fall between two numbers, the numbers are similar solid numbers.



设两数A、B之间有两个比例中项数C、D；

我说，A、B是相似体数。

取三个数E、F、G是与A、C、D有相同比的数组中最小的；

[VII. 33或VIII. 2]

因此，它们的两端E、G互素。

[VIII. 3]

现在，E、G之间有一个比例中项数F，

因此，E、G是相似面数。

[VIII. 20]

于是，设H、K是E的边，且L、M是G的边。

因此，由前一命题显然可得，E、F、G以H比L和K比M成连比例。

现在，由于E、F、G是与A、C、D有相同比中的数组中最小的，

且数E、F、G的个数等于数A、C、D的个数，

因此，取首末比例，E比G如同A比D。

[VII. 14]

但E、G互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽A与G量尽D有相同的次数。

现在，E量尽A有多少次，就设N中有多少单元。

因此，N乘E得A。

但E是H、K的乘积；

因此，N乘H、K之积得A。

因此，A是体数，且H、K、N是它的边。

又，由于E、F、G是与C、D、B有相同比的数组中最小的，

因此，E量尽C与G量尽B有相同的次数。

现在，E量尽C有多少次，就设O中有多少单元。

因此，按照O中的单元数，G量尽B；

因此，O乘G得B。

但G是L、M的乘积；

因此，O乘L、M之积得B。

因此，B是体数，且L、M、O是它的边；

因此，A、B是体数。

其次我说，它们也相似。

这是因为，由于N、O乘E得A、C，

因此，N比O如同A比C，即如同E比F。

[VII. 18]

但E比F如同H比L和K比M；

因此也有，H比L如同K比M和N比O。

而H、K、N是A的边，且O、L、M是B的边。

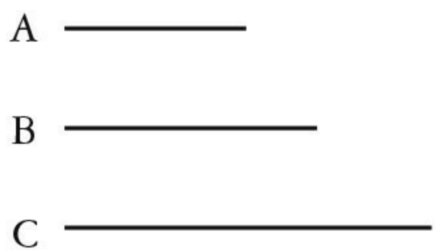
因此，A、B是相似体数。

这就是所要证明的。

命题**22**

若三数成连比例，且第一数是平方数，则第三数也是平方数。

If three numbers be in continued proportion, and the first be square, the third will also be square.



设A、B、C是三个成连比例的数，且第一数A是平方数；

我说，第三数C也是平方数。

这是因为，A、C之间有一个比例中项数B，

因此，A、C是相似面数。

[VIII. 20]

但A是平方数；

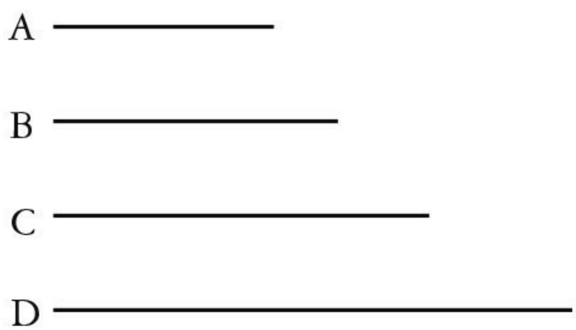
因此，C也是平方数。

这就是所要证明的。

命题**23**

若四数成连比例，且第一数是立方数，则第四数也是立方数。

If four numbers be in continued proportion, and the first be cube, the fourth will also be cube.



设A、B、C、D是四个成连比例的数，且A是立方数；

我说，D也是立方数。

这是因为，由于A、D之间有两个比例中项数B、C。

因此，A、D是相似体数。

[VIII. 21]

但A是立方数；

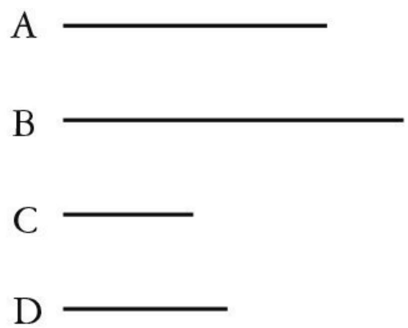
因此，D也是立方数。

这就是所要证明的。

命题**24**

若两数之比如同两平方数之比，且第一数是平方数，则第二数也是平方数。

If two numbers have to one another the ratio which a square number has to a square number, and the first be square, the second will also be square.



设两数A、B之比如同平方数C比平方数D，

且设A是平方数；

我说，B也是平方数。

这是因为，由于C、D是平方数，所以

C、D是相似面数。

因此，C、D之间有一个比例中项数。

[VIII. 18]

又，C比D如同A比B；

因此，A、B之间也有一个比例中项数。

[VIII. 8]

而A是平方数；

因此，B也是平方数。

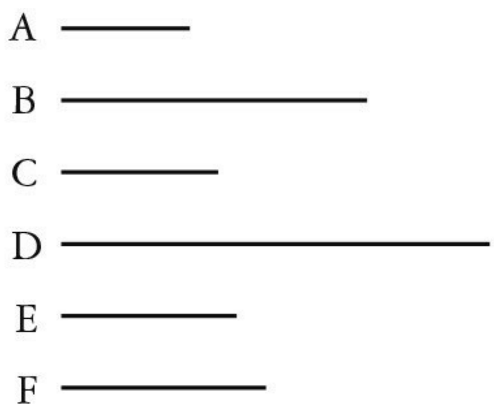
[VIII. 22]

这就是所要证明的。

命题**25**

若两数之比如同一个立方数比一个立方数，且第一数是立方数，则第二数也是立方数。

If two numbers have to one another the ratio which a cube number has to a cube number, and the first be cube, the second will also be cube.



设两数A、B之比如同立方数C比立方数D，且设A是立方数；

我说，B也是立方数。

这是因为，由于C、D是立方数，所以

C、D是相似体数。

因此，C、D之间有两个比例中项数。

[VIII. 19]

又，C、D之间有多少个成连比例的数，与它们有相同比的两数之间也有多少个成连比例的数；

[VIII. 8]

因此，A、B之间也有两个比例中项数。

设它们是E、F。

于是，由于四数A、E、F、B成连比例，

且A是立方数，

因此，B也是立方数。

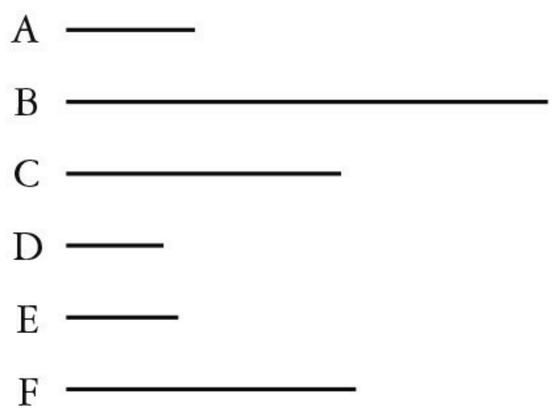
[VIII. 23]

这就是所要证明的。

命题**26**

相似面数之比如同一个平方数比一个平方数。

Similar plane numbers have to one another the ratio which a square number has to a square number.



设A、B是相似面数；

我说，A比B如同一个平方数比一个平方数。

这是因为，由于A、B是相似面数，

因此，A、B之间有一个比例中项数，

[VIII. 18]

设这个数是C；

且设D、E、F是与A、C、B有相同比的数组中最小的；

[VII. 33或VIII. 2]

因此，它们的两端D、F是平方数。

[VIII. 2，推论]

又，由于D比F如同A比B，

且D、F是平方数。

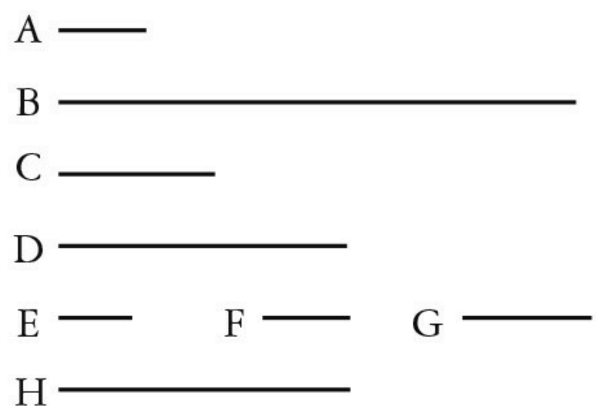
因此，A比B如同一个平方数比一个平方数。

这就是所要证明的。

命题**27**

相似体数之比如同一个立方数比一个立方数。

Similar solid numbers have to one another the ratio which a cube number has to a cube number.



设A、B是相似体数；

我说，A比B如同一个立方数比一个立方数。

这是因为，由于A、B是相似体数，

因此，A、B之间有两个比例中项数。

[VIII. 19]

设它们是C、D，

且设E、F、G、H是与A、C、D、B有相同比且个数相等的数组中最小的；

[VII. 33或VIII. 2]

因此，它们的两端E、H是立方数。

[VIII. 2，推论]

又，E比H如同A比B；

因此，A比B也如同一个立方数比一个立方数。

这就是所要证明的。

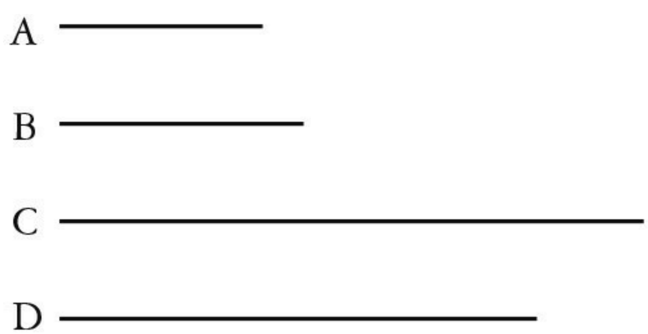
第九卷

命题 **Proposition**

命题**01**

若两相似面数相乘得某数，则这个乘积是平方数。

If two similar plane numbers by multiplying one another make some number, the product will be square.



设A、B是两个相似面数，且设A乘B得C；

我说，C是平方数。

这是因为，设A自乘得D。

因此，D是平方数。

于是，由于A自乘得D，且A乘B得C，

因此，A比B如同D比C。

[VII. 17]

又，由于A、B是相似面数，

因此，A、B之间有一个比例中项数。

[VIII. 18]

但如果两数之间有多少个成连比例的数，与它们有相同比的两数之间也有多少个成连比例的数；

[VIII. 8]

因此，D、C之间也有一个比例中项数。

而D是平方数；

因此，C也是平方数。

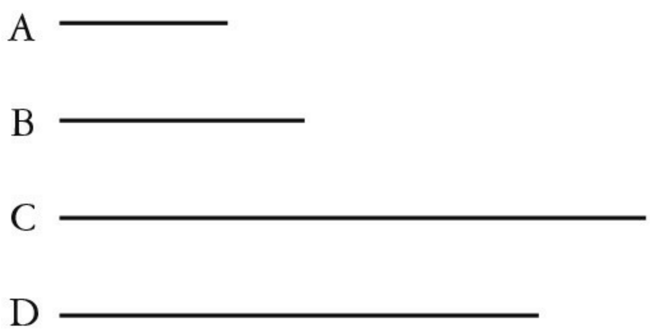
[VIII. 22]

这就是所要证明的。

命题**02**

若两数相乘得一个平方数，则它们是相似面数。

If two numbers by multiplying one another make a square number, they are similar plane numbers.



设A、B是两个数，且设A乘B得平方数C；

我说，A、B是相似面数。

这是因为，设A自乘得D；

因此，D是平方数。

现在，由于A自乘得D，且A乘B得C，

因此，A比B如同D比C。

[VII. 17]

又，由于D是平方数，且C也是平方数，

因此，D、C是相似面数。

因此，数D、C之间有一个比例中项数。

[VIII. 18]

又，D比C如同A比B；

因此，A、B之间也有一个比例中项数，

[VIII. 8]

但若两数之间有一个比例中项数，则它们是相似面数；

[VIII. 20]

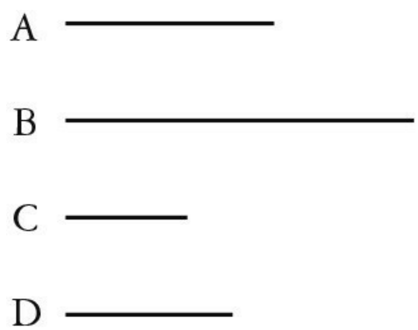
因此，A、B是相似面数。

这就是所要证明的。

命题**03**

若一个立方数自乘得某数，则这个乘积是立方数。

If a cube number by multiplying itself make some number, the product will be cube.



设立方数A自乘得B；

我说，B是立方数。

这是因为，设C是A的边，且C自乘得D。

于是显然可得，C乘D得A。

现在，由于C自乘得D，

因此，按照C中的单元数，C量尽D。

但按照C中的单元数，单元也量尽C；

因此，单元比C如同C比D。

[VII. 定义20]

又，由于C乘D得A，

因此，按照C中的单元数，D量尽A。

但按照C中的单元数，单元也量尽C；

因此，单元比C如同D比A。

但单元比C如同C比D;

因此也有，单元比C如同C比D，也如同D比A。

因此，单元与数A之间有两个比例中项数C、D成连比例。

又，由于A自乘得B，

因此，按照A中的单元数，A量尽B。

但按照A中的单元数，单元也量尽A;

因此，单元比A如同A比B。

[VII. 定义20]

但单元与A之间有两个比例中项数;

因此，A、B之间也有两个比例中项数。

[VIII. 8]

但若两数之间有两个比例中项数，且第一个是立方数，则第二个也是立方数。

[VIII. 23]

而A是立方数;

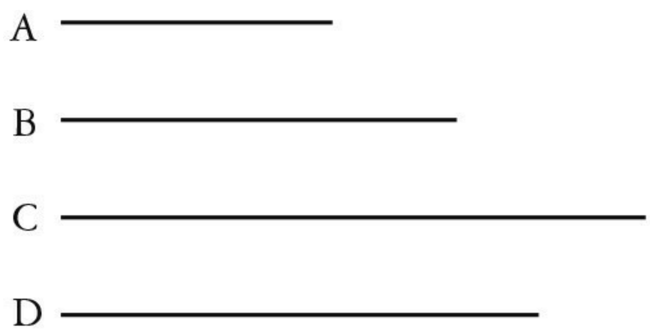
因此，B也是立方数。

这就是所要证明的。

命题**04**

若一个立方数乘一个立方数得某数，则这个乘积是立方数。

If a cube number by multiplying a cube number make some number, the product will be cube.



设立方数A乘立方数B得C；

我说，C是立方数。

这是因为，设A自乘得D；

因此，D是立方数。

[IX. 3]

又，由于A自乘得D，且A乘B得C，

因此，A比B如同D比C。

[VII. 17]

又，由于A、B是立方数，所以

A、B是相似体数。

因此，A、B之间有两个比例中项数；

[VIII. 19]

因此，D、C之间也有两个比例中项数。

[VIII. 8]

而D是立方数；

因此，C也是立方数。

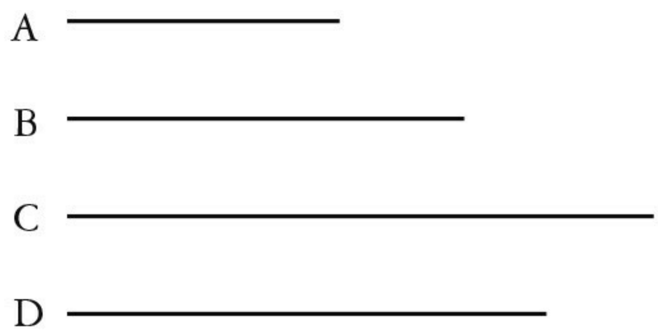
[VIII. 23]

这就是所要证明的。

命题**05**

若一个立方数乘某数得一个立方数，则此被乘数也是立方数。

If a cube number by multiplying any number make a cube number, the multiplied number will also be cube.



设立方数A乘某数B得立方数C;

我说，B是立方数。

这是因为，设A自乘得D;

因此，D是立方数。

[IX. 3]

现在，由于A自乘得D，且A乘B得C，

因此，A比B如同D比C。

[VII. 17]

又，由于D、C是立方数，所以

它们是相似体数。

因此，D、C之间有两个比例中项数。

[VIII. 19]

又，D比C如同A比B；

因此，A、B之间也有两个比例中项数。

[VIII. 8]

而A是立方数；

因此，B也是立方数。

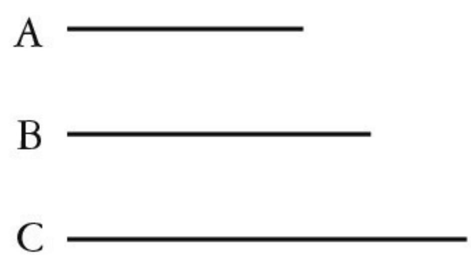
[VIII. 23]

这就是所要证明的。

命题**06**

若一数自乘得一个立方数，则它本身也是立方数。

If a number by multiplying itself make a cube number, it will itself also be cube.



设数A自乘得立方数B；

我说，A也是立方数。

这是因为，设A乘B得C。

于是，由于A自乘得B，且A乘B得C，

因此，C是立方数。

又，由于A自乘得B，

因此，按照A中的单元数，A量尽B。

但按照A中的单元数，单元也量尽A。

因此，单元比A如同A比B。

[VII. 定义20]

又，由于A乘B得C，

因此，按照A中的单元数，B量尽C。

但按照A中的单元数，单元也量尽A。

因此，单元比A如同B比C。

[VII. 定义20]

但单元比A如同A比B；

因此也有，A比B如同B比C。

又，由于B、C是立方数，所以

它们是相似体数。

因此，B、C之间有两个比例中项数。

[VIII. 19]

又，B比C如同A比B。

因此，A、B之间也有两个比例中项数。

[VIII. 8]

而B是立方数，

因此，A也是立方数。

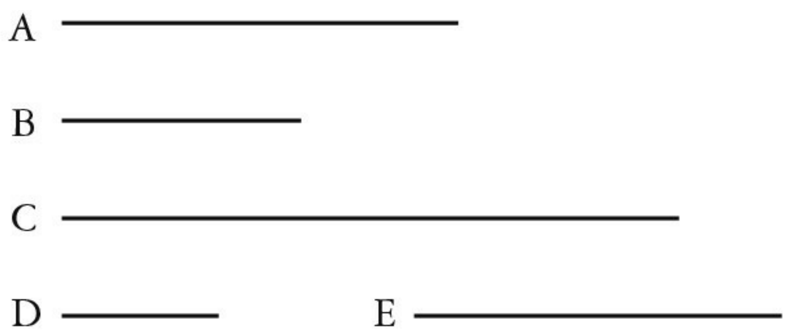
[参见VIII. 23]

这就是所要证明的。

命题**07**

若一个合数乘一数得某数，则这个乘积是体数。

1f a composite number by multiplying any number make some member, the product will be solid.



设合数A乘一数B得C；

我说，C是体数。

这是因为，由于A是合数，所以它被某数量尽。

[VII. 定义13]

设A被D量尽；

且D量尽A有多少次，就设E中有多少单元。

于是，由于按照E中的单元数，D量尽A，

因此，E乘D得A。

[VII. 定义15]

又，由于A乘B得C，

且A是D、E的乘积。

因此，D、E之积乘B得C。

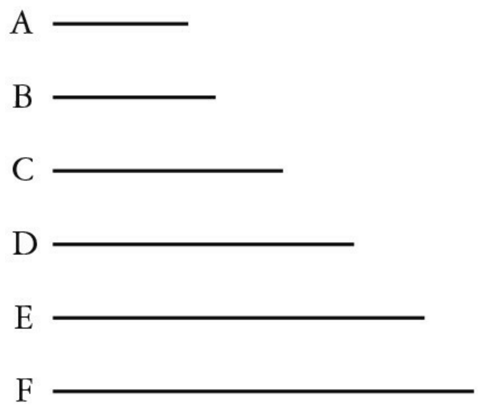
因此，C是体数，且D、E、B是它的边。

这就是所要证明的。

命题**08**

若从单元开始有任意多个数成连比例，则从单元起的第三个数是平方数，之后每隔一个也都是平方数；第四个数是立方数，之后每隔两个也都是立方数；第七个数既是立方数又是平方数，之后每隔五个也都既是立方数又是平方数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, the third from the unit will be square, as will also those which successively leave out one; the fourth will be cube, as will also all those which leave out two; and the seventh will be at once cube and square, as will also those which leave out five.



设从单元开始有任意多个数A、B、C、D、E、F成连比例；

我说，从单元起的第三个数B是平方数，之后每隔一个也都是平方数；第四个数C是立方数，之后每隔两个也都是立方数；第七个数F既是立方数又是平方数，之后每隔五个也都既是立方数又是平方数。

这是因为，由于单元比A如同A比B，

因此，单元量尽A与A量尽B有相同的次数。

[VII. 定义20]

但按照A中的单元数，单元量尽A；

因此，按照A中的单元数，A也量尽B。

因此，A自乘得B；

因此，B是平方数。

又，由于B、C、D成连比例，且B是平方数，

因此，D也是平方数。

[VIII. 22]

同理，

F也是平方数。

类似地，可以证明，之后每隔一个数都是平方数。

其次我说，从单元起的第四个数C是立方数，之后每隔两个也都是立方数。

这是因为，由于单元比A如同B比C，

因此，单元量尽数A与B量尽C有相同的次数。

但按照A中的单元数，单元量尽A；

因此，按照A中的单元数，B也量尽C。

因此，A乘B得C。

于是，由于A自乘得B，且A乘B得C，

因此，C是立方数。

又，由于C、D、E、F成连比例，且C是立方数，

因此，F也是立方数。

[VIII. 23]

但已证明，它也是平方数；

因此，从单元起的第七个数既是立方数又是平方数。

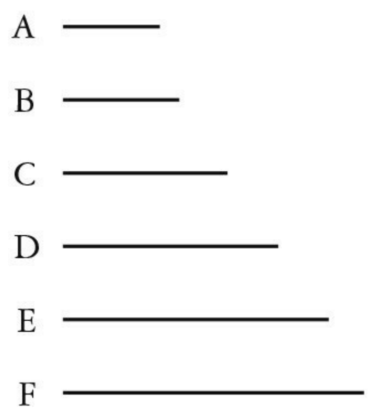
类似地，可以证明，之后每隔五个的所有那些数也都既是平方数又是立方数。

这就是所要证明的。

命题**09**

若从单元开始有任意多个数成连比例，且单元后面的数是平方数，则所有其余的数也是平方数。又，若单元后面的数是立方数，则所有其余的数也是立方数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, and the number after the unit be square, all the rest will also be square. And, if the number after the unit be cube, all the rest will also be cube.



设从单元开始有任意多个数A、B、C、D、E、F成连比例，

且设单元后面的数A是平方数；

我说，所有其余的数也是平方数。

现已证明，从单元起的第三个数B是平方数，之后每隔一个也都是平方数；

[IX. 8]

我说，所有其余的数也是平方数。

这是因为，由于A、B、C成连比例，

且A是平方数，

因此，C也是平方数。

[VIII. 22]

又，由于B、C、D成连比例，

且B是平方数，

因此，D也是平方数。

[VIII. 22]

类似地，可以证明，所有其余的数也是平方数。

其次，设A是立方数；

我说，所有其余的数也是立方数。

现已证明，从单元起的第四个数C是立方数，之后每隔两个的所有那些数也都是立方数；

[IX. 8]

我说，所有其余的数也是立方数。

这是因为，由于单元比A如同A比B，

因此，单元量尽A与A量尽B有相同的次数。

但按照A中的单元数，单元量尽A；

因此，按照A中的单元数，A也量尽B；

因此，A自乘得B。

而A是立方数。

但若一个立方数自乘得某数，则这个乘积是立方数。

[IX. 3]

因此，B也是立方数。

又，由于A、B、C、D这四个数成连比例，

且A是立方数，于是

D也是立方数。

[VIII. 23]

同理，

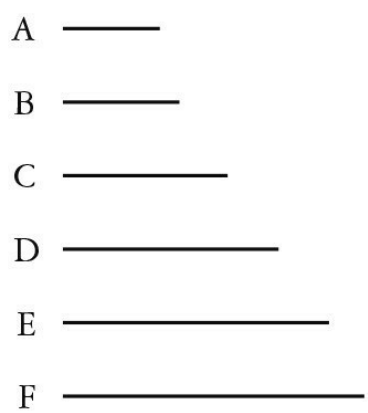
E也是立方数，以及类似地，所有其余的数也是立方数。

这就是所要证明的。

命题**10**

若从单元开始有任意多个数成连比例，且单元后面的数不是平方数，则除了从单元起的第三个数和每隔一个的所有那些数以外，任何其他数都不是平方数。又，若单元后面的数不是立方数，则除了从单元起的第四个数和每隔两个的所有那些数以外，任何其他数都不是立方数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, and the number after the unit be not square, neither will any other be square except the third from the unit and all those which leave out one. And, if the number after the unit be not cube, neither will any other be cube except the fourth from the unit and all those which leave out two.



设从单元开始有任意多个数A、B、C、D、E、F成连比例，

且设单元后面的数A不是平方数；

我说，除了从单元起的第三个数和每隔一个的所有那些数以外，任何其他数都不是平方数。

这是因为，如果可能，设C是平方数。

但B也是平方数；

[IX. 8]

因此，B比C如同一个平方数比一个平方数。

又，B比C如同A比B；

因此，A比B如同一个平方数比一个平方数；

因此，A、B是相似面数。

[VIII. 26，逆命题]

而B是平方数；

因此，A也是平方数：

这与假设矛盾。

因此，C不是平方数。

类似地，可以证明，除了从单元起的第三个数和每隔一个的所有那些数以外，任何其他数都不是平方数。

其次，设A不是立方数。

我说，除了从单元起的第四个数和每隔两个的所有那些数以外，其他任何数都不是立方数。

这是因为，如果可能，设D是立方数。

现在，C也是立方数；因为它是从单元起的第四个数。

[IX. 8]

而C比D如同B比C；

因此，B比C如同一个立方数比一个立方数。

而C是立方数；

因此，B也是立方数。

[VIII. 25]

又，由于单元比A如同A比B，

而按照A中的单元数，单元量尽A；

因此，按照A中的单元数，A也量尽B。

因此，A自乘得立方数B。

但若一个数自乘得一个立方数，则它自身也是立方数。

[IX. 6]

因此，A也是立方数：

这与假设矛盾。

因此，D不是立方数。

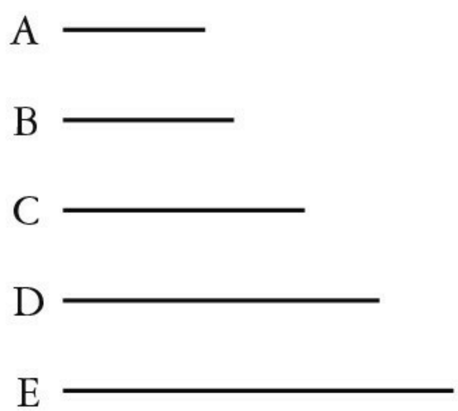
类似地，可以证明，除了从单元起的第四个数和每隔两个的所有那些数以外，任何其他数都不是立方数。

这就是所要证明的。

命题**11**

若从单元开始有任意多个数成连比例，则按照成连比例数组中的某个数，较小数量尽较大数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, the less measures the greater according to some one of the numbers which have place among the proportional numbers.



设从单元A开始，有任意多个数B、C、D、E成连比例。

我说，按照数C、D中的某一个，B、C、D、E中的最小数B量尽E。

这是因为，由于单元A比B如同D比E，

因此，单元A量尽数B与D量尽E有相同的次数；

因此，取更比例，单元A量尽D与B量尽E有相同的次数。

[VII. 15]

但按照D中的单元数，单元A量尽D；

因此，按照D中的单元数，B也量尽E。

因此，按照成连比例数组中的某个数D，较小数B量尽较大数E。

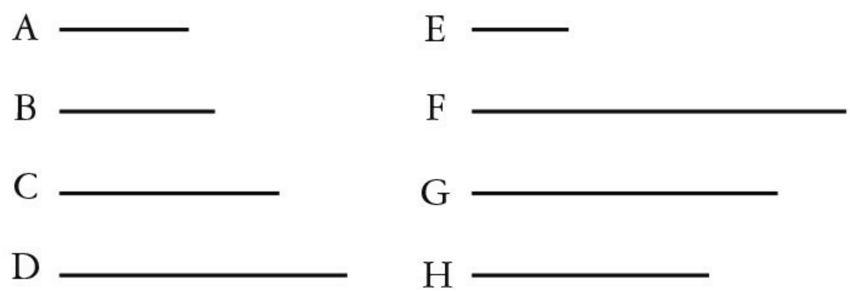
这就是所要证明的。

推论　显然，无论量数从单元算起在什么位置，沿着量数前面的数的方向，所按照的数从被量数算起也有同样的位置。

命题**12**

若从单元开始有任意多个数成连比例，则无论有多少个素数量尽最后一个数，单元后面那个数也被同样的素数量尽。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, by however many prime numbers the last is measured, the next to the unit will also be measured by the same.



设从单元开始，有任意多个数A、B、C、D成连比例。

我说，无论有多少个素数量尽D，A也被同样的素数量尽。

设D被某素数E量尽；

我说，E量尽A。

这是因为，假设E量不尽A；

现在，E是素数，且任一素数与它量不尽的数互素；

[VII. 29]

因此，E、A互素。

又，由于E量尽D，设按照F，E量尽D，

因此，E乘F得D。

又，由于按照C中的单元数，A量尽D，

[IX. 11和推论]

因此，A乘C得D。

但还有，E乘F得D；

因此，A、C的乘积等于E、F的乘积。

因此，A比E如同F比C。

[VII. 19]

又，A、E互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽C。

设按照G，E量尽C；

因此，E乘G得C。

但根据前一命题，

A乘B也得C。

[IX. 11和推论]

因此，A、B的乘积等于E、G的乘积。

因此，A比E如同G比B。

[VII. 19]

但A、E互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽B。

设按照H，E量尽B；

因此，E乘H得B。

但A自乘也得B；

[IX. 8]

因此，E、H的乘积等于A的平方。

因此，E比A如同A比H。

[VII. 19]

又，A、E互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，E量尽A，即前项量尽前项。

但已假设E量不尽A：

这是不可能的。

因此，E、A不互素。

因此，E、A互合。

但互合的数被某数量尽。

[VII. 定义14]

又，由于按照假设，E是素数，

而素数不被任何除自身以外的数量尽，

因此，E量尽A、E，

因此，E量尽A。

[但它也量尽D；

因此，E量尽A、D。]

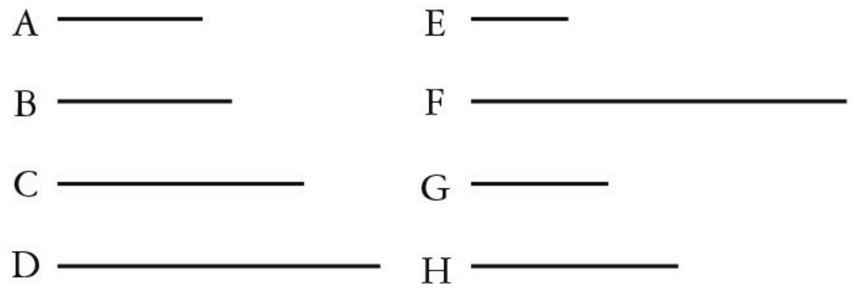
类似地，可以证明，无论有多少个素数量尽D，A也被同样的素数量尽。

这就是所要证明的。

命题**13**

若从单元开始有任意多个数成连比例，且单元后面那个数是素数，则除了这些成比例的数中的那些数以外，任何数都量不尽其中最大的数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be in continued proportion, and the number after the unit be prime, the greatest will not be measured by any except those which have a place among the proportional numbers.



设从单元开始，有任意多个数A、B、C、D成连比例，且单元后面那个数A是素数；

我说，它们中最大的数D不被除A、B、C以外的任何其他数量尽。

如果可能，设D被E量尽，且设E不同于数A、B、C中的任何一个。

于是显然，E不是素数。

这是因为，如果E是素数，并且量尽D，

那么E也量尽素数A

[IX. 12]，尽管E不同于A：

这是不可能的。

因此，E不是素数。

因此，E是合数。

但任何合数都被某一素数量尽；

[VII. 31]

因此，E被某一素数量尽。

其次我说，E不被除A以外的任何其他素数量尽。

这是因为，如果E被另一素数量尽，

而E量尽D，

则这一另外的数也量尽D;

于是，它也量尽素数A

[IX. 12]，尽管它不同于A：

这是不可能的。

因此，A量尽E。

又，由于E量尽D，设E按照F量尽D。

我说，F不同于数A、B、C中的任何一个。

这是因为，如果F与数A、B、C中的一个相同，

且F按照E量尽D，

则数A、B、C之一也按照E量尽D。

但数A、B、C之一按照数A、B、C之一量尽D;

[IX. 11]

因此，E也与数A、B、C之一相同：

这与假设矛盾。

因此，F不同于A、B、C中的任何一个。

类似地，可以证明，F被A量尽，只要再次证明F不是素数。

这是因为，如果F是素数，且量尽D，

则它也量尽素数A

[IX. 12]，尽管它不同于A：

这是不可能的；

因此，F不是素数。

因此，F是合数。

但任何合数都被某一素数量尽；

[VII. 31]

因此，F被某一素数量尽。

其次我说，F不被除A以外的任何其他素数量尽。

这是因为，如果F被另一素数量尽，

而F量尽D，

则这一另外的数也量尽D；

于是，它也量尽素数A

[IX. 12]，尽管它不同于A：

这是不可能的。

因此，A量尽F。

又，由于E按照F量尽D，

因此，E乘F得D。

但还有，A乘C也得D；

[IX. 11]

因此，A、C的乘积等于E、F的乘积。

因此有比例，A比F如同F比C。

[VII. 19]

但A量尽E；

因此，F也量尽C。

设F按照G量尽C。

于是，类似地，可以证明，G不同于数A、B中的任何一个，且A量尽G。

又，由于F按照G量尽C，

因此，F乘G得C。

但还有，A乘B也得C；

[IX. 11]

因此，A、B的乘积等于F、G的乘积。

因此有比例，A比F如同G比B。

[VII. 19]

但A量尽F；

因此，G也量尽B。

设G按照H量尽B。

于是，类似地，可以证明，H与A不同。

又，由于G按照H量尽B，

因此，G乘H得B。

但还有，A自乘也得B；

[IX. 8]

因此，H、G的乘积等于A的平方。

因此，H比A如同A比G。

[VII. 19]

但A量尽G；

因此，H也量尽素数A，尽管H不同于A；

这是荒谬的。

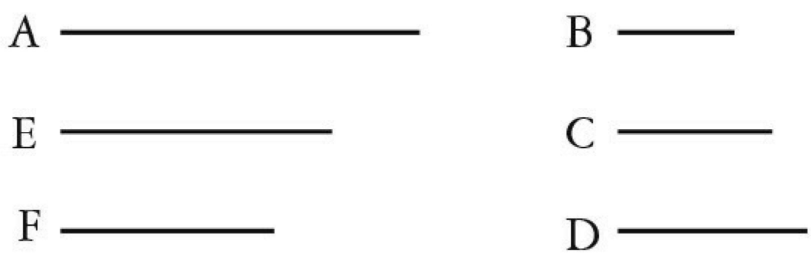
因此，最大的数D不被除A、B、C以外的任何其他数量尽。

这就是所要证明的。

命题**14**

若一数是被若干素数量尽的最小数，则除了原来量尽它的那些素数以外，任何其他素数都量不尽这个数。

If a number be the least that is measured by prime numbers, it will not be measured by any other prime number except those originally measuring it.



设数A是被素数B、C、D量尽的最小数；

我说，除了B、C、D以外，任何其他素数都量不尽A。

这是因为，如果可能，设素数E能量尽A，且设E不同于B、C、D中的任何一个。

现在，由于E量尽A，设E按照F量尽A；

因此，E乘F得A。

且A被素数B、C、D量尽。

但若两数相乘得某数，且某素数量尽该乘积，则它也量尽原来两数之一；

[VIII. 30]

因此，B、C、D量尽数E、F中的一个。

现在，它们量不尽E；

因为E是素数，且不同于数B、C、D中的任何一个。

因此，它们量尽F，而F小于A：

这是不可能的，因为根据假设，A是被B、C、D量尽的最小数。

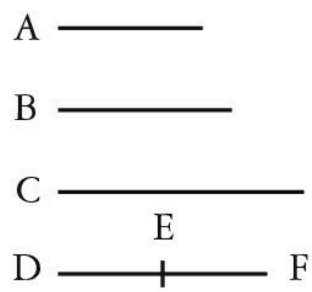
因此，除了B、C、D以外，没有素数量尽A。

这就是所要证明的。

命题**15**

若成连比例的三个数是那些与它们有相同比的数组中最小的，则它们中任何两个之和与其余那个数互素。

If three numbers in continued proportion be the least of those which have the same ratio with them, any two whatever added together will be prime to the remaining number.



设成连比例的三个数A、B、C是与它们有相同比的数组中最小的；

我说，数A、B、C中任何两个之和与其余那个数互素，即A、B之和与C互素；B、C之和与A互素，以及A、C之和与B互素。

这是因为，设两数DE、EF是与A、B、C有相同比的数组中最小的。

[VIII. 2]

于是显然，DE自乘得A，DE乘EF得B，以及EF自乘得C。

[VIII. 2]

现在，由于DE、EF是最小的，

所以它们互素。

[VII. 22]

但若两数互素，则它们之和也与每一个互素；

[VII. 28]

因此，DF也与数DE、EF中的每一个互素。

但DE也与EF互素；

因此，DF、DE与EF互素。

但若两数与某数互素，则它们的乘积也与该数互素；

[VII. 24]

因此，FD、DE的乘积与EF互素；

因此，FD、DE的乘积也与EF的平方互素。

[VII. 25]

但FD、DE的乘积是DE的平方与DE、EF的乘积之和；

[II. 3]

因此，DE的平方与DE、EF的乘积之和与EF的平方互素。

又，DE的平方是A，

DE、EF的乘积是B，

而EF的平方是C；

因此，A、B之和与C互素。

类似地，可以证明，B、C之和与A互素。

其次我说，A、C之和也与B互素。

这是因为，由于DF与数DE、EF中的每一个互素，

因此，DF的平方也与DE、EF的乘积 互素。

[VII. 24，25]

但DE、EF的平方和加上DE、EF乘积的二倍等于DF的平方；

[II. 4]

因此，DE、EF的平方和加上DE、EF乘积的二倍与DE、EF的乘积互素。

取分比例，DE、EF的平方和与DE、EF的乘积之和与DE、EF的乘积互素。

因此，再取分比例，DE、EF的平方和与DE、EF的乘积互素。

又，DE的平方是A，

DE、EF的乘积是B，

且EF的平方是C。

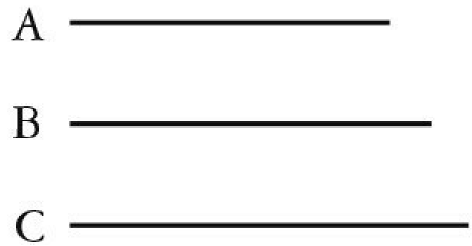
因此，A、C之和与B互素。

这就是所要证明的。

命题**16**

若两数互素，则第一数比第二数不如同第二数比任何其他数。

If two numbers be prime to one another, the second will not be to any other number as the first is to the second.



设两数A、B互素。

我说，A比B不如同B比任何其他数。

这是因为，如果可能，设A比B如同B比C。

现在，A、B互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，作为前项量尽前项，A量尽B。

但它也量尽自身；

因此，A量尽互素的A、B：

这是荒谬的。

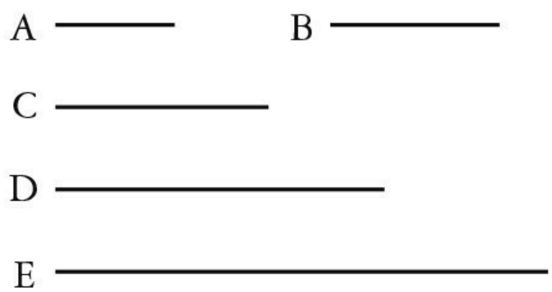
因此，A比B不如同B比C。

这就是所要证明的。

命题**17**

若有任意多个数成连比例，且它们的两端互素，则第一数比第二数不如同最后一数比任何其他数。

If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the extremes of them be prime to one another, the last will not be to any other number as the first to the second.



设有任意多个数A、B、C、D成连比例，

且设它们的两端A、D互素；

我说，A比B不如同D比任何其他数。

这是因为，如果可能，设A比B如同D比E。

[VII. 13]

但A、D互素，

而互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的最小数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，即前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

因此，A量尽B。

又，A比B如同B比C。

因此，B也量尽C；

因此，A也量尽C。

又，由于B比C如同C比D，

且B量尽C，

因此，C也量尽D。

而A也量尽C；

因此，A也量尽D。

而A也量尽A自身；

因此，A量尽互素的A、D：

这是不可能的。

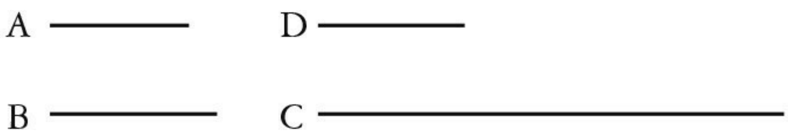
因此，A比B不如同D比任何其他数。

这就是所要证明的。

命题**18**

给定两个数，考察是否可能对它们求出第三比例数。

Given two numbers, to investigate whether it is possible to find a third proportional to them.



设A、B是给定的两个数，要求考察是否可能对它们求出第三比例数。

现在，A、B要么互素，要么不互素。

如果它们互素，则已经证明，不可能对它们求出第三比例数。

[IX. 16]

其次，设A、B不互素，

且设B自乘得C。

于是，A要么量尽C，要么量不尽C。

首先，设A按照D量尽C；

因此，A乘D得C。

但B自乘也得C；

因此，A、D的乘积等于B的平方。

因此，A比B如同B比D；

[VII. 19]

这样就对A、B求出了第三比例数D。

其次，设A量不尽C；

我说，对A、B求出第三比例数是不可能的。

这是因为，如果可能，设已求出第三比例数D。

因此，A、D的乘积等于B的平方。

但B的平方是C；

因此，A、D的乘积等于C。

因此，A乘D得C；

因此，A按照D量尽C。

但根据假设，A也量不尽C：

这是荒谬的。

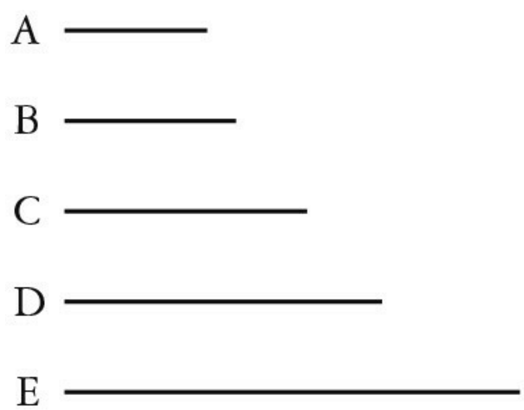
因此，当A量不尽C时，对A、B不可能求出第三比例数。

这就是所要证明的。

命题**19**

给定三个数，考察何时可能对它们求出第四比例数。

Given three numbers, to investigate when it is possible to find a fourth proportional to them.



设A、B、C是给定的三个数，要求考察何时可能对它们求出第四比例数。……[1]

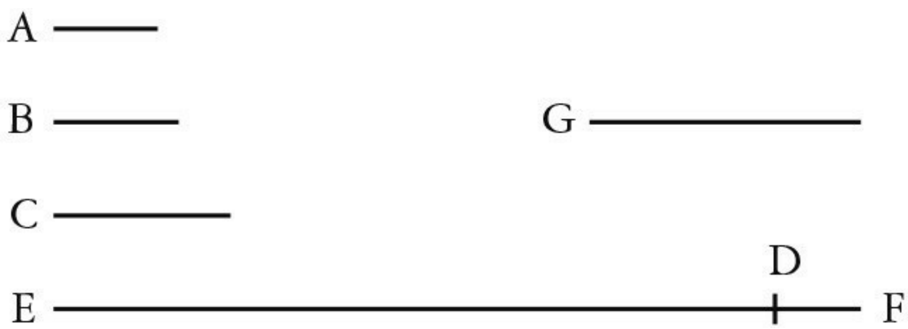
---

[1]据希思的说法，该命题的希腊文本错误百出，且该证明的完整无缺的部分是错误的。然而，与命题18类似，A、B、C的第四比例数存在的条件是：A量尽B与C的乘积。（译者注）

命题**20**

存在着比指定的任意多个素数更多的素数。

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.



设A、B、C是指定的素数。

我说，存在着比A、B、C更多的素数。

这是因为，取被A、B、C量尽的最小数，

[VII. 36]

并设它为DE；

再给DE加上单元DF。

于是，EF要么是素数，要么不是素数。

首先，设它是素数；

于是，已经找到了比A、B、C更多的素数A、B、C、EF。

其次，设EF不是素数；

因此，EF被某个素数量尽；

[VII. 31]

设EF被素数G量尽。

我说，G与数A、B、C中的任何一个都不同。

这是因为，如果可能，设G与数A、B、C中的某一个相同。

现在，A、B、C量尽DE；

因此，G也量尽DE。

但G也量尽EF。

因此，G作为一个数量尽余数，即单元DF：

这是荒谬的。

因此，G与数A、B、C中的任何一个都不同。

又根据假设，G是素数。

因此，已经找到了素数A、B、C、G，其个数多于指定的A、B、C的个数。

这就是所要证明的。

命题**21**

把任意多个偶数相加，总和是偶数。

If as many even numbers as we please be added together, the whole is even.



设把任意多个偶数AB、BC、CD、DE相加；

我说，总和AE是偶数。

这是因为，由于数AB、BC、CD、DE中的每一个都是偶数，所以它有半个部分；

[VII. 定义6]

因此，总和AE也有半个部分。

但偶数是能被分成两个相等部分的数；

[VII. 定义6]

因此，AE是偶数。

这就是所要证明的。

命题**22**

把任意多个奇数相加，且其个数是偶数，则总和是偶数。

If as many odd numbers as we please be added together, and their multitude be even, the whole will be even.



把偶数个奇数AB、BC、CD、DE相加；

我说，总和AE是偶数。

这是因为，由于数AB、BC、CD、DE中的每一个都是奇数，所以如果从每一个中减去一个单元，则每一个余数都是偶数；

[VII. 定义7]

因此，它们的总和是偶数。

[IX. 21]

但单元的个数也是偶数。

因此，总和AE也是偶数。

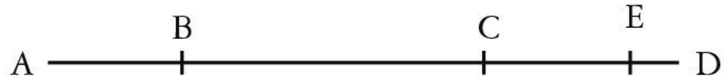
[IX. 21]

这就是所要证明的。

命题**23**

把任意多个奇数相加，且其个数是奇数，则总和也是奇数。

If as many odd numbers as we please be added together, and their multitude be odd, the whole will also be odd.



设奇数个奇数AB、BC、CD相加；

我说，总和AD是奇数。

设从CD中减去单元DE；

因此，余数CE是偶数。

[VII. 定义7]

但CA也是偶数；

[IX. 22]

因此，总和AE也是偶数。

[IX. 21]

而DE是一个单元。

因此，AD是奇数。

[VII. 定义7]

这就是所要证明的。

命题**24**

从偶数中减去偶数，余数是偶数。

If from an even number an even number be subtracted, the remainder will be even.



设从偶数AB中减去偶数BC；

我说，余数CA是偶数。

这是因为，由于AB是偶数，所以它有半个部分。

[VII. 定义6]

同理，BC也有半个部分；

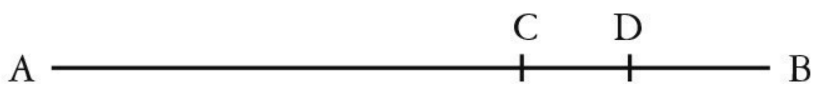
因此，余数CA也有半个部分，因此AC也是偶数。

这就是所要证明的。

命题**25**

从偶数中减去奇数，余数是奇数。

If from an even number an odd number be subtracted, the remainder will be odd.



设从偶数AB中减去奇数BC；

我说，余数CA是奇数。

设从BC中减去单元CD；

因此，DB是偶数。

[VII. 定义7]

但AB也是偶数；

因此，余数AD也是偶数。

[IX. 24]

而CD是单元；

因此，CA是奇数。

[VII. 定义7]

这就是所要证明的。

命题**26**

从奇数中减去奇数，余数是偶数。

If from an odd number an, odd number be subtracted, the remainder will be even.



设从奇数AB中减去奇数BC；

我说，余数CA是偶数。

这是因为，由于AB是奇数，设从AB中减去单元BD；

因此，余数AD是偶数。

[VII. 定义7]

同理，CD也是偶数；

[VII. 定义7]

因此，余数CA也是偶数。

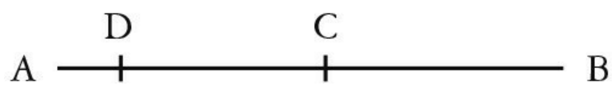
[IX. 24]

这就是所要证明的。

命题**27**

从奇数中减去偶数，余数是奇数。

If from an odd number an even number be subtracted, the remainder will be odd.



设从奇数AB中减去偶数BC；

我说，余数CA是奇数。

设从奇数AB中减去单元AD；

因此，DB是偶数。

[VII. 定义7]

但BC也是偶数；

因此，余数CD是偶数。

[IX. 24]

因此，CA是奇数。

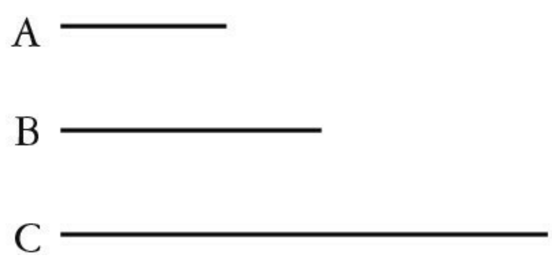
[VII. 定义7]

这就是所要证明的。

命题**28**

奇数乘偶数，乘积是偶数。

If an odd number by multiplying an even number make some number, the product will be even.



设奇数A乘偶数B得C；

我说，C是偶数。

这是因为，由于A乘B得C，

因此，A中有多少单元，C就由多少个等于B的数相加而成。

[VII. 定义15]

而B是偶数；

因此，C由若干偶数相加而成。

但把任意多个偶数相加，总和是偶数。

[IX. 21]

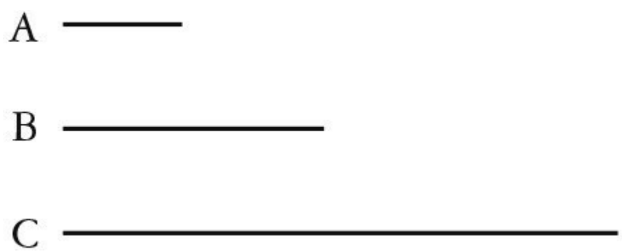
因此，C是偶数。

这就是所要证明的。

命题**29**

奇数乘奇数，乘积是奇数。

If an odd number by multiplying an odd number make some number, the product will be odd.



设奇数A乘奇数B得C;

我说，C是奇数。

这是因为，由于A乘B得C，

因此，A中有多少单元，C就由多少个等于B的数相加而成。

[VII. 定义15]

而数A、B中的每一个都是奇数;

因此，C由奇数个奇数相加而成。

因此，C是奇数。

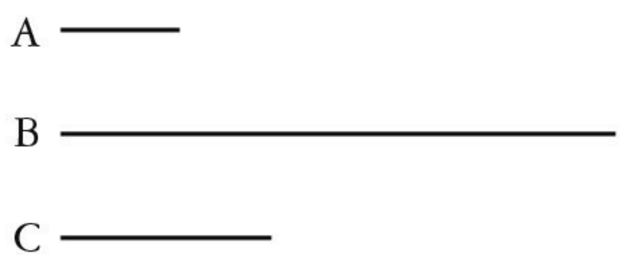
[IX. 23]

这就是所要证明的。

命题**30**

若一个奇数量尽一个偶数，则这个奇数也量尽这个偶数的一半。

If an odd number measure an even number, it will also measure the half of it.



设奇数A量尽偶数B；

我说，A也量尽B的一半。

这是因为，由于A量尽B，

设A按照C量尽B；

我说，C不是奇数。

这是因为，如果可能，设C是奇数。

于是，由于A按照C量尽B，

因此，A乘C得B。

因此，B由奇数个奇数相加而成。

因此，B是奇数：

[IX. 23]

这是荒谬的，因为根据假设B是偶数。

因此，C不是奇数；

因此，C是偶数。

因此，A量尽B有偶数次。

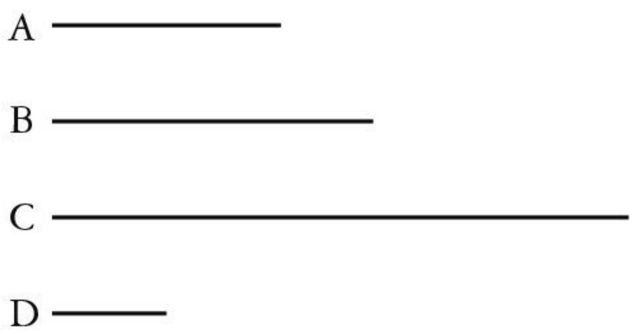
因此，A也量尽B的一半。

这就是所要证明的。

命题**31**

若一个奇数与某数互素，则这个奇数与此数的二倍互素。

If an odd number be prime to any number, it will also be prime to the double of it.



设奇数A与某数B互素，且设C是B的二倍；

我说，A与C互素。

这是因为，如果它们不互素，则有某数量尽它们。

设这个数是D。

现在，A是奇数；

因此，D也是奇数，

又，由于D是量尽C的奇数，

且C是偶数，

因此，D也量尽C的一半。

[IX. 30]

但B是C的一半；

因此，D量尽B。

但D也量尽A；

因此，D量尽互素的A、B：

这是不可能的。

因此，A不能不与C互素。

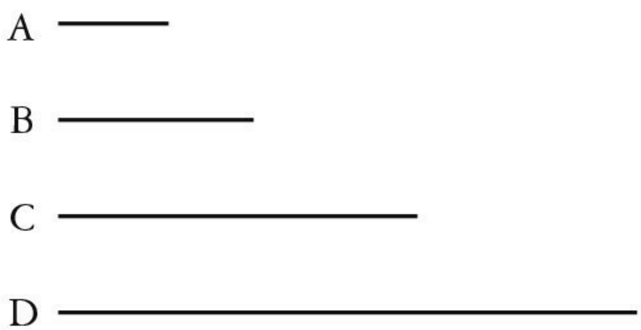
因此，A、C互素。

这就是所要证明的。

命题**32**

从二开始连续二倍的每一个数仅是偶倍偶数。

Each of the numbers which are continually doubled beginning from a dyad is even-times even only.



设二是A，并设任意多个数B、C、D是从A开始的连续二倍的数；

我说，B、C、D仅是偶倍偶数。

现在，数B、C、D中的每一个显然是偶倍偶数；这是因为它是从二开始加倍的。

我说，它也仅是偶倍偶数。

这是因为，设从一个单元开始。

于是，由于从单元开始的任意多个数成连比例，

且单元后面的数A是素数，

因此，除A、B、C以外，任何其他数都量不尽数A、B、C、D中最大的D。

[IX. 13]

又，数A、B、C中的每一个都是偶数；

因此，D仅是偶倍偶数。

[VII. 定义8]

类似地，可以证明，数B、C中的每一个也仅是偶倍偶数。

这就是所要证明的。

命题**33**

若一数的一半是奇数，则它仅是偶倍奇数。

If a number have its half odd, it is even-times odd only.



设数A的一半是奇数；

我说，A仅是偶倍奇数。

现在，它显然是偶倍奇数；这是因为，它的一半是奇数，且此奇数量尽它的次数为偶数。

[VII. 定义9]

其次我说，它也仅是偶倍奇数。

这是因为，如果A也是偶倍偶数，那么

它被一个偶数按照偶数量尽；

[VII. 定义8]

于是，它的一半也被一个偶数量尽，尽管它的一半是奇数：

这是荒谬的。

因此，A仅是偶倍奇数。

这就是所要证明的。

命题**34**

若一个数既不是从二开始连续二倍的数，它的一半也不是奇数，则它既是偶倍偶数，又是偶倍奇数。

If a number neither be one of those which are continually doubled from a dyad, nor have its half odd, it is both even-times even and even-times odd.



设数A既不是从二开始连续二倍的数，它的一半也不是奇数；

我说，A既是偶倍偶数又是偶倍奇数。

现在， A显然是偶倍偶数；

这是因为它的一半不是奇数。

[VII. 定义8]

其次我说，它也是偶倍奇数。

这是因为，如果将A二等分，然后将它的一半二等分，以此类推，我们会遇到某个奇数，它按照一个偶数量尽A。

这是因为，如果不是这样，我们会遇到二，

且A是从二开始连续二倍的那些数中的数：

这与假设矛盾。

于是，A是偶倍奇数。

但已证明，它也是偶倍偶数。

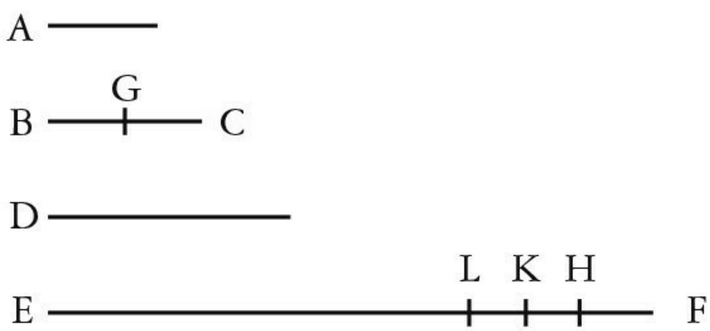
因此，A既是偶倍偶数又是偶倍奇数。

这就是所要证明的。

命题**35**

若有任意多个数成连比例，又从第二数和最后一数中减去等于第一数的数，则从第二数得的余数比第一数如同从最后一数得的余数比最后一数以前各项之和。

If as many numbers as we please be in continued proportion, and there be subtracted from the second and the last numbers equal to the first, then, as the excess of the second is to the first, so will the excess of the last be to all those before it.



设从最小的A开始的任意多个数A、BC、D、EF成连比例，

且设从BC和EF中减去等于A的数BG、FH；

我说，GC比A如同EH比A、BC、D之和。

这是因为，设FK等于BC，且FL等于D。

于是，由于FK等于BC，

且其中的部分FH等于部分BG，

因此，余数HK等于余数GC。

又，由于EF比D如同D比BC，又如同BC比A，

而D等于FL，BC等于FK，A等于FH。

因此，EF比FL如同LF比FK，又如同FK比FH。

取分比例，EL比LF如同LK比FK，又如同KH比FH。

[VII. 11，13]

因此也有，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[VII. 12]

因此，KH比FH如同EL、LK、KH之和比LF、FK、HF之和。

但KH等于CG，FH等于A，EL、LK、KH之和等于D、BC、A之和；

因此，CG比A如同EH比D、BC、A之和。

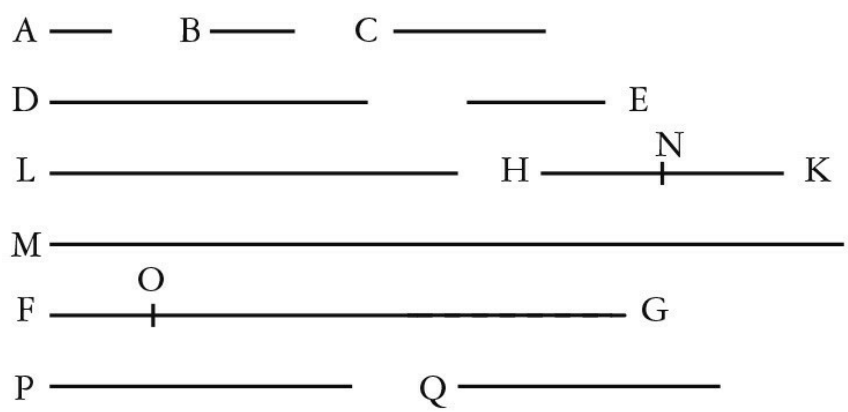
因此，从第二数得的余数比第一数如同从最后一数得的余数比最后一数以前各项之和。

这就是所要证明的。

命题**36**

若从单元开始有任意多个数以二倍比成连比例，且所有数之和是素数，则这个和与最后一数的乘积是完全数。

If as many numbers as we please beginning from an unit be set out continuously in double proportion, until the sum of all becomes prime, and if the sum multiplied into the last make some number, the product will be perfect.



设从单元开始有任意多个数A、B、C、D以二倍比成连比例，且所有数之和是素数，

设E等于其和，且设E乘D得FG；

我说，FG是完全数。

这是因为，A、B、C、D有多少个，就设有多少个E、HK、L、M为从E开始的以二倍比成连比例的数；

于是，取首末比例，A比D如同E比M。

[VII. 14]

因此，E、D的乘积等于A、M的乘积。

[VII. 19]

而E、D的乘积是FG；

因此，A、M的乘积也是FG。

因此，A乘M得FG；

因此，按照A中的单元数，M量尽FG。

而A是二；

因此，FG是M的二倍。

但M、L、HK、E彼此连续二倍，

因此，E、HK、L、M、FG以二倍比成连比例。

现在，设从第二数HK和最后一数FG中减去等于第一数E的数；

因此，从第二数得的余数比第一数如同从最后一数得的余数比最后一数以前各项之和。

[IX. 35]

因此，NK比E如同OG比M、L、HK、E之和。

而NK等于E；

因此，OG也等于M、L、HK、E之和。

但FO也等于E，

而E等于A、B、C、D与单元之和。

因此，整个FG等于E、HK、L、M与A、B、C、D以及单元之和；

且FG被它们量尽。

我还说，除A、B、C、D、E、HK、L、M和单元以外，任何其他数都量不尽FG。

这是因为，如果可能，设某数P量尽FG，

且设P不同于数A、B、C、D、E、HK、L、M中的任何一个。

又，P量尽FG有多少次，就设Q中有多少单元；

因此，Q乘P得FG。

但E乘D也得FG；

因此，E比Q如同P比D。

[VII. 19]

又，由于A、B、C、D从单元开始成连比例，

因此，除A、B、C以外，任何其他数都量不尽D。

[IX. 13]

又，根据假设，P不同于数A、B、C中的任何一个；

因此，P量不尽D。

但P比D如同E比Q；

因此，E也量不尽Q。

[VII. 定义20]

而E是素数；

且任一素数与它量不尽的任一数互素。

[VII. 29]

因此，E、Q互素。

但互素的数是与它们有相同比的数对中最小的，

[VII. 21]

且用有相同比的数对中最小的数对量那些有相同比的数对，较大数量尽较大数与较小数量尽较小数有相同的次数，也就是说，前项量尽前项与后项量尽后项有相同的次数；

[VII. 20]

又，E比Q如同P比D；

因此，E量尽P与Q量尽D有相同的次数。

但除A、B、C以外，任何其他数都量不尽D；

因此，Q与A、B、C中的一个相同。

设它与B相同。

又，B、C、D有多少个，就从E开始取多少个E、HK、L。

现在，E、HK、L与B、C、D有相同的比；

因此，取首末比例，B比D如同E比L。

[VII. 14]

因此，B、L的乘积等于D、E的乘积。

[VII. 19]

但D、E的乘积等于Q、P的乘积；

因此，Q、P的乘积也等于B、L的乘积。

因此，Q比B如同L比P。

[VII. 19]

而Q与B相同；

因此，L也与P相同：

这是不可能的，这是因为，根据假设，P不同于给定的任何数。

因此，除A、B、C、D、E、HK、L、M和单元以外，没有数量尽FG。

又，已经证明，FG等于A、B、C、D、E、HK、L、M以及单元之和。

且完全数是等于其自身所有部分之和的数；

[VII. 定义22]

因此，FG是完全数。

这就是所要证明的。

第十卷

定义Ⅰ **Definitions**

01 / 能被同一量量尽的那些量叫作可公度量，不能被同一量量尽的那些量不可公度量。

Those magnitudes are said to be *commensurable* which are measured by the same measure, and those *incommensurable* which cannot have any common measure.

02 / 当直线上的正方形能被同一面量尽时，这些直线叫作正方可公度；当直线上的正方形不能被同一面量尽时，这些直线叫作正方不可公度。

Straight lines are *commensurable in square* when the squares on them are measured by the same area, and *incommensurable in square* when the squares on them cannot possibly have any area as a common measure.

03/ 由这些假设可以证明，分别存在着无穷多条与指定的直线可公度和不可公度的直线，一些仅是长度可公度和不可公度，另一些则也是正方可公度和不可公度。于是，把指定的直线称为有理直线，把那些与之可公度的直线，无论是长度可公度和正方可公度，还是仅正方可公度，称为有理直线，而把那些与之不可公度的直线称为无理直线。

With these hypotheses, it is proved that there exist straight lines infinite in multitude which are commensurable and incommensurable respectively, some in length only, and others in square also, with an assigned straight line. Let then the assigned straight line be called *rational*, and those straight lines

which are commensurable with it, whether in length and in square or in square only, *rational*, but those which are incommensurable with it *irrational*.

04 / 并把指定直线上的正方形称为有理的，把与该正方可公度的面称为有理的，而把与该正方不可公度的面称为无理的，把产生这些无理面的直线称为无理的，也就是说，当这些面为正方形时，这些直线即指边本身，而当这些面为任何其他直线形时，这些直线则指与面相等的正方形的边。

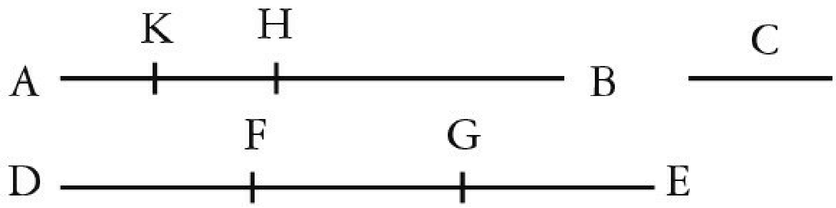
And let the square on the assigned straight line be called *rational* and those areas which are commensurable with it *rational*, but those which are incommensurable with it *irrational*, and the straight lines which produce them *irrational*, that is, in case the areas are squares, the sides themselves, but in case they are any other rectilineal figures, the straight lines on which are described squares equal to them.

命题 **Proposition**

命题**01**

给定两个不等的量，从较大量中减去一个大于它的一半的量，再从余量中减去大于该余量一半的量，这样继续作下去，则会得到某个小于较小量的余量。

Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process be repeated continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out.



设AB、C是两个不等的量，其中AB较大：

我说，从AB中减去一个大于它的一半的量，再从余量中减去大于该余量一半的量，这样继续作下去，则会得到某个小于量C的余量。

这是因为，C的若干倍总会大于AB。

[参见V. 定义4]

设DE是C的若干倍，且DE大于AB；

将DE分成等于C的几部分DF、FG、GE，

从AB中减去大于它的一半的BH，

又从AH中减去大于它的一半的HK，

这样继续作下去，直到AB被分成的个数等于DE被分成的个数。

然后，设被分成的AK、KH、HB的个数等于DF、FG、GE的个数。

现在，由于DE大于AB，

又从DE中减去小于它的一半的EG，

又从AB中减去大于它的一半的BH，

因此，余量GD大于余量HA。

又，由于GD大于HA，

又从DG中减去它的一半GF，

又从HA中减去大于它的一半的HK，

因此，余量DF大于余量AK。

但DF等于C；

因此，C也大于AK。

因此，AK小于C。

因此，量AB的余量AK小于给定的较小量C。

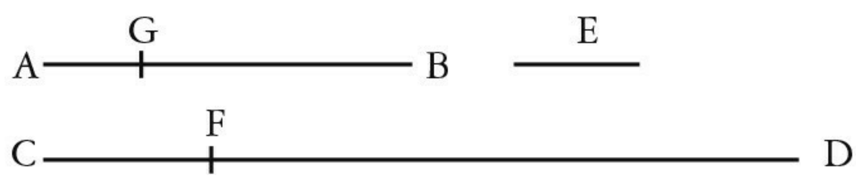
这就是所要证明的。

推论 即使减去的部分是一半，也可类似地证明此命题。

命题**02**

从两个不等量的较大量中不断减去较小量，直到余量小于较小量，再从较小量中不断减去余量，直到余量小于前一余量，轮流重复这个过程，若得到的余量总是量不尽它前面的量，则原有的两个量不可公度。

If, when the less of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable.



设有两个不等的量AB、CD，且AB较小，从较大量中不断减去较小量，直到余量小于小量，再从较小量中不断减去余量，直到余量小于前一余量，轮流重复这个过程，设得到的余量总是量不尽它前面的量；

我说，两量AB、CD不可公度。

这是因为，如果它们可公度，则有某个量量尽它们。

设量尽它们的量是E；

设AB量CD得FD，在量FD时，余下的CF小于AB。

又设CF量AB得BG，在量BG时，余下的AG小于CF，

轮流重复这个过程，直到余下某量小于E。

假设这样做下去，余量AG小于E。

于是，由于E量尽AB，

而AB量尽FD，

因此，E也量尽FD。

但E也量尽整个CD；

因此，E也量尽余量CF。

但CF量尽BG；

因此，E也量尽BG。

但E也量尽整个AB；

因此，E也量尽余量AG，较大的量量尽较小的量：

这是不可能的。

因此，没有量量尽AB、CD；

因此，量AB、CD不可公度。

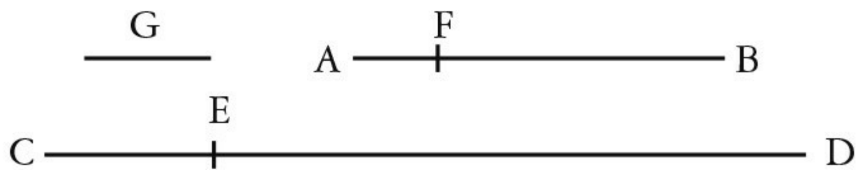
[X. 定义1]

这就是所要证明的。

命题**03**

给定两个可公度量，求它们的最大公度量。

Given two commensurable magnitudes, to find their greatest common measure.



设两个给定的可公度量是AB、CD，其中AB较小；

于是，要求找到AB、CD的最大公度量。

现在，量AB要么量尽CD，要么量不尽CD。

于是，如果AB量尽CD（AB也量尽它自身），则AB是AB、CD的公度量。

又，它显然也是最大的；

这是因为，大于AB的量量不尽AB。

其次，设AB量不尽CD。

于是，从两个不等量的较大量中不断减去较小量，直到余量小于较小量，再从较小量中不断减去余量，直到余量小于前一余量，轮流重复这个过程，则有一余量量尽它前面的量，这是因为AB、CD并非不可公度。

[参见X. 2]

设AB量CD得ED，在量ED时，余下的CE小于AB；

又设EC量AB得FB，在量FB时，余下的AF小于CE；

且设AF量尽CE。

于是，由于AF量尽CE，

而CE量尽FB，

因此，AF也量尽FB。

但AF也量尽它自身；

因此，AF也量尽整个AB。

但AB量尽ED；

因此，AF也量尽ED。

但AF也量尽CE；

因此，AF也量尽整个CD。

因此，AF是AB、CD的公度量。

其次我说，AF也是最大的。

这是因为，如果不是这样，则有某个大于AF的量量尽AB、CD。

设它是G。

于是，由于G量尽AB，

而AB量尽ED，

因此，G也量尽ED。

但G也量尽整个CD；

因此，G也量尽余量CE。

但CE量尽FB；

因此，G也量尽FB。

但G也量尽整个AB，

因此，它也量尽余量AF，较大的量量尽较小的量：

这是不可能的。

因此，没有大于AF的量量尽AB、CD；

因此，AF是AB、CD的最大公度量。

这样便找到了两个给定可公度量AB、CD的最大公度量。

这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若一个量量尽两个量，则它也量尽它们的最大公度量。

命题**04**

给定三个可公度量，求它们的最大公度量。

Given three commensurable magnitudes, to find their greatest common measure.



设A、B、C是三个给定的可公度量，于是，要求找到A、B、C的最大公度量。

取两量A、B的最大公度量，设它是D；

[X. 3]

于是，D要么量尽C，要么量不尽C。

首先，设它量尽C。

于是，由于D量尽C，

而D也量尽A、B；

因此，D是A、B、C的公度量。

显然，D也是最大的；

这是因为，大于D的量量不尽A、B。

其次，设D量不尽C。

首先我说，C、D可公度。

这是因为，由于A、B、C可公度，所以

有某个量量尽它们，

当然它也量尽A、B；

因此，它也量尽A、B的最大公度量D。

[X. 3，推论]

但它也量尽C；

因此，所说的量量尽C、D；

因此，C、D可公度。

现在，取C、D的最大公度量，设它是E。

[X. 3]

于是，由于E量尽D，

而D量尽A、B，

因此，E也量尽A、B。

但E也量尽C；

因此，E量尽A、B、C；

因此，E是A、B、C的公度量。

其次我说，E也是最大的。

这是因为，如果可能，设有某个大于E的量F量尽A、B、C。

于是，由于F量尽A、B、C，所以

F也量尽A、B，

并量尽A、B的最大公度量。

[X. 3，推论]

但A、B的最大公度量是D；

因此，F量尽D。

但F也量尽C；

因此，F量尽C、D；

因此，F也量尽C、D的最大公度量。

[X. 3，推论]

但C、D的最大公度量是E；

因此，F量尽E，较大的量量尽较小的量：

这是不可能的。

因此，没有大于E的量量尽A、B、C；

因此，如果D量不尽C，则E就是A、B、C的最大公度量，

而若D量尽C，则D本身就是最大公度量。

这样便求出了给定的三个可公度量的最大公度量。

这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若一个量量尽三个量，则它也量尽它们的最大公度量。

类似地，也可以求出更多可公度量的最大公度量，该推论可以拓展。

命题**05**

可公度量之比如同一个数比一个数。

Commensurable magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number.



设A、B是可公度量；

我说，A比B如同一个数比一个数。

这是因为，由于A、B可公度，所以有某个量量尽它们。

设这个量是C。

且C量尽A有多少次，就设D中有多少单元；

以及C量尽B有多少次，就设E中有多少单元。

于是，由于按照D中的单元数，C量尽A，

而按照D中的单元数，单元也量尽D，

因此，单元量尽数D与量C量尽A有相同的次数；

因此，C比A如同单元比D；

[V. 15]

因此，取反比例，A比C如同D比单元。

[参见V. 7，推论]

又，由于按照E中的单元数，C量尽B，

而按照E中的单元数，单元也量尽E，

因此，单元量尽E与C量尽B有相同的次数；

因此，C比B如同单元比E。

但已证明，

A比C如同D比单元；

因此，取首末比例，

A比B如同数D比E。

[V. 22]

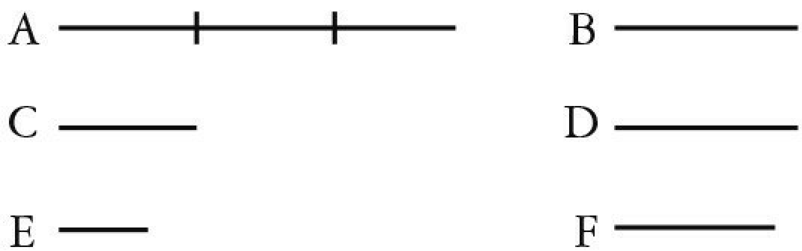
因此，可公度量A比B如同数D比数E。

这就是所要证明的。

命题**06**

若两个量之比如同一个数比一个数，则这两个量可公度。

If two magnitudes have to one another the ratio which a number has to a number, the magnitudes will be commensurable.



设两个量A比B如同数D比数E；

我说，A、B可公度。

设D中有多少单元，就把A分成多少相等的部分，

且设C等于其中一个部分；

且设E中有多少单元，F就由多少等于C的量所构成。

于是，由于D中有多少单元，A中就有多少等于C的量，所以

单元是D的怎样一部分，C也是A的同样一部分；

因此，C比A如同单元比D。

[VII. 定义20]

但单元量尽数D；

因此，C也量尽A。

又，由于C比A如同单元比D，

因此，取反比例，A比C如同数D比单元。

[参见V. 7，推论]

又，由于E中有多少单元，F中就有多少等于C的量，

因此，C比F如同单元比E。

[VII. 定义20]

但也已证明，

A比C如同D比单元；

因此，取首末比例，

A比F如同D比E。

[V. 22]

但D比E如同A比B；

因此也有，A比B如同A比F。

[V. 11]

因此，A与量B、F中的每一个有相同的比；

因此，B等于F。

[V. 9]

但C量尽F；

因此，C也量尽B。

此外，它也量尽A；

因此，C量尽A、B。

因此，A与B可公度。

这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，若有两数D、E和一直线A，则可作一直线[F]，使给定直线A比它如同数D比数E。

而且，如果取A、F的比例中项为B，

则A比F如同A上的正方形比B上的正方形，即第一条直线比第三条直线如同在第一条直线上所作的图形比在第二条直线上所作的与之相似且有相似位置的图形。

[VI. 19，推论]

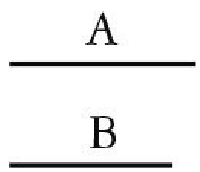
但A比F如同数D比数E；

因此已经做到，数D比数E也如同直线A上的图形比直线B上的图形。

命题**07**

不可公度量之比不如同一个数比一个数。

Incommensurable magnitudes have not to one another the ratio which a number has to a number.



设A、B是不可公度量；

我说，A比B不如同一个数比一个数。

这是因为，如果A比B如同一个数比一个数，

则A与B可公度。

[X. 6]

但A与B不可公度；

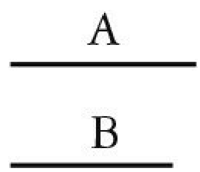
因此，A比B不如同一个数比一个数。

这就是所要证明的。

命题**08**

若两个量之比不如同于一个数比一个数，则这两个量不可公度。

If two magnitudes have not to one another the ratio which a number has to a number, the magnitudes will be incommensurable.



设两个量A比B不如同一个数比一个数；

我说，量A、B不可公度。

这是因为，若它们可公度，则A比B如同一个数比一个数。

[X. 5]

但A比B不如同一个数比一个数；

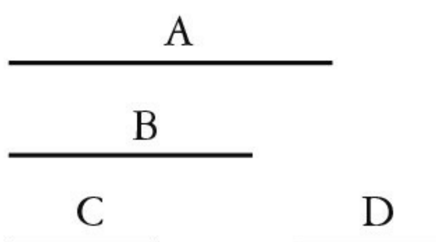
因此，量A、B不可公度。

这就是所要证明的。

命题**09**

长度可公度的直线上的正方形之比如同一个平方数比一个平方数；若正方形之比如同一个平方数比一个平方数，则正方形的边也是长度可公度的。但长度不可公度的直线上的正方形之比不如同一个平方数比一个平方数；若正方形之比不如同一个平方数比一个平方数，则它们的边也不是长度可公度的。

The squares on straight lines commensurable in length have to one another the ratio which a square number has to a square number; and squares which have to one another the ratio which a square number has to a square number will also have their sides commensurable in length. But the squares on straight lines incommensurable in length have not to one another the ratio which a square number has to a square number; and squares which have not to one another the ratio which a square number has to a square number will not have their sides commensurable in length either.



设A、B长度可公度；

我说，A上的正方形比B上的正方形如同一个平方数比一个平方数。

这是因为，由于A与B是长度可公度的，

因此，A比B如同一个数比一个数。

[X. 5]

设这两个数之比是C比D。

于是，由于A比B如同C比D，

而A上的正方形比B上的正方形是A比B的二倍比，

这是因为相似图形彼此之比是其对应边之比的二倍比；

[VI. 20，推论]

且C的平方比D的平方是C比D的二倍比，

这是因为两个平方数之间有一个比例中项数，且平方数比平方数是边比边的二倍比；

[VIII. 11]

因此也有，A上的正方形比B上的正方形如同C的平方比D的平方。

其次，设A上的正方形比B上的正方形如同C的平方比D的平方。

我说，A与B是长度可公度的。

这是因为，由于A上的正方形比B上的正方形如同C的平方比D的平方，

而A上的正方形比B上的正方形是A比B的二倍比，

且C的平方比D的平方是C比D的二倍比，

因此也有，A比B如同C比D。

因此，A比B如同数C比数D；

因此，A与B是长度可公度的。

[X. 6]

其次，设A与B长度不可公度。

我说，A上的正方形比B上的正方形不如同一个平方数比一个平方数。

这是因为，如果A上的正方形比B上的正方形如同一个平方数比一个平方数，则A与B可公度。

但A与B不可公度；

因此，A上的正方形比B上的正方形不如同一个平方数比一个平方数。

又，设A上的正方形比B上的正方形不如同一个平方数比一个平方数。

我说，A与B长度不可公度。

这是因为，如果A与B可公度，则A上的正方形比B上的正方形如同一个平方数比一个平方数。

但A上的正方形比B上的正方形不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与B不是长度可公度的。

这就是所要证明的。

推论　由以上证明显然可得，长度可公度的直线也总是正方可公度的，但正方可公度的直线并不总是长度可公度的。

<引理（Lemma）　在算术书中已经证明，相似面数之比如同一个平方数比一个平方数，

[VIII. 26]

而且，若两数之比如同一个平方数比一个平方数，则它们是相似面数。

[VIII. 26的逆命题]

由这些命题显然可得，不是相似面数的数，即它们的边不成比例的那些数，它们之比不如同一个平方数比一个平方数。

这是因为，如果它们有这样的比，则它们是相似面数：这与假设矛盾。

因此，不是相似面数的数之比不如同一个平方数比一个平方数。>[1]

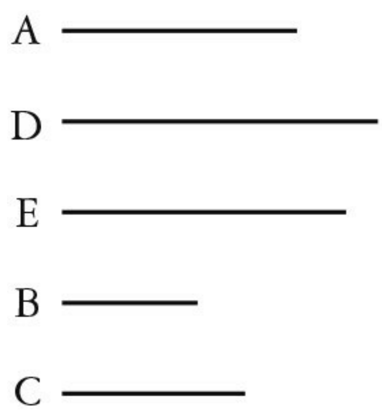
---

[1]希思评论说，该命题的一段注释“断言，其中证明的定理是泰阿泰德（Theaetetus）的发现”。然而，该引理被认为是添写；因为它提到了下一个命题X. 10，而且“存在着如此众多对X. 10的反驳，以致很难认为它是真的”。（译者注）

命题**10**

找到与一指定直线不可公度的两条直线，一条仅长度不可公度，另一条正方也不可公度。

To find two straight lines incommensurable, the one in length only, and the other in square also, with an assigned straight line.



设A是指定的直线；

于是，要求找到与A不可公度的两条直线，一条仅长度不可公度，另一条正方也不可公度。

设两数B比C不如同一个平方数比一个平方数，即它们不是相似面数；

且设法作出，B比C如同A上的正方形比D上的正方形——

因为我们知道如何做到这一点——

[X. 6，推论]

因此，A上的正方形与D上的正方形可 公度。

[X. 6]

又，由于B比C不如同一个平方数比一个平方数，

因此，A上的正方形比D上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与D长度不可公度。

[X. 9]

设E是A、D的比例中项；

因此，A比D如同A上的正方形比E上的正方形。

[V. 定义9]

但A与D长度不可公度，

因此，A上的正方形与E上的正方形也不可公度；

[X. 8]

因此，A与E正方不可公度。

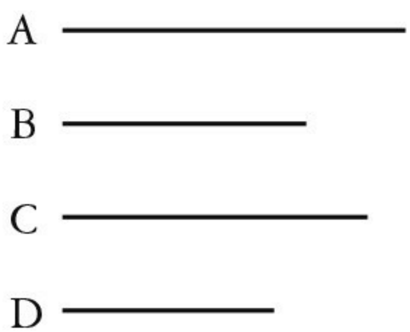
这样便找到了与指定直线A不可公度的两条直线D、E，D仅长度不可公度，E是长度不可公度且正方也不可公度。

这就是所要证明的。

命题**11**

若四个量成比例，且第一个量与第二个量可公度，则第三个量与第四个量也可公度；又，若第一个量与第二个量不可公度，则第三个量与第四个量也不可公度。

If four magnitudes be proportional, and the first be commensurable with the second, the third will also be commensurable with the fourth; and, if the first be incommensurable with the second, the third will also be incommensurable with the fourth.



设A、B、C、D是四个成比例的量，因此A比B如同C比D，

且设A与B可公度；

我说，C与D也可公度。

这是因为，由于A与B可公度，因此A比B如同一个数比一个数。

[X. 5]

又，A比B如同C比D；

因此，C比D如同一个数比一个数；

因此，C与D可公度。

[X. 6]

其次，设A与B不可公度；

我说，C与D也不可公度。

这是因为，由于A与B不可公度，

因此，A比B不如同一个数比另一个数。

[X. 7]

又，A比B如同C比D；

因此，C比D也不如同一个数比一个数，

因此，C与D不可公度。

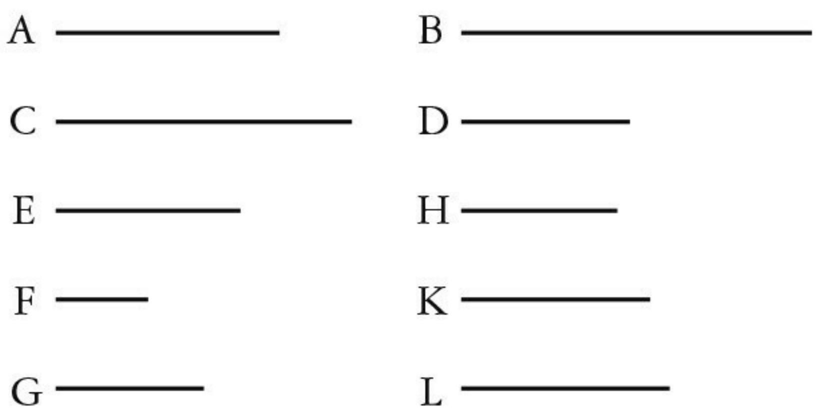
[X. 8]

这就是所要证明的。

命题**12**

与同一个量可公度的若干量，彼此也可公度。

Magnitudes commensurable with the same magnitude are commensurable with one another also.



设量A、B中的每一个与C可公度；

我说，A与B也可公度。

这是因为，由于A与C可公度，

因此，A比C如同一个数比一个数。

[X. 5]

设这个比是D比E。

又，由于C与B可公度，

因此，C比B如同一个数比一个数，

[X. 5]

设这个比是F比G。

又，给定任意多个比，即D比E和F比G，

以给定的比连续取数H、K、L；

[参见VIII. 4]

因此，D比E如同H比K，

以及F比G如同K比L。

于是，由于A比C如同D比E，

而D比E如同H比K，

因此也有，A比C如同H比K。

[V. 11]

又，由于C比B如同F比G，

而F比G如同K比L，

因此也有，C比B如同K比L。

[V. 11]

但也有，A比C如同H比K；

因此，取首末比例，

A比B如同H比L。

[V. 22]

因此，A比B如同一个数比一个数；

因此，A与B可公度。

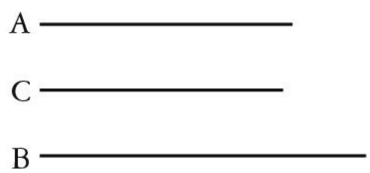
[X. 6]

这就是所要证明的。

命题**13**

若两个量可公度，且其中一个量与某个量不可公度，则另一个量与此量也不可公度。

If two magnitudes be commensurable, and the one of them be incommensurable with any magnitude, the remaining one will also be incommensurable with the same.



设A、B是两个可公度量，且其中一个量A与另一个量C不可公度；

我说，其余那个量B与C也不可公度。

这是因为，如果B与C可公度，

而A与B也可公度，则

A与C也可公度。

[X. 12]

但已设A与C不可公度：

这是不可能的。

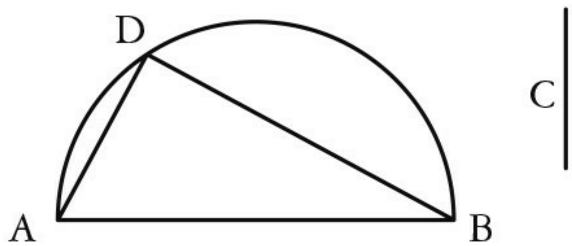
因此，B与C并非可公度；

因此，B与C不可公度。

这就是所要证明的。

引理　给定两条不等直线，求较大直线上的正方形与较小直线上的

正方形相差怎样一个正方形。



设AB、C是给定的两条不等直线，且其中AB较大；

于是，要求找到AB上的正方形比C上的正方形大怎样一个正方形。

在AB上作半圆ADB，

在半圆内作AD等于C；

[IV. 1]

连接DB。

于是显然，角ADB是直角，

[III. 31]

且AB上的正方形比AD即C上的正方形大DB上的正方形。

[I. 47]

类似地也有，如果给定两条直线，则以同样方法可求出一条直线，使该直线上的正方形等于两条给定直线上的正方形之和。

设AD、BD是两条给定直线，求一直线，使它之上的正方形等于AD、BD上的正方形之和。

用AD、DB组成一个直角；

连接AB。

显然，直线AB上的正方形等于AD、DB上的正方形之和。

[I. 47]

这就是所要证明的。

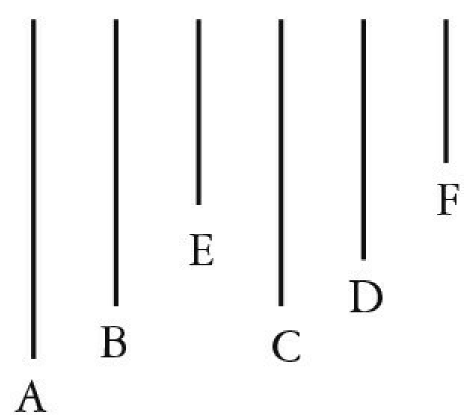
命题**14**

若四条直线成比例，第一条直线上的正方形比第二条直线上的正方形大一条直线上的正方形，且该直线与第一条直线可公度，则第三条直线上的正方形也比第四条直线上的正方形大一条直线上的正方形，该直线与第三条直线可公度。

又，若第一条直线上的正方形比第二条直线上的正方形大一条直线上的正方形，且该直线与第一条直线不可公度，则第三条直线上的正方形也比第四条直线上的正方形大一条直线上的正方形，该直线与第三条直线不可公度。

If four straight lines be proportional, and the square on the first be greater than the square on the second by the square on a straight line commensurable with the first, the square on the third will also be greater than the square on the fourth by the square on a straight line commensurable with the third.

And, if the square on the first be greater than the square on the second by the square on a straight line incommensurable with the first, the square on the third will also be greater than the square on the fourth by the square on a straight line incommensurable with the third.



设A、B、C、D是四条成比例的直线，

因此，A比B如同C比D；

且设A上的正方形比B上的正方形大E上的正方形，

又设C上的正方形比D上的正方形大F上的正方形；

我说，若A与E可公度，则C与F也可公度，

若A与E不可公度，则C与F也不可公度。

这是因为，由于A比B如同C比D，

因此也有，A上的正方形比B上的正方形如同C上的正方形比D上的正方形。

[VI. 22]

但E、B上的正方形之和等于A上的正方形，

且D、F上的正方形之和等于C上的正方形。

因此，E、B上的正方形之和比B上的正方形如同D、F上的正方形之和比D上的正方形；

因此，取分比例，E上的正方形比B上的正方形如同F上的正方形比D上的正方形；

[V. 17]

因此也有，E比B如同F比D；

[VI. 22]

因此，取反比例，B比E如同D比F。

但A比B如同C比D；

因此，取首末比例，A比E如同C比F。

[V. 22]

因此，若A与E可公度，则C与F也可公度；又，若A与E不可公度，则C与F也不可公度。

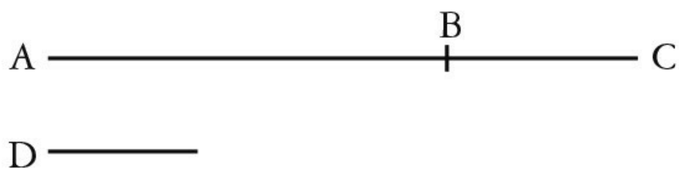
[X. 11]

这就是所要证明的。

命题**15**

若两个可公度量相加，则它们的和也与这两个量中的每一个可公度；又，若两个量之和与两个量之一可公度，则这两个量也可公度。

If two commensurable magnitudes be added together, the whole will also be commensurable with each of them; and, if the whole be commensurable with one of them, the original magnitudes will also be commensurable.



把两个可公度量AB、BC相加；

我说，整个AC也与AB、BC中的每一个可公度。

这是因为，由于AB、BC可公度，所以有某个量量尽它们。

设D量尽它们。

于是，由于D量尽AB、BC，所以D也量尽整个AC。

但D也量尽AB、BC；

因此，D量尽AB、BC、AC；

因此，AC与量AB、BC中的每一个可公度。

[X. 定义1]

其次，设AC与AB可公度；

我说，AB、BC也可公度。

这是因为，由于AC、AB可公度，所以有某个量量尽它们。

设D量尽它们。

于是，由于D量尽AC、AB，所以D也量尽余量BC。

但D也量尽AB；

因此，D也量尽AB、BC；

因此，AB、BC可公度。

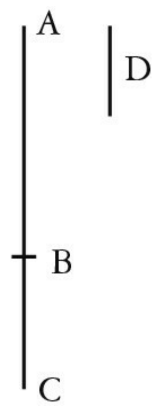
[X. 定义1]

这就是所要证明的。

命题**16**

若把两个不可公度量相加，则它们的和也与这两个量中的每一个不可公度；又，若两个量之和与两个量之一不可公度，则这两个量也不可公度。

If two incommensurable magnitudes be added together, the whole will also be incommensurable with each of them; and, if the whole be incommensurable with one of them, the original magnitudes will also be incommensurable.



把两个不可公度量AB、BC相加。

我说，整个AC也与AB、BC中的每一个不可公度。

这是因为，如果CA、AB并非不可公度，则有某个量量尽它们。

如果可能，设D量尽它们。

于是，由于D量尽CA、AB，

因此，D也量尽余量BC。

但D也量尽AB；

因此，D量尽AB、BC。

因此，AB、BC可公度。

但根据假设，AB、BC也不可公度：

这是不可能的。

因此，没有量量尽CA、AB；

因此，CA、AB不可公度。

[X. 定义1]

类似地，可以证明，AC、CB也不可公度。

因此，AC与AB、BC中的每一个不可公度。

其次，设AC与量AB、BC之一不可公度。

首先，设AC与AB不可公度；

我说，AB、BC也不可公度。

这是因为，如果它们可公度，则有某个量量尽它们。

设D量尽它们。

于是，由于D量尽AB、BC，

因此，D也量尽整个AC。

但D也量尽AB；

因此，D量尽CA、AB。

因此，CA、AB可公度；

但根据假设，它们也不可公度：

这是不可能的。

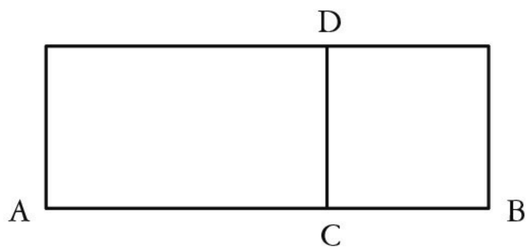
因此，没有量量尽AB、BC；

因此，AB、BC不可公度。

[X. 定义1]

这就是所要证明的。

引理　如果对某直线贴合出一个亏缺正方形的平行四边形，则这个平行四边形等于因贴合出而产生的两直线段所围成的矩形。



设对直线AB贴合出一个亏缺正方形DB的平行四边形AD；

我说，AD等于AC、CB所围成的矩形。

事实上，这是显然的；

这是因为，由于DB是正方形，所以

DC等于CB；

且AD是矩形AC、CD，即矩形AC、CB。

这就是所要证明的。

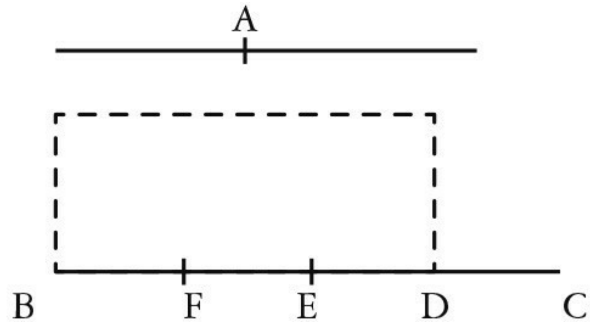
命题**17**

如果有两条不等的直线，对较大直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，若把较大直线分成长度可公度的两部分，则较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线可公度的直线上的正方形。

又，若较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线可公度的直线上的正方形，且对较大直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则较大直线被分成长度可公度的两部分。

If there be two unequal straight lines, and to the greater there be applied a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, and if it divide it into parts which are commensurable in length, then the square on the greater will be greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable with the greater.

And, if the square on the greater be grater than the square on the less by the square on a straight line commensurable with the greater, and if there be applied to the greater a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, it will divide it into parts which are commensurable in length.



设A、BC是两条不等的直线，其中BC较大，

对BC贴合出一个平行四边形等于较小的A上的正方形的四分之一，即等于A的一半上的正方形，且亏缺一个正方形。

设它就是矩形BD、DC，

[参见引理]

且设BD与DC长度可公度；

我说，BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC可公度的直线上的正方形。

这是因为，将BC二等分于点E，

取EF等于DE。

因此，余量DC等于BF。

又，由于直线BC在E被分成相等的两部分，在D被分成不相等的两部分，

因此，BD、DC所围成的矩形与ED上的正方形之和等于EC上的正方形；

[II. 5]

将它们四倍后也是正确的；

因此，四倍的矩形BD、DC与四倍的DE上的正方形之和等于四倍的EC上的正方形。

但A上的正方形等于四倍的矩形BD、CD；

且DF上的正方形等于四倍的DE上的正方形，这是因为DF是DE的二倍。

且BC上的正方形等于四倍的EC上的正方形，这同样因为BC是CE

的二倍。

因此，A、DF上的正方形之和等于BC上的正方形，

因此，BC上的正方形比A上的正方形大一个DF上的正方形。

需要证明，BC与DF也可公度。

由于BD与DC长度可公度，

因此，BC与CD也长度可公度。

[X. 15]

但CD与CD、BF之和长度可公度，这是因为CD等于BF。

[X. 6]

因此，BC与BF、CD之和长度也可公度，

[X. 12]

因此，BC与余量FD长度也可公度；

[X. 15]

因此，BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC可公度的直线上的正方形。

其次，设BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC可公度的直线上的正方形，

对直线BC贴合出一个平行四边形等于A上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形，设它是矩形BD、DC。

需要证明，BD与DC长度可公度。

同样作图，可以类似地证明，BC上的正方形比A上的正方形大一个FD上的正方形。

但BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC可公度的直线上的正方形。

因此，BC与FD长度可公度，

因此，BC与余量即BF、DC之和长度也可公度。

[X. 15]

但BF、DC之和与DC可公度，

[X. 6]

因此，BC与CD长度也可公度；

[X. 12]

因此，根据分比例，BD与DC长度可公度。

[X. 15]

这就是所要证明的。

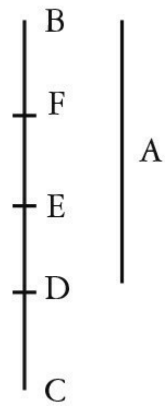
命题18

如果有两条不等的直线，对较大直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，若把较大直线分成长度不可公度的两部分，则较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线不可公度的直线上的正方形。

又，若较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线不可公度的直线上的正方形，且对较大直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则较大直线被分成不可公度的两部分。

If there be two unequal straight lines, and to the greater there be applied a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, and if it divide it into parts which are incommensurable, the square on the greater will be greater than the square on the less by the square on a straight line incommensurable with the grater.

And, if the square on the greater be greater than the square on the less by the square on a straight line incommensurable with the greater, and if there be applied to the greater a parallelogram equal to the fourth part of the square on the less and deficient by a square figure, it divides it into parts which are incommensurable.



设A、BC是两条不等的直线，其中BC较长，

对BC贴合出一个平行四边形等于较短的A上的正方形的四分之一，且亏缺一个正方形。

设它就是矩形BD、DC，

[参见X. 17之前的引理]

且设BD与DC长度不可公度；

我说，BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC不可公度的直线上的正方形。

这是因为，利用前面的作图，可以类似证明，BC上的正方形比A上的正方形大一个FD上的正方形。

需要证明，BC与DF长度不可公度。

由于BD与DC长度不可公度，

因此，BC与CD也长度不可公度。

[X. 16]

但DC与BF、DC之和可公度；

[X. 6]

因此，BC与BF、DC之和也不可公度；

[X. 13]

因此，BC与余量FD长度也不可公度。

[X. 16]

而BC上的正方形比A上的正方形大一个FD上的正方形；

因此，BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC不可公度的直线上的正方形。

又，设BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC不可公度的直线上的正方形，

且对BC贴合出一个等于A上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形。

设它就是矩形BD、DC。

需要证明，BD与DC长度不可公度。

这是因为，同样作图，可以类似地证明，BC上的正方形比A上的正方形大一个FD上的正方形。

但BC上的正方形比A上的正方形大一个与BC不可公度的直线上的正方形；

因此，BC与FD长度不可公度，

因此，BC与余量即BF、DC之和不可公度。

[X. 16]

但BF、DC之和与DC长度可公度；

[X. 6]

因此，BC与DC也长度可公度，

[X. 13]

因此，取分比例，BD与DC也长度不可公度。

[X. 16]

这就是所要证明的。

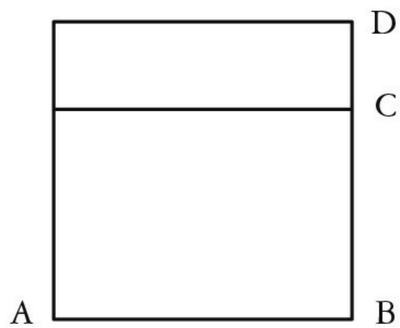
<引理　既已证明长度可公度的直线也总是正方可公度，而正方可公度的直线则并不总是长度可公度，而是必然要么长度可公度，要么长度不可公度，因此显然，如果某直线与一条给定的有理直线长度可公度，则称它为有理的，且与另一条直线不仅长度可公度而且正方可公度，因为长度可公度的直线也总是正方可公度。

但如果某直线与给定的有理直线正方可公度，那么如果它们也长度可公度，则在这种情况下也称它为有理的，而且与给定的有理直线长度可公度和正方可公度；但如果某直线与给定的有理直线正方可公度而长度不可公度，那么在这种情况下也称它为有理的，但仅正方可公度。>

命题19

由长度可公度的有理直线围成的矩形是有理的。

The rectangle contained by rational straight lines commensurable in length is rational.



设矩形AC是由长度可公度的有理直线AB、BC围成的；

我说，AC是有理的。

这是因为，在AB上作正方形AD；

因此，AD是有理的。

[X. 定义4]

又，由于AB与BC长度可公度，

而AB等于BD，

因此，BD与BC长度可公度。

又，BD比BC如同DA比AC。

[VI. 1]

因此，DA与AC可公度。

[X. 11]

但DA是有理的；

因此，AC也是有理的。

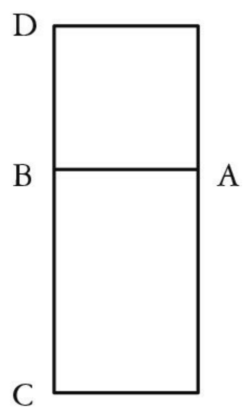
[X. 定义4]

这就是所要证明的。

命题**20**

若对一有理直线贴合出一个有理面，则它所产生的作为宽的直线是有理的，且与原直线长度可公度。

If a rational area be applied to a rational straight line, it produces as breadth a straight line rational and commensurable in length with the straight line to which it is applied.



用前述方法对有理直线AB贴合出有理面AC，产生作为宽的BC；

我说，BC是有理的，且与BA长度可公度。

这是因为，在AB上作正方形AD；

因此，AD是有理的。

[X. 定义4]

而AC也是有理的；

因此，DA与AC可公度。

又，DA比AC如同DB比BC。

[VI. 1]

因此，DB与BC也可公度；

而DB等于BA；

因此，AB与BC也可公度。

而AB是有理的；

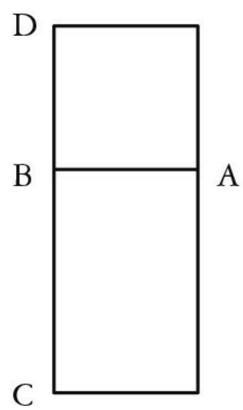
因此，BC也是有理的，且与AB长度可公度。

这就是所要证明的。

命题**21**

由仅是正方可公度的有理直线围成的矩形是无理的，且与该矩形相等的正方形的边也是无理的。称后者为中项线。

The rectangle contained by rational straight lines commensurable in square only is irrational, and the side of the square equal to it is irrational. Let the latter be called medial.



设矩形AC是由仅是正方可公度的有理直线AB、BC围成的；

我说，矩形AC是无理的，且与AC相等的正方形的边也是无理的；

且称后者为中项线。

这是因为，在AB上作正方形AD；

因此，AD是有理的。

[X. 定义4]

又，由于AB与BC长度不可公度，

这是因为，根据假设，它们仅正方可公度，

而AB等于BD，

因此，DB与BC也长度不可公度。

又，DB比BC如同AD比AC；

[VI. 1]

因此，DA与AC不可公度。

[X. 11]

但DA是有理的；

因此，AC是无理的，

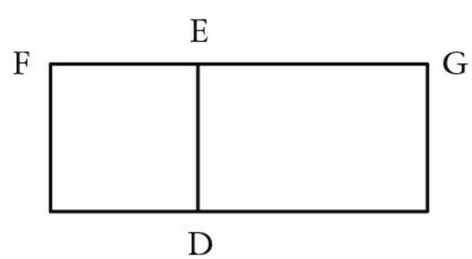
因此，与AC相等的正方形的边也是无理的。

[X. 定义4]

且称后者为中项线。

这就是所要证明的。

引理　若有两条直线，则第一直线比第二直线如同第一直线上的正方形比这两条直线所围成的矩形。



设FE、EG是两条直线。

我说，FE比EG如同FE上的正方形比矩形FE、EG。

这是因为，在FE上作正方形DF，

且作矩形GD。

于是，由于FE比EG如同FD比DG，

[VI. 1]

且FD是FE上的正方形，

且DG是矩形DE、EG，即矩形FE、EG，

因此，FE比EG如同FE上的正方形比矩形FE、EG。

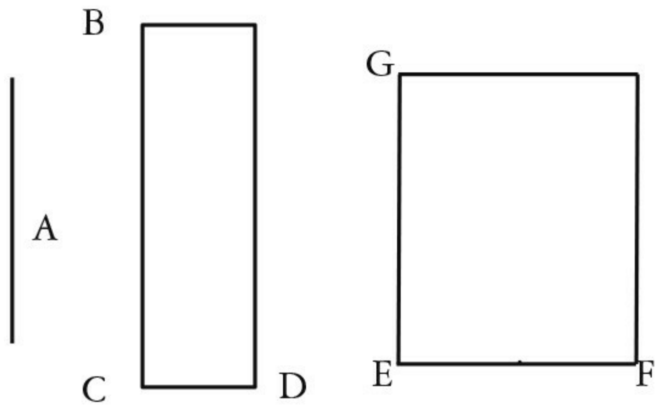
类似地也有，矩形GE、EF比EF上的正方形，即GD比FD，如同GE比EF。

这就是所要证明的。

命题**22**

若对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线上的正方形，则产生的作为宽的直线是有理的，且与原有理直线长度不可公度。

The square on a medial straight line, if applied to a rational straight line, produces as breadth a straight line rational and incommensurable in length with that to which it is applied.



设A是中项线，CB是有理直线，

且对BC贴合出一个矩形面BD等于A上的正方形，产生作为宽的CD；

我说，CD是有理的，且与CB长度不可公度。

这是因为，由于A是中项线，所以A上的正方形等于仅正方可公度的有理直线所围成的矩形。

[X. 21]

设A上的正方形等于GF。

但A上的正方形也等于BD；

因此，BD等于GF。

但BD与GF也是等角的，

而在相等且等角的平行四边形中，夹等角的边成互反比例；

[VI. 14]

因此有比例，BC比EG如同EF比CD。

因此也有，BC上的正方形比EG上的正方形如同EF上的正方形比CD上的正方形。

[VI. 22]

但CB上的正方形与EG上的正方形可公度，这是因为直线CB、EG中的每一个都是有理的；

因此，EF上的正方形与CD上的正方形也可公度。

[X. 11]

但EF上的正方形是有理的；

因此，CD上的正方形也是有理的；

[X. 定义4]

因此，CD是有理的。

又，由于EF与EG长度不可公度，

这是因为它们仅正方可公度，

又，EF比EG如同EF上的正方形比矩形FE、EG，

[引理]

因此，EF上的正方形与矩形FE、EG不可公度。

[X. 11]

但CD上的正方形与EF上的正方形可公度，这是因为这些直线在正

方形上是有理的；

且矩形DC、CB与矩形FE、EG可公度，这是因为它们都等于A上的正方形；

因此，CD上的正方形与矩形DC、CB也不可公度。

[X. 13]

但CD上的正方形比矩形DC、CB如同DC比CB；

[引理]

因此，DC与CB长度不可公度。

[X. 11]

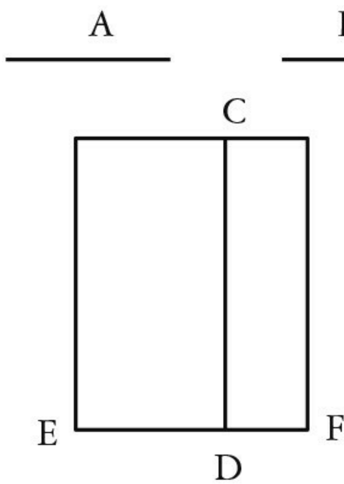
因此，CD是有理的，且与CB长度不可公度。

这就是所要证明的。

命题**23**

与中项线可公度的直线也是中项线。

A straight line commensurable with a medial straight line is medial.



设A是中项线，且设B与A可公度；

我说，B也是中项线。

这是因为，设CD是一条有理直线，

对CD贴合出一个矩形面CE等于A上的正方形，产生作为宽的ED；

因此，ED是有理的，且与CD长度不可公度。

[X. 22]

又，对CD贴合出一个矩形面CF等于B上的正方形，产生作为宽的DF。

于是，由于A与B可公度，所以

A上的正方形与B上的正方形也可公度。

但EC等于A上的正方形，

且CF等于B上的正方形；

因此，EC与CF可公度。

又，EC比CF如同ED比DF；

[VI. 1]

因此，ED与DF长度可公度。

[X. 11]

但ED是有理的，且与DC长度不可公度；

因此，DF也是有理的，

[X. 定义3]

且与DC长度不可公度。

[X. 13]

因此，CD、DF是有理的，且仅正方可公度。

但若一直线上的正方形等于由仅正方可公度的有理直线围成的矩形，则此直线是中项线；

[X. 21]

因此，与矩形CD、DF相等的正方形的边是中项线。

而B是与矩形CD、DF相等的正方形的边；

因此，B是中项线。

这就是所要证明的。

推论 由此显然可得，与中项面可公度的面是中项面。

又，用在有理情况下所解释的方法[X. 18后的引理]可以推出，关于

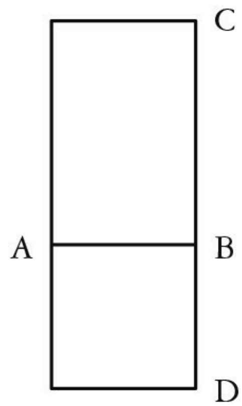
中项线，与一中项线长度可公度的直线被称为中项线，且与之不仅长度可公度而且也正方可公度，这是因为，一般而言，长度可公度的直线也总是正方可公度。

但如果某直线与一中项线正方可公度，那么如果它们也长度可公度，则称这些直线为长度可公度且正方可公度的中项线，但如果仅正方可公度，则称它们为仅正方可公度的中项线。

命题**24**

由长度可公度的中项线围成的矩形是中项面。

The rectangle contained by medial straight lines commensurable in length is medial.



设矩形AC是由长度可公度的中项线AB、BC围成的矩形；

我说，AC是中项面。

这是因为，在AB上作正方形AD；

因此，AD是中项面。

又，由于AB与BC长度可公度，

而AB等于BD，

因此，DB与BC也长度可公度，

因此，DA与AC也可公度。

[VI. 1，X. 11]

但DA是中项面，

因此，AC也是中项面。

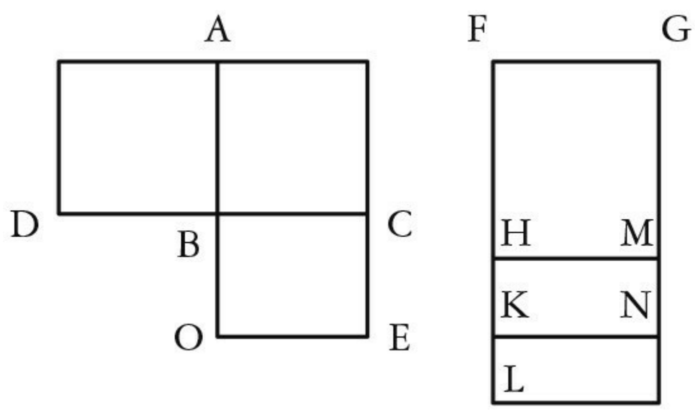
[X. 23，推论]

这就是所要证明的。

命题**25**

由仅正方可公度的中项线围成的矩形要么是有理面，要么是中项面。

The rectangle contained by medial straight lines commensurable in square only is either rational or medial.



设矩形AC是由仅正方可公度的中项线AB、BC围成的矩形；

我说，AC要么是有理面，要么是中项面。

这是因为，在AB、BC上作正方形AD、BE；

因此，正方形AD、BE中的每一个都是中项面。

给定一条有理直线FG，

对FG贴合出矩形GH等于AD，产生作为宽的FH，

对HM贴合出矩形MK等于AC，产生出作为宽的HK；

再对KN贴合出矩形NL等于BE，产生出作为宽的KL；

因此，FH、HK、KL在同一直线上。

于是，由于正方形AD、BE中的每一个都是中项面，

且AD等于GH，

且BE等于NL，

因此，矩形GH、NL中的每一个都是中项面。

又，它们都是对有理直线FG贴合出的；

因此，直线FH、KL中的每一个都是有理的，且与FG长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AD与BE可公度，

因此，GH与NL也可公度。

又，GH比NL如同FH比KL；

[VI. 1]

因此，FH与KL长度可公度。

[X. 11]

因此，FH、KL是长度可公度的有理直线；

因此，矩形FH、KL是有理的。

[X. 19]

又，由于DB等于BA，且OB等于BC，

因此，DB比BC如同AB比BO。

但DB比BC如同DA比AC，

[VI. 1]

且AB比BO如同AC比CO；

[VI. 1]

因此，DA比AC如同AC比CO。

但AD等于GH，AC等于MK，以及CO等于NL；

因此，GH比MK如同MK比NL；

因此也有，FH比HK如同HK比KL；

[VI. 1，V. 11]

因此，矩形FH、KL等于HK上的正方形。

[VI. 17]

但矩形FH、KL是有理的；

因此，HK上的正方形也是有理的。

因此，HK是有理的。

又，如果HK与FG长度可公度，

则HN是有理的；

[X. 19]

但如果HK与FG长度不可公度，

则KH、HM是仅正方可公度的有理直线，

因此，HN是中项面。

[X. 21]

因此，HN要么是有理面，要么是中项面。

但HN等于AC；

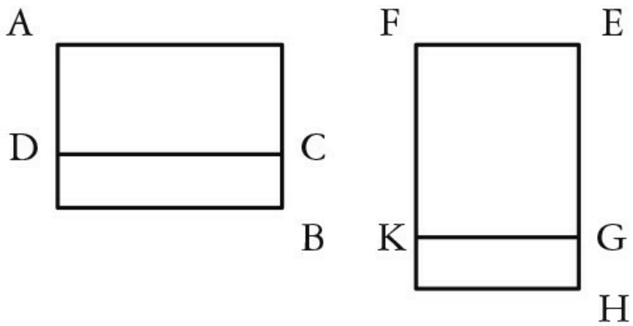
因此，AC是有理面，要么是中项面。

这就是所要证明的。

命题**26**

中项面不会比中项面超出一个有理面。

A medial area does not exceed a medial area by a rational area.



这是因为，如果可能，设中项面AB比中项面AC超出一个有理面DB，

且设对有理直线EF贴合出一个矩形FH等于AB，产生作为宽的EH，

且减去等于AC的矩形FG；

因此，余量BD等于余量KH。

但DB是有理的；

因此，KH也是有理的。

于是，由于矩形AB、AC中的每一个都是中项面，

且AB等于FH，AC等于FG，

因此，矩形FH、FG中的每一个也都是中项面。

又，它们都是对有理直线EF贴合出的；

因此，直线HE、EG中的每一条都是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于[DB是有理的且等于KH，因此]KH[也]是有理的；

且它是对有理直线EF贴合出的；

因此，GH是有理的，且与EF长度可公度。

[X. 20]

但EG也是有理的，且它与EF长度不可公度，

因此，EG与GH长度不可公度。

[X. 13]

又，EG比GH如同EG上的正方形比矩形EG、GH；

因此，EG上的正方形与矩形EG、GH不可公度。

[X. 11]

但EG、GH上的正方形之和与EG上的正方形可公度，这是因为两者都是有理的；

又，二倍的矩形EG、GH与矩形EG、GH可公度，这是因为它是它的二倍；

[X. 6]

因此，EG、GH上的正方形与二倍的矩形EG、GH不可公度；

[X. 13]

因此，EG、GH上的正方形之和加二倍的矩形EG、GH，即EH上的正方形[II. 4]，与EG、GH上的正方形不可公度。

[X. 16]

但EG、GH上的正方形是有理的；

因此，EH上的正方形是无理的。

[X. 定义4]

因此，EH是无理的。

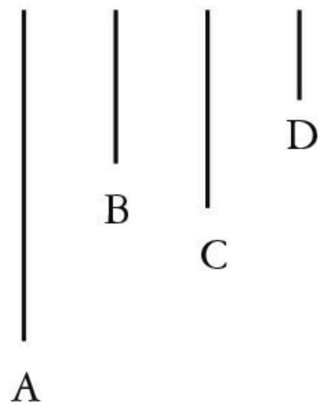
但EH也是有理的：这是不可能的。

这就是所要证明的。

命题**27**

求围成一个有理矩形的仅正方可公度的中项线。

To find medial straight lines commensurable in square only which contain a rational rectangle.



给定仅正方可公度的两有理直线A、B；

取C为A、B的比例中项，

[VI. 13]

且作A比B如同C比D。

[VI. 12]

于是，由于A、B是仅正方可公度的有理直线，所以

矩形A、B，即C上的正方形[VI. 17]，是中项面。

[X. 21]

因此，C是中项线。

[X. 21]

又，由于A比B如同C比D，

且A、B仅正方可公度，

因此，C、D也仅正方可公度。

[X. 11]

而C是中项线；

因此，D也是中项线。

[X. 23，附注]

因此，C、D是仅正方可公度的中项线。

我说，它们也围成一个有理矩形。

这是因为，由于A比B如同C比D，

因此，取更比例，A比C如同B比D。

[V. 16]

但A比C如同C比B；

因此也有，C比B如同B比D；

因此，矩形C、D等于B上的正方形。

但B上的正方形是有理的；

因此，矩形C、D也是有理的。

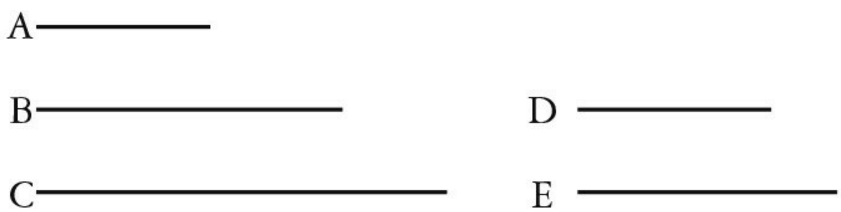
这样便求出了围成一个有理矩形的仅正方可公度的中项线。

这就是所要证明的。

命题**28**

求围成一个中项矩形的仅正方可公度的中项线。

To find medial straight lines commensurable in square only, which contain a medial rectangle.



给定仅正方可公度的有理直线A、B、C；

取D为A、B的比例中项，

[VI. 13]

且作B比C如同D比E。

[VI. 12]

由于A、B是仅正方可公度的有理直线，

因此，矩形A、B，即D上的正方形[VI. 17]，是中项面。

[X. 21]

因此，D是中项线。

又，由于B、C仅正方可公度，

且B比C如同D比E，

因此，D、E也仅正方可公度。

[X. 11]

但D是中项线；

因此，E也是中项线。

[X. 23，附注]

因此，D、E是仅正方可公度的中项线。

其次我说，它们也围成一个中项矩形。

这是因为，由于B比C如同D比E，

因此，取更比例，B比D如同C比E。

[V. 16]

但B比D如同D比A；

因此也有，D比A如同C比E；

因此，矩形A、C等于矩形D、E。

[V. 16]

但矩形A、C是中项面；

[X. 21]

因此，矩形D、E也是中项面。

这样便求出了围成矩形为中项面的仅正方可公度的中项线。

这就是所要证明的。

引理**1** 求两平方数，使其和也是平方数。



给定两数AB、BC，设它们要么都是偶数，要么都是奇数。

于是，由于无论是偶数减偶数还是奇数减奇数，余数都是偶数，

[IX. 24，26]

因此，余数AC是偶数。

设AC被二等分于D。

再设AB、BC要么都是相似面数，要么都是本身也是相似面数的平方数。

现在，AB、BC的乘积加CD的平方等于BD的平方。

[II. 6]

且AB、BC的乘积是平方数，因为已经证明，两相似面数的乘积是平方数。

[IX. 1]

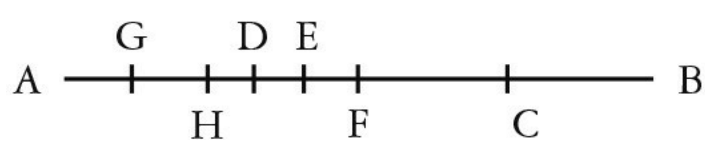
这样便求出了两个平方数，即AB、BC的乘积和CD的平方，它们相加得到BD的平方。

显然，又求出了两个平方数，即BD的平方和CD的平方，它们之差即AB、BC的乘积是一个平方数，只要AB、BC是相似面数。

但是当AB、BC不是相似面数时，已经求出的两个平方数，即BD的平方和DC的平方，它们之差即AB、BC的乘积不是平方数。

这就是所要证明的。

引理**2** 求两平方数，使其和不是平方数。



设AB、BC的乘积如前所述是平方数，

且CA是偶数，

又设CA被D二等分。

于是显然，AB、BC的乘积加CD的平方等于BD的平方。

[见引理1]

减去单元DE；

因此，AB、BC的乘积加CE的平方小于BD的平方。

于是我说，AB、BC的乘积加CE的平方不是平方数。

这是因为，如果它是平方数，则它要么等于BE的平方，要么小于BE的平方，但不可能大于BE的平方，除非单元被再分。

首先，如果可能，设AB、BC的乘积加CE的平方等于BE的平方，

又设GA是单元DE的二倍。

于是，由于整个AC是整个CD的二倍，

且其中AG是DE的二倍，

因此，余数GC也是余数EC的二倍；

因此，GC被E二等分。

因此，GB、BC的乘积加CE的平方等于BE的平方。

[II. 6]

但根据假设，AB、BC的乘积加CE的平方也等于BE的平方；

因此，GB、BC的乘积加CE的平方等于AB、BC的乘积加CE的平方。

又，如果减去共同的CE的平方，

则得到AB等于GB：

这是荒谬的。

因此，AB、BC的乘积加CE的平方不等于BE的平方。

其次我说，它也不小于BE的平方。

这是因为，如果可能，设它等于BF的平方，

又设HA是DF的二倍。

现在又会得到，HC是CF的二倍；

因此，CH也被F二等分，

因此，HB、BC的乘积加FC的平方等于BF的平方。

[II. 6]

但根据假设，AB、BC的乘积加CE的平方也等于BF的平方。

于是，HB、BC的乘积加CF的平方也等于AB、BC的乘积加CE的平方；

这是荒谬的。

因此，AB、BC的乘积加CE的平方不小于BE的平方。

而已经证明，它也不等于BE的平方。

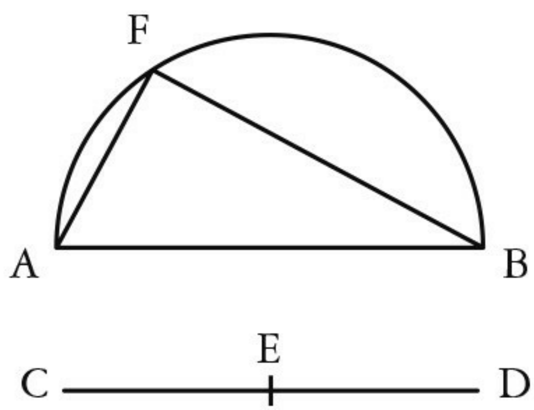
因此，AB、BC的乘积加CE的平方不是平方数。

这就是所要证明的。

命题**29**

求仅正方可公度的两条有理直线，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线长度可公度的直线上的正方形。

To find two rational straight lines commensurable in square only and such that the square on the greater is greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable in length with the greater.



给定某条有理直线AB以及两个平方数CD、DE，使它们之差CE不是平方数；

[引理1]

在AB上作半圆AFB，

且作DC比CE如同BA上的正方形比AF上的正方形。

[X. 6，推论]

连接FB。

由于BA上的正方形比AF上的正方形如同DC比CE，

因此，BA上的正方形比AF上的正方形如同数DC比数CE；

因此，BA上的正方形与AF上的正方形可公度。

[X. 6]

但AB上的正方形是有理的；

[X. 定义4]

因此，AF上的正方形也是有理的；

[X. 定义4]

因此，AF也是有理的。

又，由于DC比CE不如同一个平方数比一个平方数，

因此，BA上的正方形比AF上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，AB与AF长度不可公度。

[X. 9]

因此，BA、AF是仅正方可公度的有理直线。

又，由于DC比CE如同BA上的正方形比AF上的正方形，

因此，取换比例，

CD比DE如同AB上的正方形比BF上的正方形。

[V. 19，推论，III. 31，I. 47]

但CD比DE如同一个平方数比一个平方数：

因此也有，AB上的正方形比BF上的正方形如同一个平方数比一个平方数；

因此，AB与BF长度可公度。

[X. 9]

而AB上的正方形等于AF、FB上的正方形之和；

因此，AB上的正方形比AF上的正方形大一个与AB可公度的直线BF上的正方形。

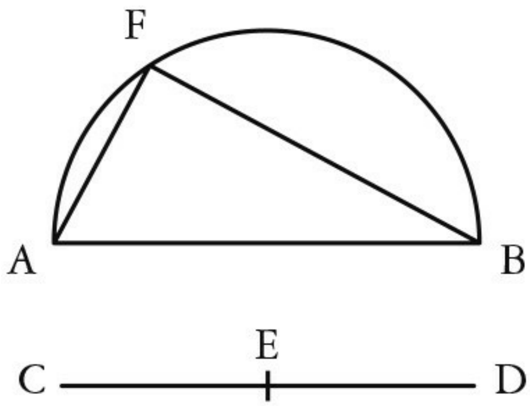
这样便求出了仅正方可公度的两条有理直线BA、AF，使较大直线AB上的正方形比较小直线AF上的正方形大一个与AB长度可公度的BF上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**30**

求仅正方可公度的两条有理直线，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线长度不可公度的直线上的正方形。

To find two rational straight lines commensurable in square only and such that the square on the greater is greater than the square on the less by the square on a straight line incommensurable in length with the greater.



给定某条有理直线AB以及两个平方数CD、ED，使它们之和CD不是平方数；

[引理2]

在AB上作半圆AFB，

且作DC比CE如同BA上的正方形比AF上的正方形。

[X. 6，推论]

连接FB。

于是，以与之前类似的方法可以证明，BA、AF是仅正方可公度的有理直线。

又，由于DC比CE如同BA上的正方形比AF上的正方形，

因此，取换比例，

CD比DE如同AB上的正方形比BF上的正方形。

[V. 19，推论，III. 31，I. 47]

但CD比DE不如同一个平方数比一个平方数；

因此，AB上的正方形比BF上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，AB与BF长度不可公度。

[X. 9]

而AB上的正方形比AF上的正方形大一个与AB不可公度的FB上的正方形。

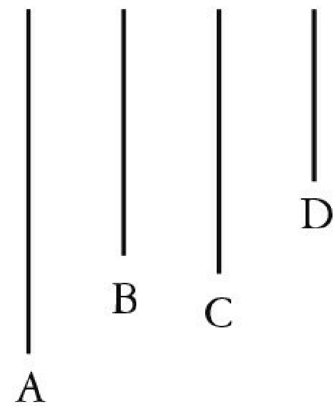
因此，AB、AF是仅正方可公度的有理直线，且AB上的正方形比AF上的正方形大一个与AB不可公度的FB上的正方形。

这就是所要证明的。

命题**31**

求围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线长度可公度的直线上的正方形。

To find two medial straight lines commensurable in square only, containing a rational rectangle, and such that the square on the greater is greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable in length with the greater.



给定仅正方可公度的两条有理直线A、B，使较大直线A上的正方形比较小直线B上的正方形大一个与A长度可公度的直线上的正方形。

[X. 29]

且设C上的正方形等于矩形A、B。

现在，矩形A、B是中项面；

[X. 21]

因此，C上的正方形也是中项面；

因此，C也是中项线。

[X. 21]

设矩形C、D等于B上的正方形。

现在，B上的正方形是有理的；

因此，矩形C、D也是有理的。

又，由于A比B如同矩形A、B比B上的正方形，

而C上的正方形等于矩形A、B，

且矩形C、D等于B上的正方形，

因此，A比B如同C上的正方形比矩形C、D。

但C上的正方形比矩形C、D如同C比D；

因此也有，A比B如同C比D。

但A与B仅正方可公度；

因此，C与D也仅正方可公度。

[X. 11]

而C是中项线；

因此，D也是中项线。

[X. 23，附注]

又，由于A比B如同C比D，

且A上的正方形比B上的正方形大一个与A可公度的直线上的正方形。

因此也有，C上的正方形比D上的正方形大一个与C可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

这样便求出了围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线C、D，使C上的正方形比D上的正方形大一个与C长度可公度的直线上的正方形。

类似地，还可以证明，当A上的正方形比B上的正方形大一个与A不可公度的直线上的正方形时，C上的正方形比D上的正方形大一个与C也不可公度的直线上的正方形。

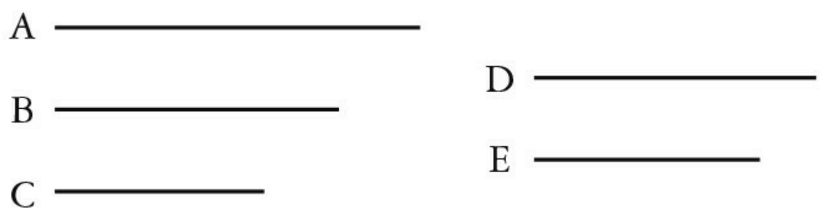
[X. 30]

这就是所要证明的。

命题**32**

求围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线可公度的直线上的正方形。

To find two medial straight lines commensurable in square only, containing a medial rectangle, and such that the square on the greater is greater than the square on the less by the square on a straight line commensurable with the greater.



给定仅正方可公度的三条有理直线A、B、C，使A上的正方形比C上的正方形大一个与A可公度的直线上的正方形，

[X. 29]

且设D上的正方形等于矩形A、B。

因此，D上的正方形是中项面；

因此，D也是中项线。

[X. 21]

设矩形D、E等于矩形B、C。

于是，由于矩形A、B比矩形B、C如同A比C；

而D上的正方形等于矩形A、B，

且矩形D、E等于矩形B、C，

因此，A比C如同D上的正方形比矩形D、E。

但D上的正方形比矩形D、E如同D比E；

因此也有，A比C如同D比E。

但A与C仅正方可公度；

因此，D与E也仅正方可公度。

[X. 11]

而D是中项线；

因此，E也是中项线。

[X. 23，附注]

又，由于A比C如同D比E，

而A上的正方形比C上的正方形大一个与A可公度的直线上的正方形，

因此也有，D上的正方形比E上的正方形大一个与D可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

其次我说，矩形D、E也是中项面。

这是因为，由于矩形B、C等于矩形D、E，而矩形B、C是中项面，

[X. 21]

因此，矩形D、E也是中项面。

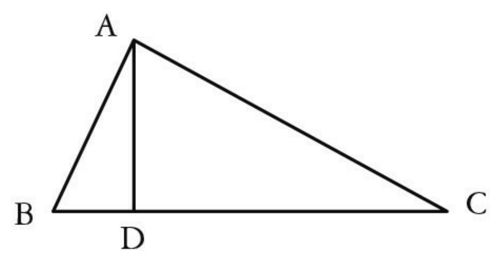
这样便求出了围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线D、E，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线可公度的直线上的正方形。

类似地，还可以证明，当A上的正方形比C上的正方形大一个与A不可公度的直线上的正方形时，D上的正方形比E上的正方形大一个与D也不可公度的直线上的正方形。

[X. 30]

这就是所要证明的。

引理 设ABC是一个直角三角形，A是直角，且从A作垂线AD；



我说，矩形CB、BD等于BA上的正方形，

矩形BC、CD等于CA上的正方形，

矩形BD、DC等于AD上的正方形，

以及矩形BC、AD等于矩形BA、AC。

首先，矩形CB、BD等于BA上的正方形。

这是因为，由于在直角三角形中，AD是从直角顶点向底所作的垂线，

因此，三角形ABD、ADC都相似于整个三角形ABC并且彼此相似。

[VI. 8]

又，由于三角形ABC相似于三角形ABD，

因此，CB比BA如同BA比BD；

[VI. 4]

因此，矩形CB、BD等于AB上的正方形。

[VI. 17]

同理，矩形BC、CD也等于AC上的正方形。

又，由于如果在一个直角三角形中从直角顶点向底作一垂线，则该直线是底上两段的比例中项，

[VI. 8，推论]

因此，BD比DA如同AD比DC；

因此，矩形BD、DC等于AD上的正方形。

[VI. 17]

我说，矩形BC、AD也等于矩形BA、AC。

这是因为，如我们所说，因三角形ABC相似于ABD，

因此，BC比CA如同BA比AD。

[VI. 4]

因此，矩形BC、AD等于矩形BA、AC。

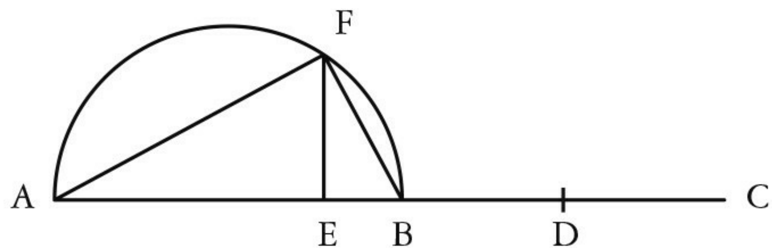
[VI. 16]

这就是所要证明的。

命题**33**

求正方不可公度的两直线，使其上的正方形之和是有理的，但它们围成的矩形是中项面。

To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them rational but the rectangle contained by them medial.



给定仅正方可公度的两有理直线AB、BC，使较长直线AB上的正方形比较短直线BC上的正方形大一个与AB不可公度的直线上的正方形，

[X. 30]

设BC被二等分于D，

对AB贴合出一个平行四边形，它等于BD、DC之一，且亏缺一个正方形，

设它是矩形AE、EB；

[VI. 28]

在AB上作半圆AFB，

作EF与AB成直角，

连结AF、FB。

于是，由于AB、BC是不等的直线，

且AB上的正方形比BC上的正方形大一个与AB不可公度的直线上的

正方形，

而已经对AB贴合出一个等于BC上的正方形的四分之一，即AB一半上的正方形，且亏缺一个正方形的平行四边形，即矩形AE、EB，

因此，AE与EB不可公度。

[X. 18]

又，AE比EB如同矩形BA、AE比矩形AB、BE，

而矩形BA、AE等于AF上的正方形，

且矩形AB、BE等于BF上的正方形；

因此，AF上的正方形与FB上的正方形不可公度；

因此，AF、FB正方不可公度。

又，由于AB是有理的，

因此，AB上的正方形也是有理的；

因此，AF、FB上的正方形之和也是有理的。

[I. 47]

又，由于矩形AE、EB等于EF上的正方形，

且根据假设，矩形AE、EB也等于BD上的正方形，

因此，FE等于BD；

因此，BC是FE的二倍，

因此，矩形AB、BC与矩形AB、EF也可公度。

但矩形AB、BC是中项面；

[X. 21]

因此，矩形AB、EF也是中项面。

[X. 23，推论]

但矩形AB、EF等于矩形AF、FB；

因此，矩形AF、FB也是中项面。

但已证明，这些直线上的正方形之和是有理的。

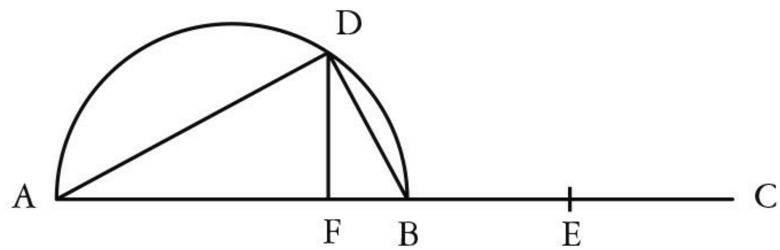
这样便求出了正方形不可公度的两直线AF、FB，使其上的正方形之和是有理的，但它们围成的矩形是中项面。

这就是所要证明的。

命题**34**

求正方不可公度的两直线，使其上的正方形之和是中项面，但它们围成的矩形是有理面。

To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial but the rectangle contained by them rational.



给定仅正方可公度的两中项线AB、BC，使它们围成的矩形是有理的，且AB上的正方形比BC上的正方形大一个与AB不可公度的直线上的正方形；

[X. 31，最后]

在AB上作半圆ADB，

设BC在E被二等分，

对AB贴合出一个等于BE上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，即矩形AF、FB；

[VI. 28]

因此，AF与FB长度不可公度。

[X. 18]

从F作FD与AB成直角，

连结AD、DB。

由于AF与FB长度不可公度，

因此，矩形BA、AF与矩形AB、BF也不可公度。

[X. 11]

但矩形AB、AF等于AD上的正方形，且矩形AB、BF等于DB上的正方形；

因此，AD上的正方形与DB上的正方形也不可公度。

又，由于AB上的正方形是中项面，

因此，AD、DB上的正方形之和也是中项面。

[III. 31，I. 47]

又，由于BC是DF的二倍，

因此，矩形AB、BC也是矩形AB、FD的二倍。

但矩形AB、BC是有理的；

因此，矩形AB、FD也是有理的。

[X. 6]

但矩形AB、FD等于矩形AD、DB；

[X. 32 引理]

因此，矩形AD、DB也是有理的。

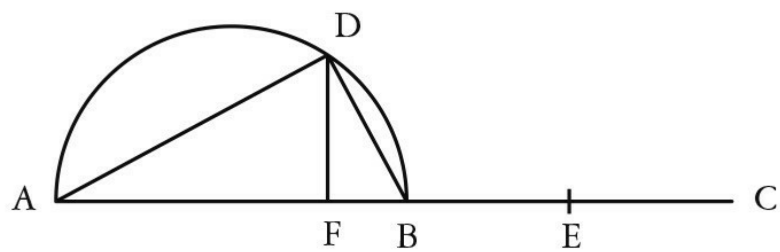
这样便求出了正方不可公度的两直线AD、DB，使其上的正方形之和是中项面，但它们围成的矩形是有理面。

这就是所要证明的。

命题**35**

求正方不可公度的两直线，使其上的正方形之和是中项面，它们围成的矩形是中项面，且该矩形与两正方形之和不可公度。

To find two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial and the rectangle contained by them medial and moreover incommensurable with the sum of the squares on them.



给定仅正方可公度的围成一个中项矩形的两中项线AB、BC，使AB上的正方形比BC上的正方形大一个与AB不可公度的直线上的正方形；

[X. 32，最后]

在AB上作半圆ADB，

且如前作出图的其余部分。

于是，由于AF与FB长度不可公度，

[X. 18]

因此，AD与DB正方不可公度。

[X. 11]

又，由于AB上的正方形是中项面，

因此，AD、DB上的正方形之和也是中项面。

[III. 31，I. 47]

又，由于矩形AF、FB等于直线BE、DF中的每一个上的正方形，

因此，BE等于DF；

因此，BC是FD的二倍，

因此，矩形AB、BC也是矩形AB、FD的二倍。

但矩形AB、BC是中项面；

因此，矩形AB、FD也是中项面。

[X. 23，推论]

又，它等于矩形AD、DB；

[X. 32后的引理]

因此，矩形AD、DB也是中项面。

又，由于AB与BC长度不可公度，

而CB与BE可公度，

因此，AB与BE也长度不可公度，

[X. 13]

因此，AB上的正方形与矩形AB、BE也不可公度。

[X. 11]

但AD、DB上的正方形之和等于AB上的正方形，

[I. 47]

而矩形AB、FD，即矩形AD、DB，等于矩形AB、BE；

因此，AD、DB上的正方形之和与矩形AD、DB不可公度。

这样便求出了正方不可公度的两直线AD、DB，使其上的正方形之和是中项面，它们围成的矩形是中项面，且该矩形与两正方形之和不可

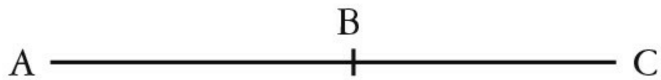
公度。

这就是所要证明的。

命题**36**

仅正方可公度的两有理直线之和是无理的；且称之为<u>二项线</u>。

If two rational straight lines commensurable in square only be added together, the whole is irrational; and let it be called <u>binomial</u>.



将仅正方可公度的两有理直线AB、BC相加；

我说，整个AC是无理的。

这是因为，由于AB与BC长度不可公度——

这是因为它们仅正方可公度——

且AB比BC如同矩形AB、BC比BC上的正方形，

因此，矩形AB、BC与BC上的正方形不可公度。

[X. 11]

但二倍的矩形AB、BC与矩形AB、BC可公度，

[X. 6]

且AB、BC上的正方形之和与BC上的正方形可公度——

这是因为，AB、BC是仅正方可公度的两有理直线。

[X. 15]

因此，二倍的矩形AB、BC与AB、BC上的正方形之和不可公度。

[X. 13]

又，取合比例，二倍的矩形AB、BC与AB、BC上的正方形相加，

即AC上的正方形[II. 4]，与AB、BC上的正方形之和不可公度。

[X. 16]

但AB、BC上的正方形之和是有理的；

因此，AC上的正方形是无理的，

因此，AC也是无理的。

[X. 定义4]

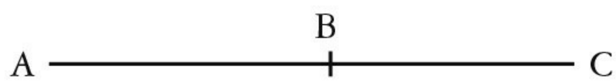
且称之为二项线。

这就是所要证明的。

命题**37**

围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线之和是无理的；且称之为<u>第一双中项线</u>。

If two medial straight lines commensurable in square only and containing a rational rectangle be added together, the whole is irrational; and let it be called a <u>first bimedial</u> straight line.



将围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线AB、BC相加；

我说，整个AC是无理的。

这是因为，由于AB与BC长度不可公度，

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC也不可公度；

[参见X. 36]

又，取合比例，AB、BC上的正方形与二倍的矩形AB、BC之和，即AC上的正方形[II. 4]，与矩形AB、BC不可公度。

[X. 16]

但矩形AB、BC是有理的，这是因为根据假设，AB、BC是围成一个有理矩形的直线，

因此，AC上的正方形是无理的；

因此，AC是无理的。

[X. 定义4]

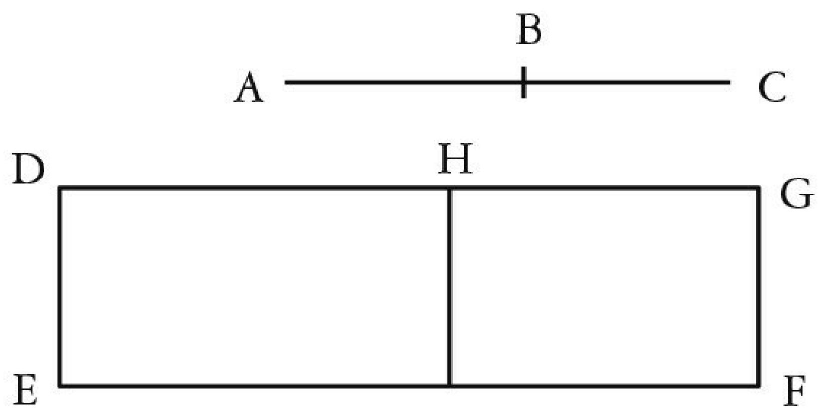
且称之为第一双中项线。

这就是所要证明的。

命题**38**

围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线之和是无理的；且称之为<u>第二双中项线</u>。

If two medial straight lines commensurable in square only and containing a medial rectangle be added together, the whole is irrational; and let it be called a <u>second bimedial</u> straight line.



将围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线AB、BC相加；

我说，整个AC是无理的。

这是因为，给定一条有理直线DE，对DE贴合出一个等于AC上的正方形的平行四边形DF，产生作为宽的DG。

[I. 44]

于是，由于AC上的正方形等于AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC之和，

[II. 4]

设对DE贴合出EH等于AB、BC上的正方形之和；

因此，余量HF等于二倍的矩形AB、BC。

又，由于直线AB、BC中的每一条都是中项线，

因此，AB、BC上的正方形之和也是中项面。

但根据假设，二倍的矩形AB、BC也是中项面。

且EH等于AB、BC上的正方形之和，

而FH等于二倍的矩形AB、BC；

因此，矩形EH、HF中的每一个都是中项面。

又，它们都是对有理直线DE贴合出的；

因此，直线DH、HG中的每一条都是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

于是，由于AB与BC长度不可公度，

且AB比BC如同AB上的正方形比矩形AB、BC，

因此，AB上的正方形与矩形AB、BC不可公度。

[X. 11]

但AB、BC上的正方形之和与AB上的正方形可公度，

[X. 15]

且二倍的矩形AB、BC与矩形AB、BC可公度。

[X. 6]

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度。

[X. 13]

但EH等于AB、BC上的正方形之和，

且HF等于二倍的矩形AB、BC。

因此，EH与HF不可公度，

因此，DH与HG也长度不可公度。

[VI. 1，X. 11]

因此，DH、HG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是无理的。

[X. 36]

但DE是有理的；

而由一条无理直线和一条有理直线围成的矩形是无理面；

[参见X. 20]

因此，面DF是无理的，

且与DF相等的正方形的边是无理的，

[X. 定义4]

但AC是等于DF的正方形的边；

因此，AC是无理的。

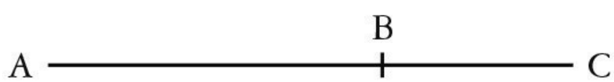
且称之为第二双中项线。

这就是所要证明的。

命题**39**

若正方不可公度的两直线上的正方形之和是有理的，但它们围成的矩形是中项面，则它们相加所得到的整条直线是无理的；且称之为<u>主线</u>。

If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them rational, but the rectangle contained by them medial, be added together, the whole straight line is irrational; and let it be called <u>major</u>.



设AB、BC是正方不可公度的直线，且满足给定的条件[X. 33]，将两直线相加；

我说，AC是无理的。

这是因为，由于矩形AB、BC是中项面，所以

二倍的矩形AB、BC也是中项面。

[X. 6和23，推论]

但AB、BC上的正方形之和是有理的；

因此，二倍的矩形AB、BC与AB、AC上的正方形之和不可公度，

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC相加，即AC上的正方形，与AB、BC上的正方形之和也不可公度；

[X. 16]

因此，AC上的正方形是无理的，

因此，AC也是无理的。

[X. 定义4]

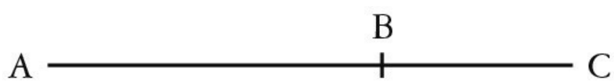
且称之为主线。

这就是所要证明的。

命题**40**

若正方不可公度的两直线上的正方形之和是中项面，但它们围成的矩形是有理的，则它们相加所得到的整条直线是无理的；且称之为<u>有理中项面的边</u>。

If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial, but the rectangle contained by them rational, be added together, the whole straight line is irrational; and let it be called the <u>side of a rational plus a medial area</u>.



设AB、BC是正方不可公度的直线，且满足给定的条件[X. 34]，将两直线相加。

我说，AC是无理的。

这是因为，由于AB、BC上的正方形之和是中项面，而二倍的矩形AB、BC是有理的，

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度；

因此，AC上的正方形与二倍的矩形AB、BC也不可公度。

[X. 16]

但二倍的矩形AB、AC是有理的；

因此，AC上的正方形是无理的。

因此，AC是无理的。

[X. 定义4]

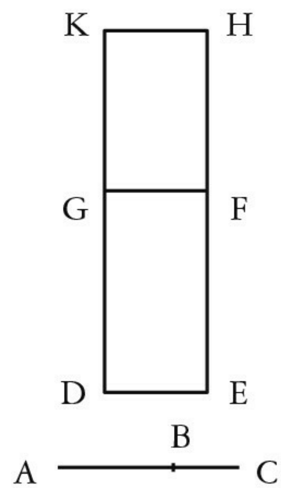
且称之为有理中项面的边。

这就是所要证明的。

命题**41**

若正方不可公度的两直线上的正方形之和是中项面，它们围成的矩形也是中项面，且与两直线上的正方形之和不可公度，则这两直线之和是无理的；且称之为<u>两中项面之和的边</u>。

If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial, and the rectangle contained by them medial and also incommensurable with the sum of the squares on them, be added together, the whole straight line is irrational; and let it be called the <u>side of the sum of two medial areas</u>.



设AB、BC是正方不可公度的直线，且满足给定的条件[X. 35]，将两直线相加；

我说，AC是无理的。

给定一有理直线DE，对DE贴合出矩形DF等于AB、BC上的正方形之和，再设矩形GH等于二倍的矩形AB、BC；

因此，整个DH等于AC上的正方形。

[II. 4]

现在，由于AB、BC上的正方形之和是中项面，

且等于DF，

因此，DF也是中项面。

又，它是对有理直线DE贴合出的；

因此，DG是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

同理，GK也是有理的，且与GF即DE长度不可公度。

又，由于AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度，所以

DF与GH不可公度；

因此，DG与GK也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

且它们是有理的；

因此，DG、GK是仅正方可公度的两有理直线。

因此，DK是无理的且被称为二项线。

[X. 36]

但DE是有理的；

因此，DH是无理的，且与它相等的正方形的边是无理的。

[X. 定义4]

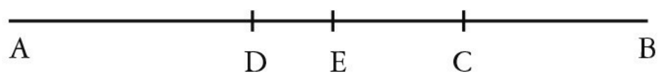
但AC是等于HD的正方形的边；

因此，AC是无理的。

且称之为两中项面之和的边。

这就是所要证明的。

引理　　前述无理直线只以一种方式被分成产生相关类型的两条直线，我们现在将在假定了如下引理之后进行证明。



给定直线AB，在点C、D中的每一点将整个AB分成不等的两部分，

且设AC大于DB；

我说，AC、CB上的正方形之和大于AD、DB上的正方形之和。

这是因为，设AB被二等分于E。

于是，由于AC大于DB，

从它们中分别减去DC；

因此，余量AD大于余量CB。

但AE等于EB；

因此，DE小于EC；

因此，点C、D与平分点并不等距。

又，由于矩形AC、CB与EC上的正方形之和等于EB上的正方形，

[II. 5]

且矩形AD、DB与DE上的正方形之和等于EB上的正方形，

[II. 5]

因此，矩形AC、CB与EC上的正方形之和等于矩形AD、DB与DE上的正方形之和。

且其中DE上的正方形小于EC上的正方形；

因此，余量，即矩形AC、CB，也小于矩形AD、DB，

因此，二倍的矩形AC、CB小于二倍的矩形AD、DB。

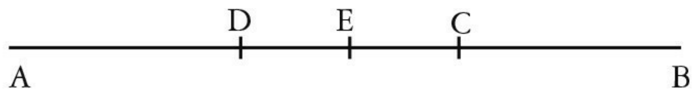
因此也有，余量，即AC、CB上的正方形之和，大于AD、DB上的正方形之和。

这就是所要证明的。

命题**42**

一条二项线仅在一点被分成它的两段。

A binomial straight line is divided into its terms at one point only.



设AB是一条二项线，在C点被分成它的两段；

因此，AC、CB是仅正方可公度的两有理直线。

我说，AB在另一点不被分成仅正方可公度的两有理直线。

这是因为，如果可能，设它也在D点被分成它的两段，因此AD、DB也是仅正方可公度的两有理直线。

于是显然，AC与DB不同。

这是因为，如果可能，设AC与DB相同。

于是，AD也与CB相同，

且AC比CB如同BD比DA；

于是，D分AB的方式与C分AB的方式相同：

这与假设相反。

因此，AC与DB不同。

因此也有，点C、D与平分点并不等距。

因此，AC、CB上的正方形之和与AD、DB上的正方形之和的差也是二倍的矩形AD、DB与二倍的矩形AC、CB的差，

这是因为，AC、CB上的正方形之和加二倍的矩形AC、CB，与AD、DB上的正方形之和加二倍的矩形AD、DB，都等于AB上的正方

形。

[II. 4]

但AC、CB上的正方形之和与AD、DB上的正方形之和的差是一个有理面，这是因为两者都是有理的；

因此，二倍的矩形AD、DB与二倍的矩形AC、CB之差也是一个有理面，尽管它们是中项面：

[X. 21]

这是荒谬的，因为中项面不会比中项面超出一个有理面。

[X. 26]

因此，一条二项线不在不同点被分成它的两段；

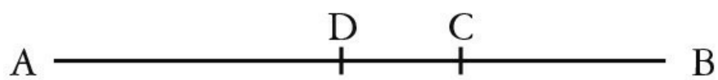
因此，它仅在一点被分成它的两段。

这就是所要证明的。

命题**43**

一条第一双中项线仅在一点被分成它的两段。

A first bimedial straight line is divided at one point only.



设AB是在C被分成两段的一条第一双中项线，使AC、CB是围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线；

[X. 37]

我说，AB在另一点分不成这样两段。

这是因为，如果可能，设AB在D也被分成两段，使AD、DB也是围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线。

于是，由于二倍的矩形AD、DB与二倍的矩形AC、CB之差等于AC、CB上的正方形之和与AD、DB上的正方形之和的差，

而二倍的矩形AD、DB与二倍的矩形AC、CB之差是一个有理面——因为两者都是有理的——

因此，AC、BC上的正方形之和与AD、DB上的正方形之和的差也是一个有理面，尽管它们是中项面：

这是荒谬的。

[X. 26]

因此，一条第一双中项线不在不同点被分成它的两段；

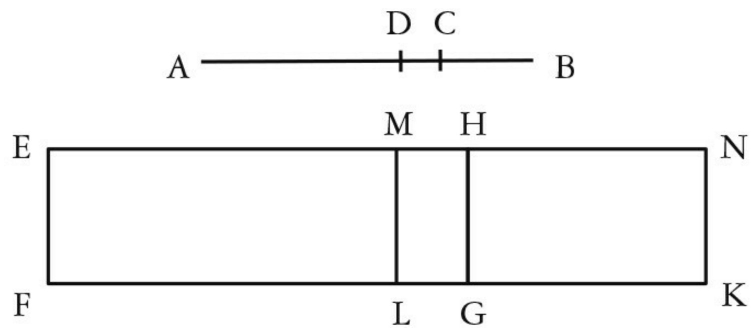
因此，它仅在一点被分成它的两段。

这就是所要证明的。

命题**44**

一条第二双中项线仅在一点被分成它的两段。

A second bimedial straight line is divided at one point only.



设AB是在C被分成两段的一条第二双中项线，使AC、CB是围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线；

[X. 38]

于是，C显然不在二等分点，因为两段并非长度可公度。

我说，AB在另一点分不成这样两段。

这是因为，如果可能，设AB在D也被分成两段，使AC与DB不同，但假设AC较大；

于是很清楚，如前面已经证明的[引理]，AD、DB上的正方形之和小于AC、CB上的正方形之和；

且假设AD、DB是围成一个中项矩形的仅正方可公度的两中项线。

现在，给定一条有理直线EF，

对EF贴合出矩形EK使之等于AB上的正方形，

且减去等于AC、CB上的正方形之和的EG；

因此，余量HK等于二倍的矩形AC、CB。

[II. 4]

又，减去等于AD、DB上的正方形之和的EL，已经证明它小于AC、CB上的正方形之和；

[引理]

因此，余量MK也等于二倍的矩形AD、DB。

现在，由于AC、CB上的正方形之和是中项面，

因此，EG是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的；

因此，EH是有理直线且与EF长度不可公度。

[X. 22]

同理，

HN也是有理直线且与EF长度不可公度。

又，由于AC、CB是仅正方可公度的中项线，

因此，AC与CB长度不可公度。

但AC比CB如同AC上的正方形比矩形AC、CB；

因此，AC上的正方形与矩形AC、CB不可公度。

[X. 11]

但AC、CB上的正方形之和与AC上的正方形可公度；这是因为AC、CB正方可公度。

[X. 15]

而二倍的矩形AC、CB与矩形AC、CB可公度。

[X. 6]

因此，AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB也不可公度。

[X. 13]

但EG等于AC、CB上的正方形之和；

而HK等于二倍的矩形AC、CB；

因此，EG与HK不可公度，

因此，EH与HN也长度不可公度。

[VI. 1，X. 11]

而它们是有理的，

因此，EH、HN是仅正方可公度的有理直线。

但仅正方可公度的两有理直线之和是被称为二项线的无理直线。

[X. 36]

因此，EN是在H被分成两段的二项线。

用同样的方法可以证明，EM、MN也是仅正方可公度的两有理直线；

且EN是在不同的点H和M被分成两段的二项线。

又，EH与MN不同。

这是因为，AC、CB上的正方形之和大于AD、DB上的正方形之和。

但AD、DB上的正方形之和大于二倍的矩形AD、DB；

因此也有，AC、CB上的正方形之和，即EG，更大于二倍的矩形AD、DB，即MK，

于是，EH也大于MN。

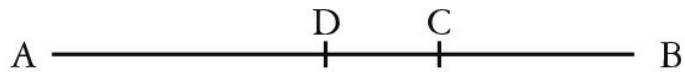
因此，EH与MN不同。

这就是所要证明的。

命题**45**

一条主线仅在一点被分成它的两段。

A major straight line is divided at one and the same point only.



设AB是在C被分成两段的一条主线，使AC、CB正方不可公度，且AC、CB上的正方形之和是有理面，但矩形AC、CB是中项面；

我说，AB在另一点分不成这样两段。

这是因为，如果可能，设AB在D也被分成两段，使AD、DB也正方不可公度，且AD、DB上的正方形之和是有理面，但它们围成的矩形是中项面。

于是，由于AC、CB上的正方形之和与AD、DB上的正方形之和的差也等于二倍的矩形AD、DB与二倍的矩形AC、CB之差，

而AC、CB上的正方形之和比AD、DB上的正方形之和超出一个有理面——这是因为二者都是有理的——

因此，二倍的矩形AD、DB也比二倍的矩形AC、CB超出一个有理面，尽管它们是中项面：

这是不可能的。

[X. 26]

因此，一条主线不在不同点被分成它的两段；

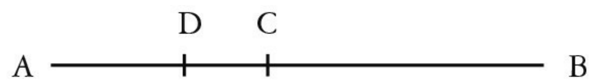
因此，它仅在一点被分成它的两段。

这就是所要证明的。

命题**46**

一个有理中项面的边仅在一点被分成它的两段。

The side of a rational plus a medial area is divided at one point only.



设AB是在C被分成两段的一个有理中项面的边，使AC、CB正方不可公度，且AC、CB上的正方形之和是中项面，但二倍的矩形AC、CB是有理的；

[X. 40]

我说，AB在另一点分不成这样两段。

这是因为，如果可能，设AB在D也被分成两段，使AD、DB也正方不可公度，且AD、DB上的正方形之和是中项面，但二倍的矩形AD、DB是有理的。

于是，由于二倍的矩形AC、CB与二倍的矩形AD、DB之差也等于AD、DB上的正方形之和与AC、CB上的正方形之和的差，

而二倍的矩形AC、CB比二倍的矩形AD、DB超出一个有理面，

因此，AD、DB上的正方形之和也比AC、CB上的正方形之和超出一个有理面，尽管它们是中项面：

这是不可能的。

[X. 26]

因此，一个有理中项面的边不在不同点被分成它的两段；

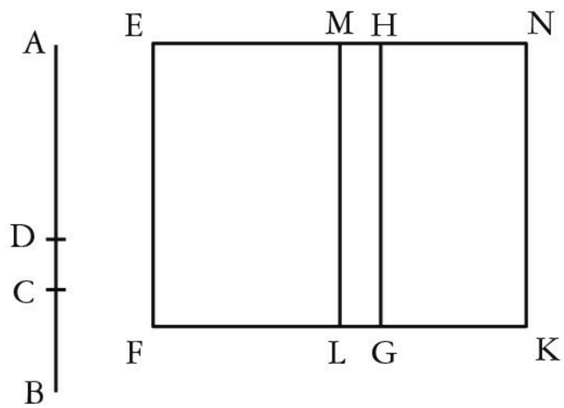
因此，它仅在一点被分成它的两段。

这就是所要证明的。

命题**47**

两中项面之和的边仅在一点被分成它的两段。

The side of the sum of two medial areas is divided at one point only.



设AB在C被分成两段，使AC、CB正方不可公度，AC、CB上的正方形之和是中项面，矩形AC、CB是中项面，且与AC、CB上的正方形之和也不可公度；

我说，AB在另一点分不成满足给定条件的这样两段。

这是因为，如果可能，设AB在D也被分成两段，使AC不同于BD，但设AC较大；

给定一条有理直线EF，

对EF贴合出矩形EG等于AC、CB上的正方形之和，

且作矩形HK等于二倍的矩形AC、CB；

因此，整个EK等于AB上的正方形。

[II. 4]

再对EF贴合出EL等于AD、DB上的正方形之和；

因此，余量，即二倍的矩形AD、DB，等于余量MK。

又，根据假设，由于AC、CB上的正方形之和是中项面，

因此，EG也是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的；

因此，HE是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

HN也是有理的，且与EF长度不可公度。

又，由于AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB不可公度，

因此，EG与GN也不可公度，

因此，EH与HN也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

而它们是有理的；

因此，EH、HN是仅正方可公度的有理直线，

因此，EN是在H被分成两段的二项线。

[X. 36]

类似地，可以证明，EN也在M被分成两段。

而EH不同于MN；

因此，一条二项线在不同的点被分成两段：

这是荒谬的。

[X. 42]

因此，两中项面之和的边不在不同点被分成它的两段；

因此，它仅在一点被分成它的两段。

这就是所要证明的。

定义 Ⅱ **Definitions**

01 / 给定一条有理直线和一条二项线，并把二项线被分成它的两段，使较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线长度可公度的直线上的正方形，于是，若较大直线与给定的有理直线长度可公度，则把原二项线称为第一二项线；

Given a rational straight line and a binomial, divided into its terms, such that the square on the greater term is greater than the square on the lesser by the square on a straight line commensurable in length with the greater, then, if the greater term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a *first binomial* straight line;

02 / 但若较小直线与给定的有理直线长度可公度，则称原二项线为第二二项线；

but if the lesser term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a *second binomial*;

03 / 若较大直线和较小直线与给定的有理直线都长度不可公度，则称原二项线为第三二项线；

and if neither of the terms be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a *third binomial*.

04 / 又，如果较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大

直线长度不可公度的直线上的正方形，那么，若较大直线与给定的有理直线长度可公度，则称原二项线为第四二项线；

Again, if the square on the greater term be greater than the square on the lesser by the square on a straight line incommensurable in length with the greater, then, if the greater term be commensurable in length with the rational straight line set out, let the whole be called a *fourth binomial*;

05 / 若较小直线与给定的有理直线长度可公度，则称原二项线为第五二项线；

if the lesser, a *fifth binomial*;

06 / 若较大直线和较小直线与给定的有理直线都长度不可公度，则称原二项线为第六二项线。

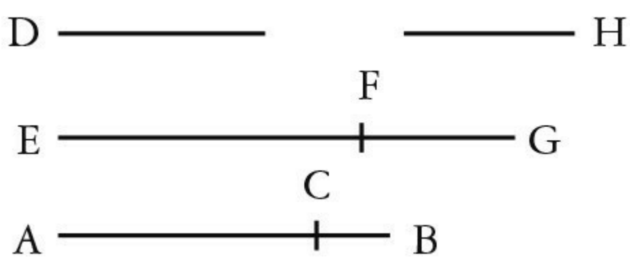
and if neither, a *sixth binomial*.

命题 **Proposition**

命题**48**

求第一二项线。

To find the first binomial straight line.



给定两数AC、CB，使它们之和AB比BC如同一个平方数比一个平方数，但AB比AC不如同一个平方数比一个平方数；

[X. 28后的引理1]

给定某有理直线D，且设EF与D长度可公度。

因此，EF也是有理的。

设法使数BA比AC如同EF上的正方形比FG上的正方形。

[X. 6，推论]

但AB比AC如同一个数比一个数；

因此，EF上的正方形比FG上的正方形也如同一个数比一个数，

因此，EF上的正方形与FG上的正方形可公度。

[X. 6]

而EF是有理的；

因此，FG也是有理的。

又，由于BA比AC不如同一个平方数比一个平方数，

因此，EF上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，EF与FG长度不可公度。

[X. 9]

因此，EF、FG是仅正方可公度的有理直线；

因此，EG是二项线。

[X. 36]

我说，EG也是第一二项线。

这是因为，由于数BA比AC如同EF上的正方形比FG上的正方形，

而BA大于AC，

因此，EF上的正方形也大于FG上的正方形。

于是，设FG、H上的正方形之和等于EF上的正方形。

现在，由于BA比AC如同EF上的正方形比FG上的正方形，

因此，取换比例，

AB比BC如同EF上的正方形比H上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC如同一个平方数比一个平方数；

因此，EF上的正方形比H上的正方形也如同一个平方数比一个平方数。

因此，EF与H长度可公度；

[X. 9]

因此，EF上的正方形比FG上的正方形大一个与EF可公度的直线上的正方形。

而EF、FG都是有理的，且EF与D长度可公度。

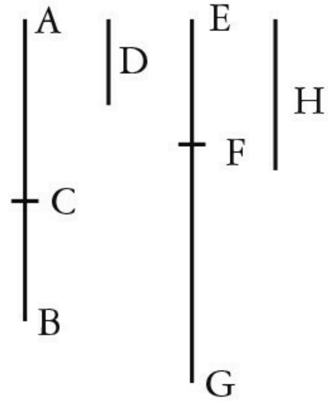
因此，EG是第一二项线。

这就是所要证明的。

命题**49**

求第二二项线。

To find the second binomial straight line.



给定两数AC、CB，使它们之和AB比BC如同一个平方数比一个平方数，但AB比AC不如同一个平方数比一个平方数；

给定一条有理直线D，且设EF与D长度可公度；

因此，EF是有理的。

设法使数CA比AB如同EF上的正方形比FG上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，EF上的正方形与FG上的正方形可公度。

[X. 6]

因此，FG也是有理的。

现在，由于数CA比AB不如同一个平方数比一个平方数，所以EF上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数。

因此，EF与FG长度不可公度；

[X. 9]

因此，EF、FG是仅正方可公度的有理直线；

因此，EG是二项线。

[X. 36]

其次要证明，它也是第二二项线。

这是因为，取反比例，数BA比AC如同GF上的正方形比FE上的正方形，

而BA大于AC，

因此，GF上的正方形大于FE上的正方形。

设EF、H上的正方形之和等于GF上的正方形；

因此，取换比例，AB比BC如同FG上的正方形比H上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG上的正方形比H上的正方形如同一个平方数比一个平方数。

因此，FG与H长度可公度；

[X. 9]

于是，FG上的正方形比FE上的正方形大一个与FG可公度的直线上的正方形。

而FG、FE是仅正方可公度的有理直线，且较小直线EF与给定的有理直线D长度可公度。

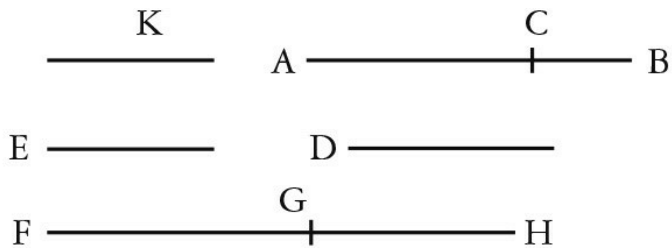
因此，EG是第二二项线。

这就是所要证明的。

命题**50**

求第三二项线。

To find the third binomial straight line.



给定两数AC、CB，使它们之和AB比BC如同一个平方数比一个平方数，但AB比AC不如同一个平方数比一个平方数。

又给定另一非平方数D，且设D比数BA、AC中的每一个都不如同一个平方数比一个平方数。

给定某一有理直线E，

设法使D比AB如同E上的正方形比FG上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，E上的正方形与FG上的正方形可公度。

[X. 6]

而E是有理的；

因此，FG也是有理的。

又，由于D比AB不如同一个平方数比一个平方数，所以

E上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，E与FG长度不可公度。

[X. 9]

其次，设法使数BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，FG上的正方形与GH上的正方形可公度。

[X. 6]

但FG是有理的；

因此，GH也是有理的。

又，由于BA比AC不如同一个平方数比一个平方数，所以

FG上的正方形比HG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与GH长度不可公度。

[X. 9]

因此，FG、GH是仅正方可公度的有理直线；

因此，FH是二项线。

[X. 36]

其次我说，它也是第三二项线。

这是因为，由于D比AB如同E上的正方形比FG上的正方形，

而BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，取首末比例，

D比AC如同E上的正方形比GH上的正方形。

[V. 22]

但D比AC不如同一个平方数比一个平方数；

因此，E上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，E与GH长度不可公度。

[X. 9]

又，由于BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，FG上的正方形大于GH上的正方形。

于是，设GH、K上的正方形之和等于FG上的正方形；

因此，取换比例，

AB比BC如同FG上的正方形比K上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG上的正方形比K上的正方形也如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与K长度可公度。

[X. 9]

因此，FG上的正方形比GH上的正方形大一个与FG可公度的直线上的正方形。

又，FG、GH是仅正方可公度的有理直线，且它们中的每一个都不与E长度可公度。

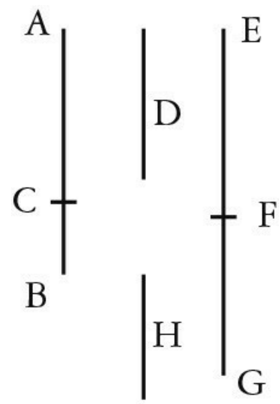
因此，FH是第三二项线。

这就是所要证明的。

命题**51**

求第四二项线。

To find the fourth binomial straight line.



给定两数AC、CB，使它们之和AB比BC和AB比AC都不如同一个平方数比一个平方数。

给定一条有理直线D，

且设EF与D长度可公度；

因此，EF也是有理的。

设法使数BA比AC如同EF上的正方形比FG上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，EF上的正方形与FG上的正方形可公度；

[X. 6]

因此，FG也是有理的。

现在，由于BA比AC不如同一个平方数比一个平方数，所以EF上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，EF与FG长度不可公度。

[X. 9]

因此，EF、FG是仅正方可公度的有理直线；

因此，EG是二项线。

其次我说，EG也是第四二项线。

这是因为，由于BA比AC如同EF上的正方形比FG上的正方形，

因此，EF上的正方形大于FG上的正方形。

于是，设FG、H上的正方形之和等于EF上的正方形；

因此，取换比例，

数AB比BC如同EF上的正方形比H上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC不如同一个平方数比一个平方数，

因此，EF上的正方形比H上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数。

因此，EF与H长度不可公度；

[X. 9]

因此，EF上的正方形比GF上的正方形大一个与EF不可公度的直线上的正方形。

而EF、FG是仅正方可公度的有理直线，且EF与D长度可公度。

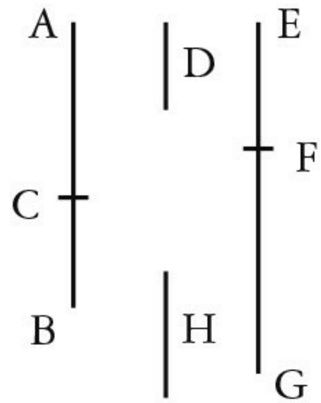
因此，EG是第四二项线。

这就是所要证明的。

命题**52**

求第五二项线。

To find the fifth binomial straight line.



给定两数AC、CB，使AB比AC和AB比CB都不如同一个平方数比一个平方数；

给定某一有理直线D，

且设EF与D可公度；

因此，EF是有理的。

设法使CA比AB如同EF上的正方形比FG上的正方形；

[X. 6，推论]

但CA比AB不如同一个平方数比一个平方数；

因此，EF上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数。

因此，EF、FG是仅正方可公度的有理直线；

[X. 9]

因此，EG是二项线。

[X. 36]

其次我说，EG也是第五二项线。

这是因为，由于CA比AB如同EF上的正方形比FG上的正方形，

取反比例，BA比AC如同FG上的正方形比FE上的正方形；

因此，GF上的正方形大于FE上的正方形。

于是，设EF、H上的正方形之和等于GF上的正方形；

因此，取换比例，

数AB比BC如同GF上的正方形比H上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG上的正方形比H上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数。

因此，FG与H长度不可公度；

[X. 9]

因此，FG上的正方形比FE上的正方形大一个与FG不可公度的直线上的正方形。

而GF、FE是仅正方可公度的有理直线，且较小直线EF与给定的有理直线D长度可公度。

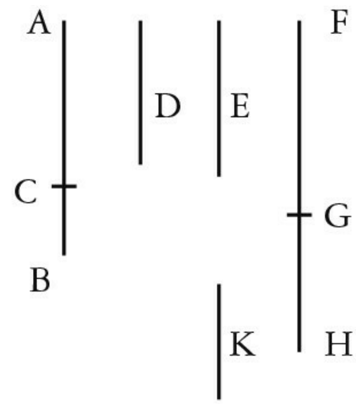
因此，EG是第五二项线。

这就是所要证明的。

命题**53**

求第六二项线。

To find the sixth binomial straight line.



给定两数AC、CB，使AB比AC和AB比CB都不如同一个平方数比一个平方数；

又给定另一非平方数D，且D比数BA、AC中的每一个都不如同一个平方数比一个平方数；

给定某一有理直线E，

设法使D比AB如同E上的正方形比FG上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，E上的正方形与FG上的正方形可公度。

[X. 6]

而E是有理的；

因此，FG也是有理的。

现在，由于D比AB不如同一个平方数比一个平方数，所以

E上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，E与FG长度不可公度。

[X. 9]

又，设法使BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形。

[X. 6，推论]

因此，FG上的正方形与HG上的正方形可公度。

[X. 6]

因此，HG上的正方形是有理的；

因此，HG是有理的。

又，由于BA比AC不如同一个平方数比一个平方数，所以

FG上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与GH长度不可公度。

[X. 9]

因此，FG、GH是仅正方可公度的有理直线；

因此，FH是二项线。

[X. 36]

其次要证明，FH也是第六二项线。

这是因为，由于D比AB如同E上的正方形比FG上的正方形，

且BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，取首末比例，

D比AC如同E上的正方形比GH上的正方形。

[V. 22]

但D比AC不如同一个平方数比一个平方数，

因此，E上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数，

因此，E与GH长度不可公度。

[X. 9]

但已证明，E与FG不可公度；

因此，直线FG、GH中的每一个与E长度不可公度。

又，由于BA比AC如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，FG上的正方形大于GH上的正方形。

于是，设GH、K上的正方形之和等于FG上的正方形；

因此，取换比例，

AB比BC如同FG上的正方形比K上的正方形。

[V. 19，推论]

但AB比BC不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG上的正方形比K上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数。

因此，FG与K长度不可公度；

[X. 9]

因此，FG上的正方形比GH上的正方形大于一个与FG不可公度的直线上的正方形。

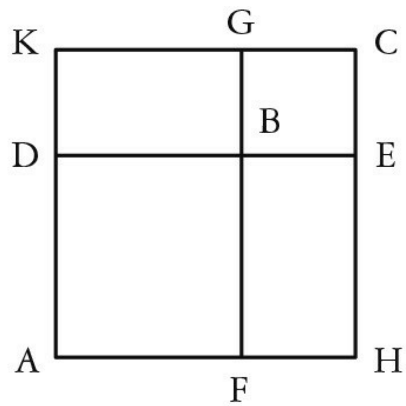
而FG、GH是仅正方可公度的有理直线，且它们中的每一个与给定

的有理直线E都长度不可公度。

因此，FH是第六二项线。

这就是所要证明的。

引理 设有两个正方形AB、BC，使DB与BE在同一直线上；



因此，FB与BG也在同一直线上。

将平行四边形AC补充完整；

我说，AC是正方形，DG是AB、BC的比例中项，且DC是AC、CB的比例中项。

这是因为，由于DB等于BF，且BE等于BG，

因此，整个DE等于整个FG。

但DE等于直线AH、KC中的每一个，

且FG等于直线AK、HC中的每一个；

[I. 34]

因此，直线AH、KC中的每一个也等于直线AK、HC中的每一个。

因此，平行四边形AC是等边的。

而它也是直角的；

因此，AC是正方形。

又，由于FB比BG如同DB比BE，

而FB比BG如同AB比DG，

且DB比BE如同DG比BC，

[VI. 1]

因此也有，AB比DG如同DG比BC。

[V. 11]

因此，DG是AB、BC的比例中项。

其次我说，DC也是AC、CB的比例中项。

这是因为，由于AD比DK如同KG比GC——

这是因为它们分别相等——

且取合比例，

AK比KD如同KC比CG，

[V. 18]

而AK比KD如同AC比CD，

且KC比CG如同DC比CB，

[VI. 1]

因此也有，AC比DC如同DC比BC。

[V. 11]

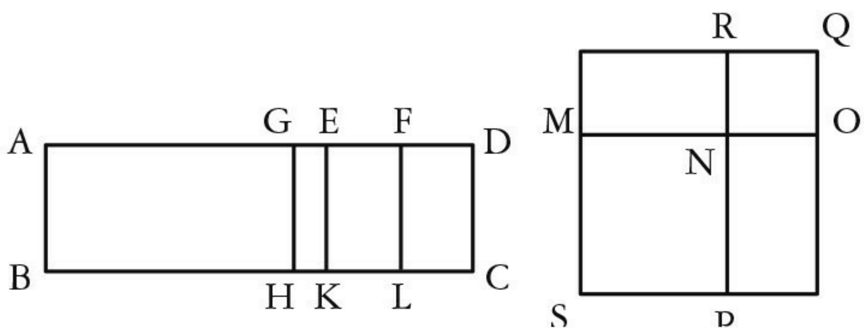
因此，DC是AC、CB的比例中项。

这就是所要证明的。

命题**54**

若一有理直线与第一二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**[1]是被称为二项线的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the first binomial, the “side” of the area is the irrational straight line which is called binomial.



设有理直线AB与第一二项线AD围成一个面AC；

我说，面AC的“边”是被称为二项线的无理直线。

这是因为，由于AD是第一二项线，设它在点E被分成它的两段，且设AE较大。

于是显然，AE、ED是仅正方可公度的有理直线，

AE上的正方形比ED上的正方形大一个与AE可公度的直线上的正方形，

且AE与给定的有理直线AB长度可公度。

[X. 定义II. 1]

设ED在点F被二等分。

于是，由于AE上的正方形比ED上的正方形大一个与AE可公度的直

线上的正方形，

因此，如果对较长直线AE贴合出一个平行四边形等于较短直线ED上的正方形的四分之一，即等于EF上的正方形，且亏缺一个正方形，则AE被分成可公度的两部分。

[X. 17]

于是，对AE贴合出矩形AG、GE等于EF上的正方形；

因此，AG与EG长度可公度。

从G、E、F分别作GH、EK、FL平行于直线AB、CD之一；

作正方形SN等于平行四边形AH，以及正方形NQ等于GK，

[II. 14]

并且使MN与NO在同一直线上；

因此，RN与NP也在同一直线上。

将平行四边形SQ补充完整；

因此，SQ是正方形。

[引理]

现在，由于矩形AG、GE等于EF上的正方形，

因此，AG比EF如同FE比EG；

[VI. 17]

因此也有，AH比EL如同EL比KG；

[VI. 1]

因此，EL是AH、GK的比例中项。

但AH等于SN，且GK等于NQ；

因此，EL是SN、NQ的比例中项。

但MR也是SN、NQ的比例中项；

[引理]

因此，EL等于MR，

因此，EL也等于PO。

但AH、GK也等于SN、NQ；

因此，整个AC等于整个SQ，即等于MO上的正方形；

因此，MO是AC的“边”。

其次我说，MO是二项线。

这是因为，由于AG与GE可公度，

因此，AE与直线AG、GE中的每一个也可公度。

[X. 15]

但根据假设，AE与AB也可公度；

因此，AG、GE与AB也可公度。

[X. 12]

而AB是有理的；

因此，直线AG、GE中的每一个也是有理的；

因此，矩形AH、GK中的每一个都是有理的，

[X. 19]

且AH与GK可公度。

但AH等于SN，且GK等于NQ；

因此，SN、NQ，即MN、NO上的正方形，是有理的且可公度。

又，由于AE与ED长度不可公度，

而AE与AG可公度，且DE与EF可公度，

因此，AG与EF也不可公度，

[X. 13]

因此，AH与EL也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

但AH等于SN，且EL等于MR；

因此，SN与MR也不可公度。

但SN比MR如同PN比NR；

[VI. 1]

因此，PN与NR不可公度。

[X. 11]

但PN等于MN，且NR等于NO；

因此，MN与NO不可公度。

而MN上的正方形与NO上的正方形可公度，

且每一个都是有理的；

因此，MN、NO是仅正方可公度的有理直线。

因此，MO是二项线[X. 36]，且是AC的“边”。

这就是所要证明的。

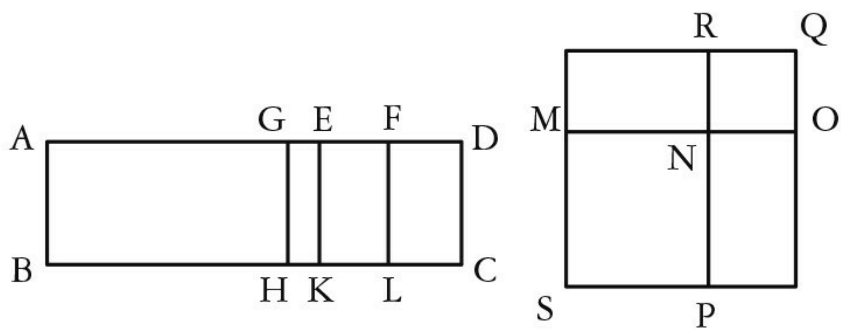
---

[1]所谓“边”是指“与之相等的正方形的边”。（译者注）

命题**55**

若一有理直线与第二二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**是被称为第一双中项线的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the second binomial, the “side” of the area is the irrational straight line which is called a first bimedial.



设有理直线AB与第二二项线AD围成面ABCD；

我说，面AC的“边”是第一双中项线。

这是因为，由于AD是第二二项线，设它在点E被分成它的两段，且AE较大；

因此，AE、ED是仅正方可公度的有理直线，

AE上的正方形比ED上的正方形大一个与AE可公度的直线上的正方形，

且较短直线ED与AB长度可公度。

[X. 定义II. 2]

设ED在点F被二等分。

且对AE贴合出矩形AG、GE等于EF上的正方形且亏缺一个正方

形；

因此，AG与GE长度可公度。

[X. 17]

过G、E、F作GH、EK、FL平行于AB、CD，

作正方形SN等于平行四边形AH，正方形NQ等于GK，

且使MN与NO在同一直线上；

因此，RN与NP也在同一直线上。

将正方形SQ补充完整。

于是，从前面的证明显然可得，MR是SN、NQ的比例中项，且等于EL，而且MO是面AC的“边”。

现在需要证明，MO是第一双中项线。

由于AE与ED长度不可公度，

而ED与AB可公度，

因此，AE与AB不可公度。

[X. 13]

又，由于AG与EG可公度，所以

AE与直线AG、GE中的每一个也可公度。

[X. 15]

但AE与AB长度不可公度；

因此，AG、GE与AB也不可公度。

[X. 13]

因此，BA、AG和BA、GE是两对仅正方可公度的有理直线；

因此，矩形AH、GK中的每一个都是中项面。

[X. 21]

因此，正方形SN、NQ中的每一个都是中项面。

因此，MN、NO都是中项线。

又，由于AG与GE长度可公度，所以

AH与GK也可公度，

[VI. 1，X. 11]

即SN与NQ可公度，

即MN上的正方形与NO上的正方形可公度。

又，由于AE与ED长度不可公度，

而AE与AG可公度，

且ED与EF可公度，

因此，AG与EF不可公度；

[X. 13]

因此，AH与EL也不可公度，

即SN与MR不可公度，

即PN与NR不可公度，

[VI. 1，X. 11]

即MN与NO长度不可公度。

但已证明，MN、NO是中项线且正方可公度；

因此，MN、NO是仅正方可公度的中项线。

其次我说，MN、NO也围成一个有理矩形。

这是因为，根据假设，DE与直线AB、EF中的每一个可公度，

因此，EF与EK也可公度。

[X. 12]

而它们都是有理的；

因此，EL即MR是有理的，

[X. 19]

且MR是矩形MN、NO。

但围成一个有理矩形的仅正方可公度的两中项线之和是无理的，且称之为第一双中项线。

[X. 37]

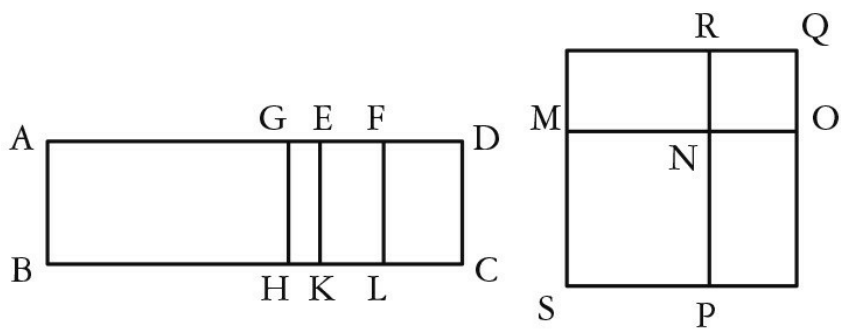
因此，MO是第一双中项线。

这就是所要证明的。

命题**56**

若一有理直线与第三二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**是被称为第二双中项线的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the third binomial, the “side” of the area is the irrational straight line called a second bimedial.



设有理直线AB与第三二项线AD围成面ABCD，AD在E被分成它的两段，且AE较大；

我说，面AC的“边”是被称为第二双中项线的无理直线。

作和以前一样的图。

现在，由于AD是第三二项线，

因此，AE、ED是仅正方可公度的有理直线，

AE上的正方形比ED上的正方形大一个与AE可公度的直线上的正方形，

且AE、ED中的每一个都与AB长度不可公度。

[X. 定义II. 3]

于是，按照与前面类似的方法可以证明，MO是面AC的“边”，

且MN、NO是仅正方可公度的中项线；

因此，MO是双中项线。

其次需要证明，MO也是第二双中项线。

由于DE与AB即EK长度不可公度，

且DE与EF可公度，

因此，EF与EK长度不可公度。

[X. 13]

而它们都是有理的；

因此，FE、EK是仅正方可公度的有理直线，

因此，EL即MR是中项面。

[X. 21]

而它是由MN、NO围成的；

因此，矩形MN、NO是中项面。

因此，MO是第二双中项线。

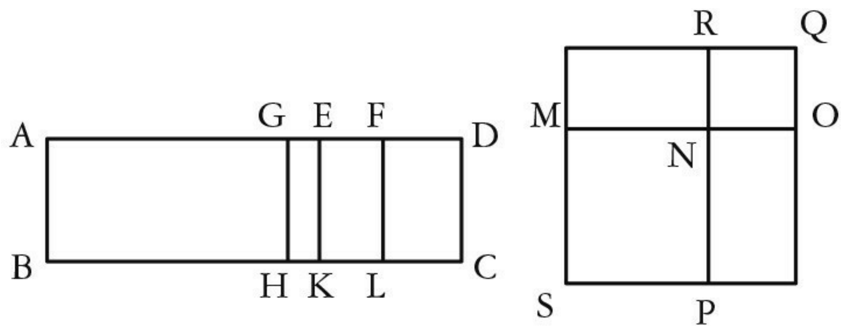
[X. 38]

这就是所要证明的。

命题**57**

若一有理直线与第四二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**是被称为主线的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the fourth binomial, the “side” of the area is the irrational straight line called major.



设有理直线AB与第四二项线AD围成面AC，AD在E被分成它的两段，且AE较长；

我说，面AC的“边”是被称为主线的无理直线。

这是因为，由于AD是第四二项线，

因此，AE、ED是仅正方可公度的有理直线，

AE上的正方形比ED上的正方形大一个与AE不可公度的直线上的正方形，

且AE与AB长度可公度。

[X. 定义II. 4]

设DE在F被二等分，

对AE贴合出矩形AG、GE等于EF上的正方形；

因此，AG与GE长度不可公度。

[X. 18]

作GH、EK、FL平行于AB，

其余作图如前；

于是显然，MO是面AC的“边”。

其次需要证明，MO是被称为主线的无理直线。

由于AG与EG不可公度，所以

AH与GK也不可公度，即SN与NQ不可公度；

[VI. 1，X. 11]

因此，MN、NO正方不可公度。

又，由于AE与AB可公度，所以

AK是有理的；

[X. 19]

而它等于MN、NO上的正方形之和；

因此，MN、NO上的正方形之和也是有理的。

又，由于DE与AB即EK长度不可公度，

而DE与EF可公度，

因此，EF与EK长度不可公度。

[X. 13]

因此，EK、EF是仅正方不可公度的有理直线；

因此，LE即MR是中项面。

[X. 21]

又，它是由MN、NO围成的；

因此，矩形MN、NO是中项面。

MN、NO上的正方形之和是有理的，

且MN、NO正方不可公度。

但如果正方不可公度的两直线上的正方形之和是有理的，但它们围成的矩形是中项面，则它们相加所得到的整条直线是无理的，且称之为主线。

[X. 39]

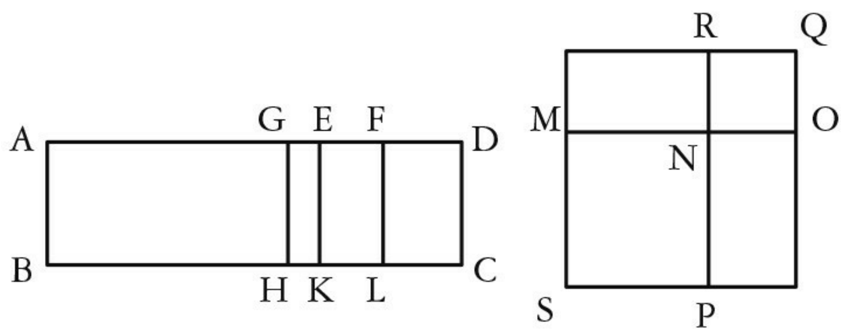
因此，MO是被称为主线的无理直线，且是面AC的“边”。

这就是所要证明的。

命题**58**

若一有理直线与第五二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**是被称为有理中项面的边的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the fifth binomial, the “side” of the area is the irrational straight line called the side of a rational plus a medial area.



设有理直线AB与第五二项线AD围成面AC，AD在E被分成它的两段，且AE较大；

我说，面AC的“边”是被称为有理中项面的边的无理直线。

作和以前一样的图；

于是显然，MO是面AC的“边”。

于是，需要证明，MO是一个有理中项面的边。

这是因为，由于AG与GE不可公度，

[X. 18]

因此，AH与HE也不可公度，

[VI. 1，X. 11]

即MN上的正方形与NO上的正方形不可公度；

因此，MN、NO正方不可公度。

又，由于AD是第五二项线，且ED较小，

因此，ED与AB长度可公度。

[X. 定义II. 5]

但AE与ED不可公度；

因此，AB与AE也长度不可公度。

[X. 13]

因此，AK，即MN、NO上的正方形之和，是中项面。

[X. 21]

又，由于DE与AB，即与EK，长度可公度，

而DE与EF可公度，

因此，EF与EK也可公度。

[X. 12]

而EK是有理的；

因此，EL，即MR，即矩形MN、NO，也是有理的。

[X. 19]

因此，MN、NO是正方不可公度的直线，且它们上的正方形之和是中项面，但由它们围成的矩形是有理面。

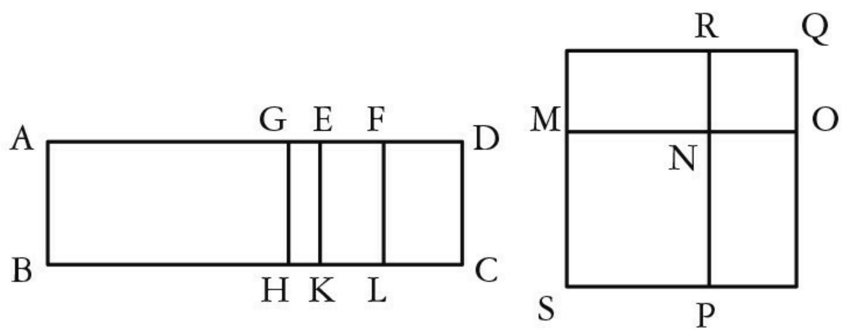
因此，MO是一个有理中项面的边[X. 40]，且是面AC的“边”。

这就是所要证明的。

命题**59**

若一有理直线与第六二项线围成一个面，则此面的**“**边**”**是被称为两中项面之和的边的无理直线。

If an area be contained by a rational straight line and the sixth binomial, the “side” of the area is the irrational straight line called the side of the sum of two medial areas.



设有理直线AB与第六二项线AD围成面ABCD，AD在E被分成它的两段，且AE较大；

我说，面AC的“边”是两中项面之和的边。

作和以前一样的图。

于是显然，MO是AC的“边”，且MN与NO正方不可公度。

现在，由于EA与AB长度不可公度，

因此，EA、AB是仅正方可公度的有理直线；

因此，AK，即MN、NO上的正方形之和，是中项面。

[X. 21]

又，由于ED与AB长度不可公度，

因此，FE与EK也不可公度；

[X. 13]

因此，FE、EK是仅正方可公度的有理直线；

因此，EL，即MR，即矩形MN、NO是中项面。

[X. 21]

又，由于AE与EF不可公度，所以

AK与EL也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

但AK是MN、NO上的正方形之和，

且EL是矩形MN、NO；

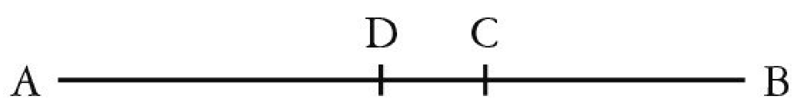
因此，MN、NO上的正方形之和与矩形MN、NO不可公度。

而它们都是中项面，且MN、NO正方不可公度。

因此，MO是两中项面之和的边[X. 41]，且是面AC的“边”。

这就是所要证明的。

<引理　若一直线被分成不相等的两段，则这两段上的正方形之和大于由这两段围成的矩形的二倍。



设AB是一直线，它在C被分成不相等的两段，且AC较大；

我说，AC、CB上的正方形之和大于二倍的矩形AC、CB。

这是因为，使AB在D被二等分。

于是，由于一直线在D被分成相等的两段，在C被分成不相等的两段，所以矩形AC、CB加CD上的正方形等于AD上的正方形，

[II. 5]

因此，矩形AC、CB小于AD上的正方形；

因此，二倍的矩形AC、CB小于AD上的正方形的二倍。

但AC、CB上的正方形之和等于AD、DC上的正方形之和的二倍；

[II. 9]

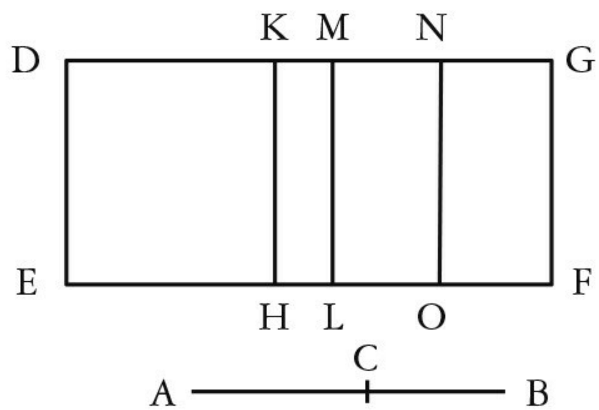
因此，AC、CB上的正方形之和大于二倍的矩形AC、CB。

这就是所要证明的。>

命题**60**

对一有理直线贴合出的矩形等于二项线上的正方形，则所产生的宽是第一二项线。

The square on the binomial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the first binomial.



设AB是二项线，在C被分成它的两段，且AC较大；

给定有理直线DE，

对DE贴合出DEFG等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第一二项线。

这是因为，对DE贴合出矩形DH等于AC上的正方形，且KL等于BC上的正方形；

因此，余量，即二倍的矩形AC、CB，等于MF。

设MG在N被二等分，且作NO平行于ML或GF。

因此，矩形MO、NF中的每一个都等于矩形AC、CB。

现在，由于AB是在C被分成它的两段的二项线，

因此，AC、CB是仅正方可公度的有理直线；

[X. 36]

因此，AC、CB上的正方形都是有理的且彼此可公度，

因此，AC、CB上的正方形之和也是有理的。

[X. 15]

而这个和等于DL；

因此，DL是有理的。

且它是对有理直线DE贴合出的；

因此，DM是有理的，且与DE长度可公度。

[X. 20]

又，由于AC、CB是仅正方可公度的有理直线，

因此，二倍的矩形AC、CB，即MF，是中项面。

[X. 21]

而它是对有理直线ML贴合出的；

因此，MG也是有理的，且与ML即DE长度不可公度。

[X. 22]

但MD也是有理的，且与DE长度可公度；

因此，DM与MG长度不可公度。

[X. 13]

而它们都是有理的；

因此，DM、MG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是二项线。

[X. 36]

其次需要证明，DG也是第一二项线。

由于矩形AC、CB是AC、CB上的两正方形的比例中项，

[参见X. 53后的引理]

因此，MO也是DH、KL比例中项。

因此，DH比MO如同MO比KL，

即DK比MN如同MN比MK；

[VI. 1]

因此，矩形DK、KM等于MN上的正方形。

[VI. 17]

又，由于AC上的正方形与CB上的正方形可公度，所以

DH与KL也可公度，

因此，DK与KM也可公度。

[VI. 1，X. 11]

又，由于AC、CB上的正方形之和大于二倍的矩形AC、CB，

[引理]

因此，DL也大于MF，

因此，DM也大于MG。

[VI. 1]

且矩形DK、KM等于MN上的正方形，即等于MG上的正方形的四分之一，

且DK与KM可公度。

但如果有两条不等的直线，对较大直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，若把较大直线分成长度可公度的两部分，则较大直线上的正方形比较小直线上的正方形大一个与较大直线可公度的直线上的正方形。

[X. 17]

因此，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM可公度的直线上的正方形。

而DM、MG都是有理的，

且较大直线DM与给定的有理直线DE长度可公度。

因此，DG是第一二项线。

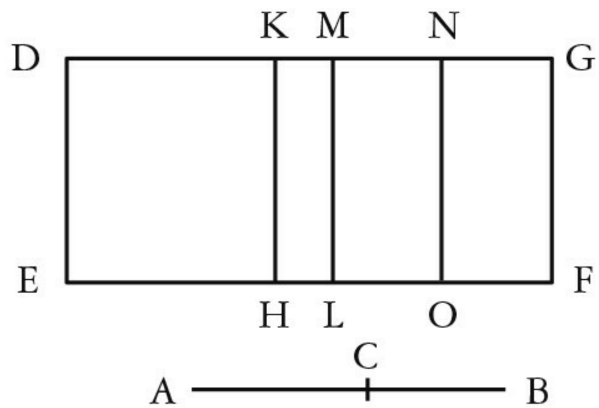
[X. 定义II. 1]

这就是所要证明的。

命题**61**

对一有理直线贴合出的矩形等于第一双中项线上的正方形，则所产生的宽是第二二项线。

The square on the first bimedial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the second binomial.



设AB是第一双中项线，在C被分成它的两段，且AC较大；

给定有理直线DE，

对DE贴合出平行四边形DF等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第二二项线。

作和以前一样的图。

于是，由于AB是在C被分成它的两段的第一双中项线，

因此，AC、CB是围成一个有理矩形的仅正方可公度的中项线，

[X. 37]

因此，AC、CB上的正方形之和也是中项面。

[X. 21]

因此，DL是中项面。

[X. 15和23，推论]

而它是对有理直线DE贴合出的；

因此，MD是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

又，由于二倍的矩形AC、CB是有理的，所以MF也是有理的。

而它是对有理直线ML贴合出的；

因此，MG也是有理的，且与ML即DE长度可公度；

[X. 20]

因此，DM与MG长度不可公度。

[X. 13]

而它们是有理的；

因此，DM、MG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是二项线。

[X. 36]

其次需要证明，DG也是第二二项线。

这是因为，由于AC、CB上的正方形之和大于二倍的矩形AC、CB，

因此，DL也大于MF，

因此，DM也大于MG。

[VI. 1]

又，由于AC上的正方形与CB上的正方形可公度，所以

DH与KL也可公度，

因此，DK与KM也可公度。

[VI. 1，X. 11]

而矩形DK、KM等于MN上的正方形；

因此，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM可公度的直线上的正方形。

[X. 17]

而MG与DE长度可公度。

因此，DG是第二二项线。

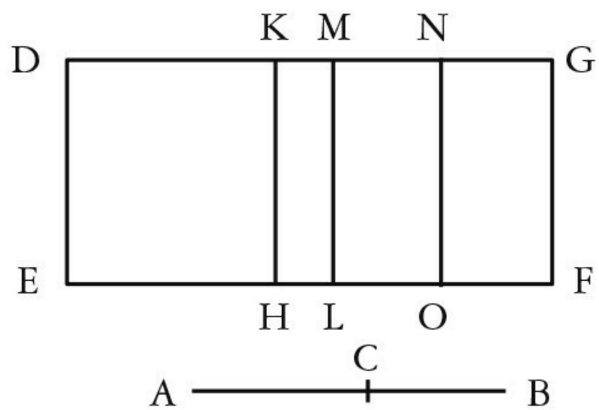
[X. 定义II. 2]

这就是所要证明的。

命题**62**

对一有理直线贴合出的矩形等于第二双中项线上的正方形，则所产生的宽是第三二项线。

The square on the second bimedial straight line applied to a rational straight line produces as breadth the third binomial.



设AB是第二双中项线，在C被分成它的两段，且AC较大；

设DE是有理直线，

对DE贴合出平行四边形DF等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第三二项线。

作和以前一样的图。

于是，由于AB是在C被分成它的两段的第二双中项线，

因此，AC、CB是围成一个中项矩形的仅正方可公度的中项线，

[X. 38]

因此，AC、CB上的正方形之和也是中项面。

[X. 15和23推论]

而它等于DL；

因此，DL也是中项面。

而它是对有理直线DE贴合出的；

因此，MD也是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

同理，

MG也是有理的，且与ML即DE长度不可公度；

因此，直线DM、MG中的每一个都是有理的，且与DE长度不可公度。

又，由于AC与CB长度不可公度，

且AC比CB如同AC上的正方形比矩形AC、CB，

因此，AC上的正方形与矩形AC、CB也不可公度。

[X. 11]

因此，AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB不可公度，

也就是说，DL与MF不可公度，

因此，DM与MG也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

而它们是有理的；

因此，DG是二项线。

需要证明，它也是第三二项线。

以和之前类似的方法可以断定，DM大于MG，

且DK与KM可公度。

而矩形DK、KM等于MN上的正方形；

因此，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM可公度的直线上的正方形。

且直线DM、MG中的每一个都不与DE长度可公度。

因此，DG是第三二项线。

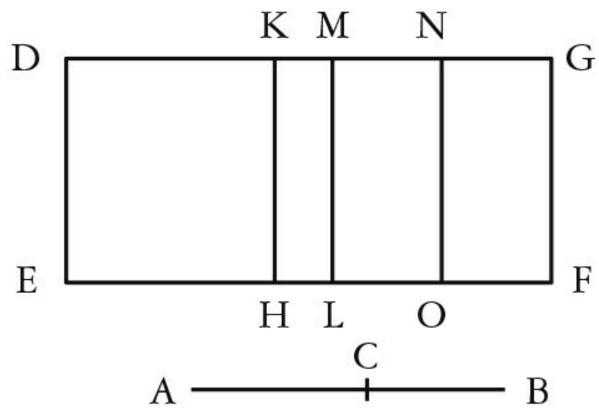
[X. 定义II. 3]

这就是所要证明的。

命题**63**

对一有理直线贴合出的矩形等于主线上的正方形，则所产生的宽是第四二项线。

The square on the major straight line applied to a rational straight line produces as breadth the fourth binomial.



设AB是主线，在C被分成它的两段，且AC大于CB；

设DE是有理直线，

对DE贴合出平行四边形DF等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第四二项线。

作和以前一样的图。

于是，由于AB是在C被分成它的两段的主线，所以

AC、CB是正方不可公度的直线，它们上的正方形之和是有理的，但由它们围成的矩形是中项面。

[X. 39]

于是，由于AC、CB上的正方形之和是有理的，

因此，DL是有理的；

因此，DM也是有理的，且与DE长度可公度。

[X. 20]

又，由于二倍的矩形AC、CB，即MF，是中项面，

且它是对有理直线ML贴合出的，

因此，MG也是有理的，且与DE长度不可公度；

[X. 22]

因此，DM与MG长度不可公度。

[X. 13]

因此，DM、MG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是二项线。

[X. 36]

需要证明，DG也是第四二项线。

以和之前类似的方法可以证明，DM大于MG，且矩形DK、KM等于MN上的正方形。

于是，由于AC上的正方形与CB上的正方形不可公度，

因此，DH与KL也不可公度，

因此，DK与KM也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

但如果有两条不等的直线，对较长直线贴合出一个等于较小直线上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，若把较长直线分成长度不可公度的两部分，则较大直线上的正方形比较小直线上的正方

形大一个与较大直线不可公度的直线上的正方形；

[X. 18]

因此，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM不可公度的直线上的正方形。

而DM、MG是仅正方可公度的有理直线，

且DM与给定的有理直线DE可公度。

因此，DG是第四二项线。

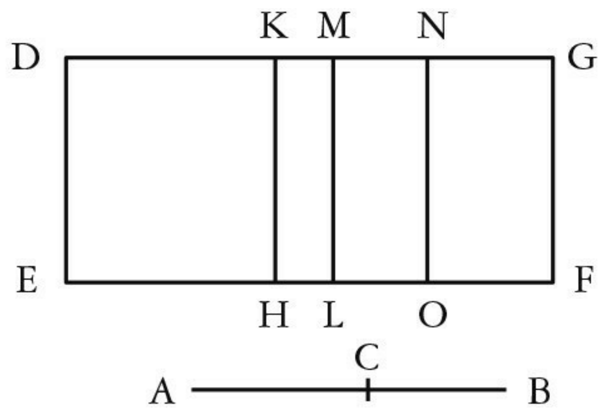
[X. 定义II. 4]

这就是所要证明的。

命题**64**

对一有理直线贴合出的矩形等于有理中项面的边上的正方形，则所产生的宽是第五二项线。

The square on the side of a rational plus a medial area applied to a rational straight line produces as breadth the fifth binomial.



设AB是有理中项面的边，在C被分成它的两段，且AC较大；

给定有理直线DE，

对DE贴合出平行四边形DF等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第五二项线。

作和以前一样的图。

于是，由于AB是在C被分成它的两段的有理中项面的边，

因此，AC、CB是正方不可公度的直线，其上的正方形之和是中项面，但由它们围成的矩形是有理的。

[X. 40]

于是，由于AC、CB上的正方形之和是中项面，

因此，DL是中项面，

因此，DM是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

又，由于二倍的矩形AC、CB，即MF，是有理的。

因此，MG是有理的，且与DE可公度。

[X. 20]

因此，DM与MG不可公度；

[X. 13]

因此，DM、MG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是二项线。

[X. 36]

其次我说，DG也是第五二项线。

这是因为，可以类似地证明，矩形DK、KM等于MN上的正方形，

且DK与KM长度不可公度；

因此，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM不可公度的直线上的正方形。

[X. 18]

而DM、MG仅正方可公度，且较小直线MG与DE长度可公度。

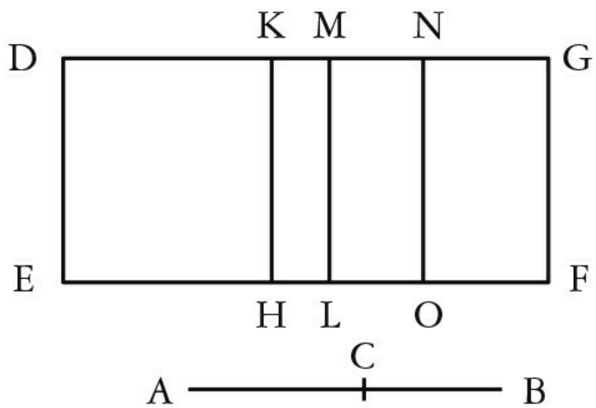
因此，DG是第五二项线。

这就是所要证明的。

命题**65**

对一有理直线贴合出的矩形等于两中项面之和的边上的正方形，则所产生的宽是第六二项线。

The square on the side of the sum of two medial areas applied to a rational straight line produces as breadth the sixth binomial.



设AB是两中项面之和的边，在C被分成它的两段，

设DE是有理直线，

且对DE贴合出平行四边形DF等于AB上的正方形，产生DG作为它的宽；

我说，DG是第六二项线。

作和以前一样的图。

于是，由于AB是在C被分成它的两段的两中项面之和的边，

因此，AC、CB是正方不可公度的直线，其上的正方形之和是中项面，由它们围成的矩形是中项面，且其上的正方形之和与它们围成的矩形不可公度，

[X. 41]

因此，按照以前的证明，矩形DL、MF中的每一个都是中项面。

而它们是对有理直线DE贴合出的；

因此，直线DM、MG中的每一个都是有理的，且与DE长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB不可公度，

因此，DL与MF不可公度。

因此，DM与MG也不可公度；

[VI. 1，X. 11]

因此，DM、MG是仅正方可公度的有理直线；

因此，DG是二项线。

[X. 36]

其次我说，DG也是第六二项线。

类似地，还可以证明，矩形DK、KM等于MN上的正方形，

且DK与KM长度不可公度；

同理，DM上的正方形比MG上的正方形大一个与DM长度不可公度直线上的正方形。

且直线DM、MG都不与给定的有理直线DE长度可公度。

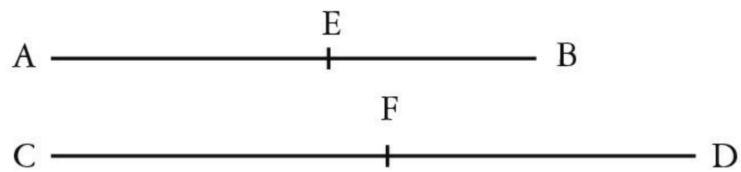
因此，DG是第六二项线。

这就是所要证明的。

命题**66**

与二项线长度可公度的直线本身也是二项线，且是同级的。

A straight line commensurable in length with a binomial straight line is itself also binomial and the same in order.



设AB是二项线，且设CD与AB长度可公度；

我说，CD是二项线，且与AB同级。

这是因为，由于AB是二项线，设它在E被分成它的两段，且AE较大；

因此，AE、EB是仅正方可公度的有理直线。

[X. 36]

设法使AB比CD如同AE比CF；

[VI. 12]

因此也有，余量EB比余量FD如同AB比CD。

[V. 19]

但AB与CD长度可公度；

因此，AE也与CF可公度，EB也与FD可公度。

[X. 11]

而AE、EB是有理的；

因此，CF、FD也是有理的。

而AE比CF如同EB比FD。

[V. 11]

因此，取更比例，AE比EB如同CF比FD。

[V. 16]

但AE、EB仅正方可公度；

因此，CF、FD也仅正方可公度。

[X. 11]

而它们是有理的；

因此，CD是二项线。

[X. 36]

其次我说，它与AB同级。

这是因为，AE上的正方形比EB上的正方形大一个与AE要么可公度，要么不可公度的直线上的正方形。

于是，如果AE上的正方形比EB上的正方形大一个与AE可公度的直线上的正方形，则CF上的正方形也比FD上的正方形大一个与CF可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果AE与给定的有理直线可公度，则CF也与给定的有理直线也可公度，

[X. 12]

因此，直线AB、CD中的每一个都是第一二项线，即它们同级。

[X. 定义II. 1]

但如果EB与给定的有理直线可公度，则FD与给定的有理直线也可公度。

[X. 12]

因此，CD与AB同级，

这是因为，它们都是第二二项线。

[X. 定义II. 2]

但如果直线AE、EB中的每一个都不与给定的有理直线可公度，则直线CF、FD也都不与给定的有理直线可公度，

[X. 13]

因此，直线AB、CD中的每一个都是第三二项线。

[X. 定义II. 3]

但如果AE上的正方形比EB上的正方形大一个与AE不可公度的直线上的正方形，则CF上的正方形也比FD上的正方形大一个与CF不可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果AE与给定的有理直线可公度，则CF也与给定的有理直线可公度，

因此，直线AB、CD中的每一个都是第四二项线。

[X. 定义II. 4]

但如果EB与给定的有理直线可公度，则FD也与给定的有理直线可公度，

因此，直线AB、CD中的每一个都是第五二项线。

[X. 定义II. 5]

但如果直线AE、EB都不与给定的有理直线可公度，则直线CF、FD也都不与给定的有理直线可公度，

因此，直线AB、CD中的每一个都是第六二项线。

[X. 定义II. 6]

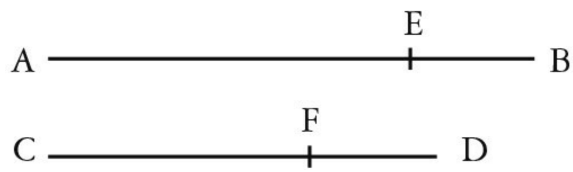
因此，与二项线长度可公度的直线也是二项线，且是同级的。

这就是所要证明的。

命题**67**

与双中项线长度可公度的直线本身也是双中项线，且是同级的。

A straight line commensurable in length with a bimedial straight line is itself also bimedial and the same in order.



设AB是双中项线，且设CD与AB长度可公度；

我说，CD是双中项线，且与AB同级。

这是因为，由于AB是双中项线，设它在E被分成它的两段；

因此，AE、EB是仅正方可公度的中项线。

[X. 37，38]

设法使AB比CD如同AE比CF；

因此也有，余量EB比余量FD如同AB比CD。

[V. 19]

但AB与CD长度可公度；

因此，AE、EB也分别与CF、FD可公度。

[X. 11]

但AE、EB是中项线；

因此，CF、FD也是中项线。

[X. 23]

又，由于AE比EB如同CF比FD，

[V. 11]

而AE、EB仅正方可公度，

因此，CF、FD也仅正方可公度。

[X. 11]

但已证明，它们是中项线；

因此，CD是双中项线。

其次我说，CD还与AB同级。

这是因为，AE比EB如同CF比FD，

因此也有，AE上的正方形比矩形AE、EB如同CF上的正方形比矩形CF、FD；

因此，取更比例，AE上的正方形比CF上的正方形如同矩形AE、EB比矩形CF、FD。

[V. 16]

但AE上的正方形与CF上的正方形可公度；

因此，矩形AE、EB与矩形CF、FD也可公度。

因此，如果矩形AE、EB是有理的，则

矩形CF、FD也是有理的，

因此，CD是第一双中项线；

[X. 37]

但如果矩形AE、EB是中项面，则矩形CF、FD也是中项面。

[X. 23，推论]

因此，直线AB、CD中的每一个都是第二双中项线。

[X. 38]

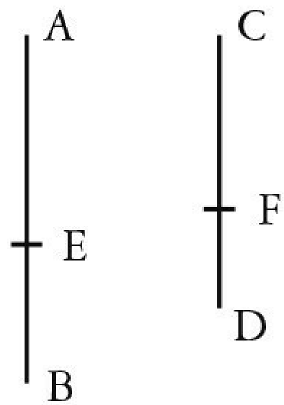
因此，CD与AB同级。

这就是所要证明的。

命题**68**

与主线可公度的直线本身也是主线。

A straight line commensurable with a major straight line is itself also major.



设AB是主线，且设CD与AB可公度；

我说，CD是主线。

设AB在E被分成它的两段；

因此，AE、EB是正方不可公度的直线，且其上的正方形之和是有理的，但由它们围成的矩形是中项面。

[X. 39]

作和以前一样的图。

于是，由于AB比CD如同AE比CF，又如同EB比FD，

因此也有，AE比CF如同EB比FD。

[V. 11]

但AB与CD可公度；

因此，AE、EB也分别与CF、FD也可公度。

[X. 11]

又，由于AE比CF如同EB比FD，

取更比例，

AE比EB如同CF比FD；

[V. 16]

取合比例，

AB比BE如同CD比DF；

[V. 18]

因此也有，AB上的正方形比BE上的正方形如同CD上的正方形比DF上的正方形。

[VI. 20]

类似地，可以证明，AB上的正方形比AE上的正方形也如同CD上的正方形比CF上的正方形。

因此也有，AB上的正方形比AE、EB上的正方形之和如同CD上的正方形比CF、FD上的正方形之和；

取更比例，AB上的正方形比CD上的正方形如同AE、EB上的正方形之和比CF、FD上的正方形之和。

[V. 16]

但AB上的正方形与CD上的正方形可公度；

因此，AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和也可公度。

而AE、EB上的正方形之和是有理的；

因此，CF、FD上的正方形之和是有理的。

类似地也有，二倍的矩形AE、EB与二倍的矩形CF、FD可公度。

而二倍的矩形AE、EB是中项面；

因此，二倍的矩形CF、FD也是中项面。

[X. 23，推论]

因此，CF、FD是正方不可公度的直线，且其上的正方形之和是有理的，但由它们围成的矩形是中项面；因此，整个CD是被称为主线的无理直线。

[X. 39]

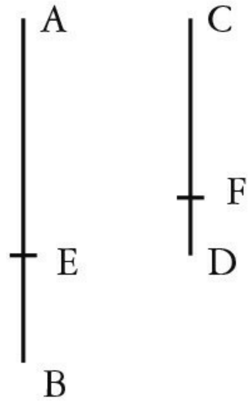
因此，与主线可公度的直线是主线。

这就是所要证明的。

命题**69**

与有理中项面的边可公度的直线本身也是有理中项面的边。

A straight line commensurable with the side of a rational plus a medial area is itself also the side of a rational plus a medial area.



设AB是有理中项面的边，且设CD与AB可公度；

需要证明，CD也是有理中项面的边。

设AB在E被分成它的两段；

因此，AE、EB是正方不可公度的直线，且其上的正方形之和是中项面，但由它们围成的矩形是有理的。

[X. 40]

作和以前一样的图。

于是，可以类似地证明，CF、FD正方不可公度，

且AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和可公度，

且矩形AE、EB与矩形CF、FD可公度；

因此，CF、FD上的正方形之和也是中项面，且矩形CF、FD是有理的。

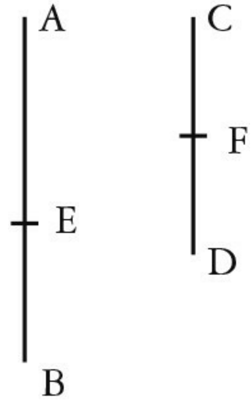
因此，CD是有理中项面的边。

这就是所要证明的。

命题**70**

与两中项面之和的边可公度的直线本身也是两中项面之和的边。

A straight line commensurable with the side of the sum of two medial areas is the side of the sum of two medial areas.



设AB是两中项面之和的边，且设CD与AB可公度；

需要证明，CD也是两中项面之和的边。

这是因为，由于AB是两中项面之和的边，

设它在E被分成它的两段；

因此，AE、EB是正方不可公度的直线，其上的正方形之和是中项面，由它们围成的矩形是中项面，且AE、EB上的正方形之和与矩形AE、EB不可公度。

[X. 41]

按照前面同样作图

于是，可以类似地证明，CF、FD也正方不可公度，

且AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和可公度，

且矩形AE、EB与矩形CF、FD可公度；

因此，CF、FD上的正方形之和也是中项面，

矩形CF、FD是中项面，

以及，CF、FD上的正方形之和与矩形CF、FD不可公度。

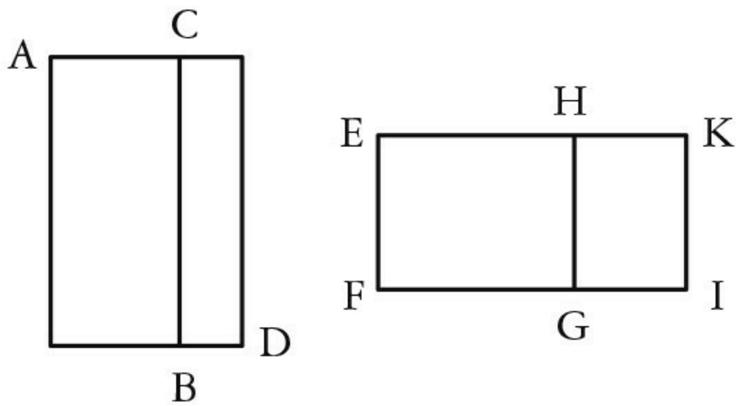
因此，CD是两中项面之和的边。

这就是所要证明的。

命题**71**

若把有理面与中项面相加，则可产生四条无理直线，即二项线，或第一双中项线，或主线，或有理中项面的边。

If a rational and a medial area be added together, four irrational straight lines arise, namely a binomial or a first bimedial or a major or a side of a rational plus a medial area.



设AB是有理面，CD是中项面；

我说，面AD的“边”是二项线，或第一双中项线，或主线，或有理中项面的边。

这是因为，AB要么大于，要么小于CD。

首先，设AB大于CD；

给定一条有理直线EF，

对EF贴合出矩形EG等于AB，产生作为宽的EH，

且对EF贴合出矩形HI等于DC，产生作为宽的HK。

于是，由于AB是有理面，且等于EG，

因此，EG也是有理面。

而它是对EF贴合出的，产生作为宽的EH，

因此，EH是有理的，且与EF长度可公度。

[X. 20]

又，由于CD是中项面，且等于HI，

因此，HI也是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的HK；

因此，HK是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于CD是中项面，

而AB是有理面，

因此，AB与CD不可公度，

因此，EG与HI也不可公度。

但EG比HI如同EH比HK；

[VI. 1]

因此，EH与HK也长度不可公度。

[X. 11]

而二者都是有理的；

因此，EH、HK是仅正方可公度的有理直线，

因此，EK是在H被分成两段的二项线。

[X. 36]

又，由于AB大于CD，

而AB等于EG，且CD等于HI，

因此，EG也大于HI；

因此，EH也大于HK。

于是，EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH要么长度可公度，要么长度不可公度的直线上的正方形。

首先，设EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH长度可公度的直线上的正方形。

现在，较长直线HE与给定的有理直线EF长度可公度；

因此，EK是第一二项线。

[X. 定义II. 1]

但EF是有理的；

且若一有理直线与第一二项线围成一个面，则此面的“边”是二项线。

[X. 54]

因此，EI的“边”是二项线；

因此，AD的“边”也是二项线。

其次，设EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH不可公度的直线上的正方形。

现在，较长直线EH与给定的有理直线EF长度可公度；

因此，EK是第四二项线。

[X. 定义II. 4]

但EF是有理的；

且若一有理直线与第四二项线围成一个面，则此面的“边”是被称为主线的无理直线。

[X. 57]

因此，面EI的“边”是主线；

因此，面AD的“边”也是主线。

其次，设AB小于CD；

因此，EG也小于HI，

因此，EH也小于HK。

现在，HK上的正方形比EH上的正方形大一个与HK要么可公度，要么不可公度的直线上的正方形。

首先，设HK上的正方形比EH上的正方形大一个与HK长度可公度的直线上的正方形。

现在，较短直线EH与给定的有理直线EF长度可公度；

因此，EK是第二二项线。

[X. 定义II. 2]

但EF是有理的，

且若一有理直线与第二二项线围成一个面，则此面的“边”是第一双中项线；

[X. 55]

因此，面EI的“边”是第一双中项线，

因此，面AD的“边”也是第一双中项线。

其次，设HK上的正方形比HE上的正方形大一个与HK不可公度的直线上的正方形。

现在，较短直线EH与给定的有理直线EF可公度；

因此，EK是第五二项线。

[X. 定义II. 5]

但EF是有理的；

且若一有理直线与第五二项线围成一个面，则此面的“边”是有理中项面的边。

[X. 58]

因此，面EI的“边”是有理中项面的边，

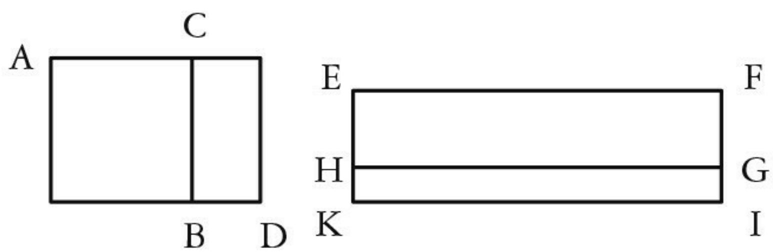
因此，面AD的“边”也是有理中项面的边。

这就是所要证明的。

命题**72**

若把两个彼此不可公度的中项面相加，则可产生其余两条无理直线，即要么是第二双中项线，要么是两中项面之和的边。

If two medial areas incommensurable with one another be added together, the remaining two irrational straight lines arise, namely either a second bimedial or a side of the sum of two medial areas.



设把彼此不可公度的两中项面AB、CD相加；

我说，面AD的“边”要么是第二双中项线，要么是两中项面之和的边。

这是因为，AB要么大于，要么小于CD。

首先，设AB大于CD。

给定有理直线EF，

对EF贴合出矩形EG等于AB，产生作为宽的EH，且矩形HI等于CD，产生作为宽的HK。

现在，由于面AB、CD中的每一个都是中项面，

因此，面EG、HI中的每一个也都是中项面。

而它们都是对有理直线FE贴合出的，产生作为宽的EH、HK；

因此，直线EH、HK中的每一个都是有理的，且与EF长度不可公

度。

[X. 22]

又，由于AB与CD不可公度，

且AB等于EG，CD等于HI，

因此，EG与HI也不可公度。

但EG比HI如同EH比HK；

[VI. 1]

因此，EH与HK长度不可公度。

[X. 11]

因此，EH、HK是仅正方可公度的有理直线；

因此，EK是二项线。

[X. 36]

但EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH要么可公度，要么不可公度的直线上的正方形。

首先，设EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH长度可公度的直线上的正方形。

现在，直线EH、HK中的每一个都与给定的有理直线EF长度不可公度；

因此，EK是第三二项线。

[X. 定义II. 3]

但EF是有理的；

且若一有理直线与第三二项线围成一个面，则此面的“边”是第二双

中项线；

[X. 56]

因此，EI即AD的“边”是第二双中项线。

其次，设EH上的正方形比HK上的正方形大一个与EH不可公度的直线上的正方形。

现在，直线EH、HK中的每一个都与EF长度不可公度；

因此，EK是第六二项线。

[X. 定义II. 6]

但若一有理直线与第六二项线围成一个面，则此面的“边”是两中项面之和的边；

[X. 59]

因此，面AD的“边”也是两中项面之和的边。

这就是所要证明的。

二项线和它之后的无理直线既不同于中项线，又彼此不同。

The binomial straight line and the irrational straight lines after it are neither the same with the medial nor with one another.

这是因为，如果对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线上的正方形，则产生的作为宽的直线是有理的，且与原有理直线长度不可公度。

[X. 22]

但是，对一有理直线贴合出的矩形等于二项线上的正方形，则所产

生的宽是第一二项线。

[X. 60]

对一有理直线贴合出的矩形等于第一双中项线上的正方形，则所产生的宽是第二二项线。

[X. 61]

对一有理直线贴合出的矩形等于第二双中项线上的正方形，则所产生的宽是第三二项线。

[X. 62]

对一有理直线贴合出的矩形等于主线上的正方形，则所产生的宽是第四二项线。

[X. 63]

对一有理直线贴合出的矩形等于有理中项面的边上的正方形，则所产生的宽是第五二项线。

[X. 64]

对一有理直线贴合出的矩形等于两中项面之和的边上的正方形，则所产生的宽是第六二项线。

[X. 65]

此外，上述那些作为宽的直线既与第一条有理直线不同，又彼此不同；与第一条有理直线不同是因为它是有理的，彼此不同则是因为它们不同级；

因此，这些无理直线本身也彼此不同。

命题**73**

若从一有理直线中减去与之仅正方可公度的有理直线，则余量是无理的；且称之为余线。

If from a rational straight line there be subtracted a rational straight line commensurable with the whole in square only, the remainder is irrational; and let it be called an apotome.



从有理直线AB中减去与AB仅正方可公度的有理直线BC；

我说，余量AC是被称为余线的无理直线。

这是因为，由于AB与BC长度不可公度，

且AB比BC如同AB上的正方形比矩形AB、BC，

因此，AB上的正方形与矩形AB、BC不可公度。

[X. 11]

但AB、BC上的正方形之和与AB上的正方形可公度，

[X. 15]

且二倍的矩形AB、BC与矩形AB、BC可公度。

[X. 6]

又，由于AB、BC上的正方形之和等于二倍的矩形AB、BC与CA上的正方形之和，

[II. 7]

因此，AB、BC上的正方形之和与余量AC上的正方形也不可公度。

[X. 13，16]

但AB、BC上的正方形之和是有理的；

因此，AC是无理的。

[X. 定义4]

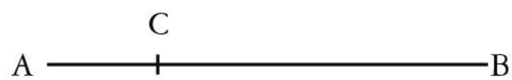
且称之为余线。

这就是所要证明的。

命题**74**

若从一中项线中减去与之仅正方可公度的中项线，且两线所围成的矩形是有理矩形，则余量是无理的；且称之为中项线的第一余线。

If from a medial straight line there be subtracted a medial straight line which is commensurable with the whole in square only, and which contains with the whole a rational rectangle, the remainder is irrational. And let it be called a first apotome of a medial straight line.



从中项线AB中减去与AB仅正方可公度的中项线BC，且矩形AB、BC是有理的；

我说，余量AC是无理的；且称之为中项线的第一余线。

这是因为，由于AB、BC是中项线，所以

AB、BC上的正方形之和也是中项面。

但二倍的矩形AB、BC是有理的；

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度；

因此，二倍的矩形AB、BC与余量AC上的正方形也不可公度，

[参见II. 7]

如果两个量之和与两个量之一不可公度，则这两个量也不可公度，

[X. 16]

但二倍的矩形AB、BC是有理的；

因此，AC上的正方形是无理的；

因此，AC是无理的。

[X. 定义4]

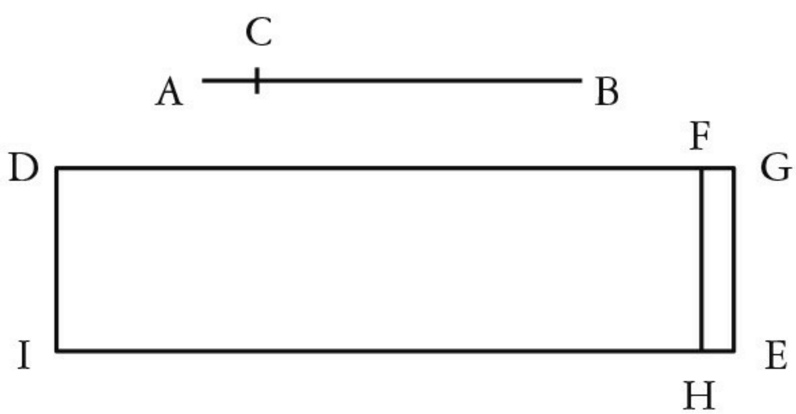
且称之为中项线的第一余线。

这就是所要证明的。

命题**75**

若从一中项线中减去与之仅正方可公度且与之围成中项矩形的中项线，则余量是无理的；且称之为<u>中项线的第二余线</u>。

If from a medial straight line there be subtracted a medial straight line which is commensurable with the whole in square only, and which contains with the whole a medial rectangle, the remainder is irrational; and let it be called a <u>second apotome of a medial</u> straight line.



从中项线AB中减去与整个AB仅正方可公度的中项线CB，且矩形AB、BC是中项面；

[X. 28]

我说，余量AC是无理的；且称之为中项线的第二余线。

这是因为，给定有理直线DI，

对DI贴合出矩形DE等于AB、BC上的正方形之和，产生作为宽的DG，

且对DI贴合出DH等于二倍的矩形AB、BC，产生作为宽的DF；

因此，余量FE等于AC上的正方形。

[II. 7]

现在，由于AB、BC上的正方形都是中项面而且可公度，

因此，DE也是中项面。

[X. 15和23，推论]

而它是对有理直线DI贴合出的，产生作为宽的DG；

因此，DG是有理的，且与DI长度不可公度。

[X. 22]

又，由于矩形AB、BC是中项面，

因此，二倍的矩形AB、BC也是中项面。

[X. 23，推论]

而它等于DH；

因此，DH也是中项面。

而它是对有理直线DI贴合出的，产生作为宽的DF；

因此，DF是有理的，且与DI长度不可公度。

[X. 22]

而由于AB、BC仅正方可公度，

因此，AB与BC长度不可公度；

因此，AB上的正方形与矩形AB、BC也不可公度。

[X. 11]

但AB、BC上的正方形之和与AB上的正方形可公度，

[X. 15]

且二倍的矩形AB、BC与矩形AB、BC可公度；

[X. 6]

因此，二倍的矩形AB、BC与AB、BC上的正方形之和不可公度。

[X. 13]

但DE等于AB、BC上的正方形之和，

且DH等于二倍的矩形AB、BC；

因此，DE与DH不可公度。

但DE比DH如同GD比DF；

[VI. 1]

因此，GD与DF不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，GD、DF是仅正方可公度的有理直线；

因此，FG是余线。

[X. 73]

但DI是有理的，

且有理直线与无理直线所围成的矩形是无理的，

[由X. 20推出]

且它的“边”是无理的。

而AC是FE的“边”；

因此，AC是无理的。

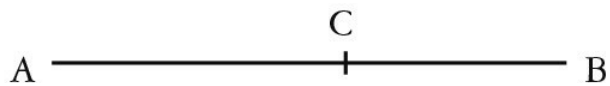
且称之为中项线的第二余线。

这就是所要证明的。

命题**76**

若从一直线中减去与之正方不可公度的直线，且两直线上的正方形之和是有理的，但两直线所围成的矩形是中项面，则余量是无理的；且称之为次线。

If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole and which with the whole makes the squares on them added together rational, but the rectangle contained by them medial, the remainder is irrational; and let it be called minor.



从直线AB中减去与AB正方不可公度且满足给定条件的直线BC。

[X. 33]

我说，余量AC是被称为次线的无理直线。

这是因为，由于AB、BC上的正方形之和是有理的，而二倍的矩形AB、BC是中项面，

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度；

取更比例，AB、BC上的正方形之和与余量即AC上的正方形不可公度。

[II. 7，X. 16]

但AB、BC上的正方形之和是有理的；

因此，AC上的正方形是无理的；

因此，AC是无理的。

且称之为次线。

这就是所要证明的。

命题**77**

若从一直线中减去与之正方不可公度的直线，且两直线上的正方形之和是中项面，但两直线所围成矩形的二倍是有理的，则余量是无理的；且称之为<u>中项面与有理面之差的边</u>。

If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole, and which with the whole makes the sum of the squares on them medial, but twice the rectangle contained by them rational, the remainder is irrational;and let it be called <u>that which produces with a rational area a medial whole</u>.



从直线AB中减去与AB正方不可公度的直线BC，且满足给定的条件；

[X. 34]

我说，余量AC是上述无理直线。

这是因为，由于AB、BC上的正方形之和是中项面，

而二倍的矩形AB、BC是有理的，

因此，AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度；

因此，余量，即AC上的正方形，与二倍的矩形AB、BC也不可公

度。

[II. 7，X. 16]

而两倍的矩形AB、BC是有理的；

因此，AC上的正方形是无理的；

因此，AC是无理的。

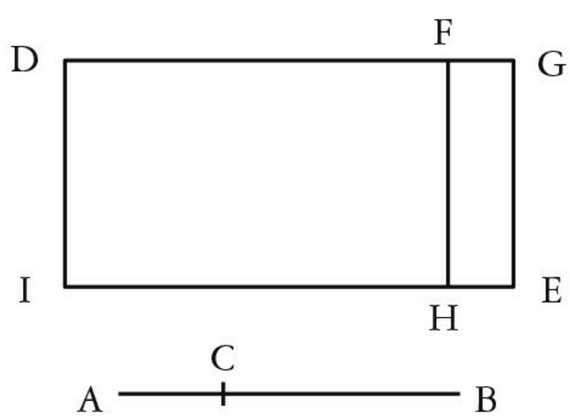
且称之为中项面与有理面之差的边。

这就是所要证明的。

命题**78**

若从一直线中减去与之正方不可公度的直线，且两直线上的正方形之和是中项面，它们所围成矩形的二倍也是中项面，且两直线上的正方形之和与它们所围成矩形的二倍不可公度，则余量是无理的；且称之为<u>中项面与中项面之差的边</u>。

If from a straight line there be subtracted a straight line which is incommensurable in square with the whole and which with the whole makes the sum of the squares on them medial, twice the rectangle contained by them medial, and further the squares on them incommensurable with twice the rectangle contained by them, the remainder is irrational; and let it be called <u>that which produces with a medial area a medial whole</u>.



从直线AB中减去与AB正方不可公度的直线BC，且满足给定的条件；

[X. 35]

我说，余量AC是被称为中项面与中项面之差的边的无理直线。

这是因为，给定有理直线DI，

对DI贴合出DE等于AB、BC上的正方形之和，产生作为宽的DG，

且矩形DH等于二倍的矩形AB、BC。

因此，余量FE等于AC上的正方形，

[II. 7]

因此，AC是EF的“边”。

现在，由于AB、BC上的正方形之和是中项面且等于DE，

因此，DE是中项面。

而它是对有理直线DI贴合出的，产生作为宽的DG；

因此，DG是有理的，且与DI长度不可公度。

[X. 22]

又，由于二倍的矩形AB、BC是中项面且等于DH，

因此，DH是中项面。

而它是对有理直线DI贴合出的，产生作为宽的DF；

因此，DF也是有理的，且与DI长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AB、BC上的正方形之和与二倍的矩形AB、BC不可公度，

因此，DE与DH也不可公度。

但DE比DH也如同DG比DF；

[VI. 1]

因此，DG与DF不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，GD、DF是仅正方可公度的有理直线。

因此，FG是余线。

[X. 73]

且FH是有理的；

但有理直线和余线所围成的矩形是无理的，

[由X. 20推出]

且它的“边”是无理的。

而AC是FE的“边”；

因此，AC是无理的。

且称之为中项面与中项面之差的边。

这就是所要证明的。

命题**79**

只有一条有理直线可以附加在余线上，使该有理直线与整条直线仅正方可公度。

To an apotome only one rational straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only.



设AB是余线，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是仅正方可公度的有理直线。

[X. 73]

我说，没有别的有理直线可以附加在AB上，使该有理直线与整条直线仅正方可公度。

如果可能，设BD是附加的直线；

因此，AD、DB也是仅正方可公度的有理直线。

[X. 73]

现在，由于AD、DB上的正方形之和比二倍的矩形AD、DB超出的量，也是AC、CB上的正方形之和比二倍的矩形AC、CB超出的量，

这是因为它们超出同一个量，即AB上的正方形，

[II. 7]

因此，AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出的量，等于二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出的量。

但AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出一个有

理面，

这是因为两者都是有理面；

因此，二倍的矩形AD、DB也比二倍的矩形AC、CB超出一个有理面：

这是不可能的，

因为两者都是中项面，

[X. 21]

而中项面不会比中项面超出一个有理面。

[X. 26]

因此，没有别的有理直线可以附加在AB上，使该有理直线与整条直线仅正方可公度。

因此，只有一条有理直线可以附加在一条余线上，使该有理直线与整条直线仅正方可公度。

这就是所要证明的。

命题**80**

只有一条中项线可以附加在中项线的第一余线上，使该中项线与整条直线仅正方可公度，且它们所围成的矩形是有理面。

To a first apothem of a medial straight line only one medial straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only and which contains with the whole a rational rectangle.



设AB是中项线的第一余线，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是仅正方可公度的中项线，且矩形AC、CB是有理的；

[X. 74]

我说，没有别的中项线可以附加在AB上，使该中项线与整条直线仅正方可公度，且它们所围成的矩形是有理面。

这是因为，如果可能，设DB也被这样附加上去；

因此，AD、DB是仅正方可公度的中项线，且矩形AD、DB是有理面。

[X. 74]

现在，由于AD、DB上的正方形之和比二倍的矩形AD、DB超出的量，也是AC、CB上的正方形之和比二倍的矩形AC、CB超出的量，

这是因为它们超出同一个量，即AB上的正方形，

[II. 7]

因此，AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出的

量，也是二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出的量。

但二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出一个有理面，

这是因为两者都是有理面。

因此，AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和也超出一个有理面：

这是不可能的，

这是因为两者都是中项面，

[X. 15和23，推论]

且中项面不会比中项面超出一个有理面。

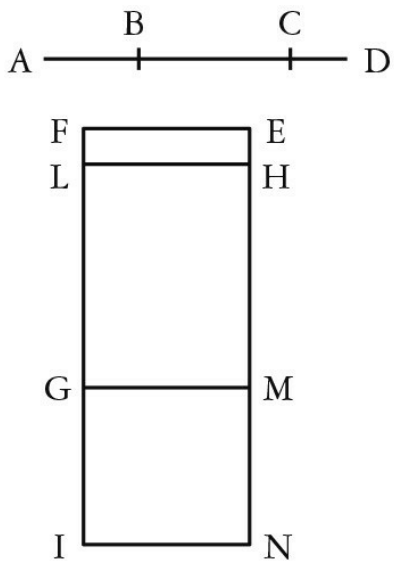
[X. 26]

这就是所要证明的。

命题**81**

只有一条中项线可以附加在中项线的第二余线上，使该中项线与整条直线仅正方可公度，且它们所围成的矩形是中项面。

To a second apotome of a medial straight line only one medial straight line can be annexed which is commensurable with the whole in square only and which contains with the whole a medial rectangle.



设AB是中项线的第二余线，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是仅正方可公度的中项线，且矩形AC、CB是中项面。

[X. 75]

我说，没有别的中项线可以附加在AB上，使该中项线与整条直线仅正方可公度，且它们所围成的矩形是中项面。

这是因为，如果可能，设BD也被这样附加上去；

因此，AD、DB也是仅正方可公度的中项线，且矩形AD、DB是中

项面。

[X. 75]

给定有理直线EF，

对EF贴合出EG等于AC、CB上的正方形之和，产生作为宽的EM，

并从中减去HG，HG等于二倍的矩形AC、CB，产生作为宽的HM；

因此，余量EL等于AB上的正方形，

[II. 7]

因此，AB是EL的“边”。

又，对EF贴合出EI等于AD、DB上的正方形之和，产生作为宽的EN。

但EL也等于AB上的正方形；

因此，余量HI等于二倍的矩形AD、DB。

[II. 7]

现在，由于AC、CB都是中项线，

因此，AC、CB上的正方形之和也是中项面。

而它们之和等于EG；

因此，EG也是中项面，

[X. 15和23，推论]

而它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的EM；

因此，EM是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于矩形AC、CB是中项面，所以

二倍的矩形AC、CB也是中项面。

[X. 23，推论]

而它等于HG；

因此，HG也是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的HM；

因此，HM也是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AC、CB仅正方可公度，

因此，AC与CB长度不可公度。

但AC比CB如同AC上的正方形比矩形AC、CB；

因此，AC上的正方形与矩形AC、CB不可公度。

[X. 11]

但AC、CB上的正方形之和与AC上的正方形可公度，

而二倍的矩形AC、CB与矩形AC、CB可公度；

[X. 6]

因此，AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB不可公度。

[X. 13]

又，EG等于AC、CB上的正方形之和，

而GH等于二倍的矩形AC、CB；

因此，EG与HG不可公度，

但EG比HG如同EM比HM；

[VI. 1]

因此，EM与MH长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，EM与MH是仅正方可公度的有理直线；

因此，EH是余线，HM是附加在EH上的直线。

[X. 73]

类似地，可以证明，HN也是附加在EH上的直线；

因此，有不同的直线附加在一条余线上，且与整条直线仅正方可公度；

这是不可能的。

[X. 79]

这就是所要证明的。

命题**82**

只有一条直线可以附加在次线上，使该直线与整条直线正方不可公度，它们上的正方形之和是有理的，且它们所围成矩形的二倍是中项面。

To a minor straight line only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole and which makes, with the whole, the sum of the squares on them rational but twice the rectangle contained by them medial.



设AB是次线，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是正方不可公度的直线，且它们上的正方形之和是有理的，但它们所围成矩形的二倍是中项面。

[X. 76]

我说，没有别的直线可以附加在AB上，以满足同样的条件。

这是因为，如果可能，设BD是如此附加的直线；

因此，AD、DB也是满足上述条件的正方不可公度的直线。

[X. 76]

现在，由于AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出的量也是二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出的量，

而AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出一个有理面，

这是因为两者都是有理面，

因此，二倍的矩形AD、DB也比二倍的矩形AC、CB的量超出一个有理面：

这是不可能的，这是因为两者都是中项面。

[X. 26]

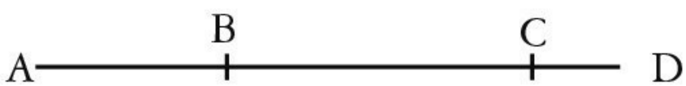
因此，只有一条直线可以附加在一条次线上，使该直线与整条直线正方不可公度，它们上的正方形之和是有理的，且它们所围成矩形的二倍是中项面。

这就是所要证明的。

命题**83**

只有一条直线可以附加在中项面与有理面之差的边上，使该直线与整条直线正方不可公度，且它们上的正方形之和是中项面，但它们所围成矩形的二倍是有理面。

To a straight line which produces with a rational area a medial whole only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole straight line and which with the whole straight line makes the sum of the squares on them medial, but twice the rectangle contained by them rational.



设AB是中项面与有理面之差的边，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是满足上述条件的正方不可公度的直线。

[X. 77]

我说，没有别的直线可以附加在AB上，以满足同样的条件。

这是因为，如果可能，设BD是如此附加的直线；

因此，AD、DB也是满足上述条件的正方不可公度的直线。

[X. 77]

于是，由于和前面的情况一样，

AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和超出的量也是二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出的量，

而二倍的矩形AD、DB比二倍的矩形AC、CB超出一个有理面，

这是因为两者都是有理的，

因此，AD、DB上的正方形之和比AC、CB上的正方形之和也超出一个有理面：

这是不可能的，这是因为两者都是中项面。

[X. 26]

因此，没有别的直线可以附加在AB上，使该直线与整条直线正方不可公度，且与整条直线满足上述条件；

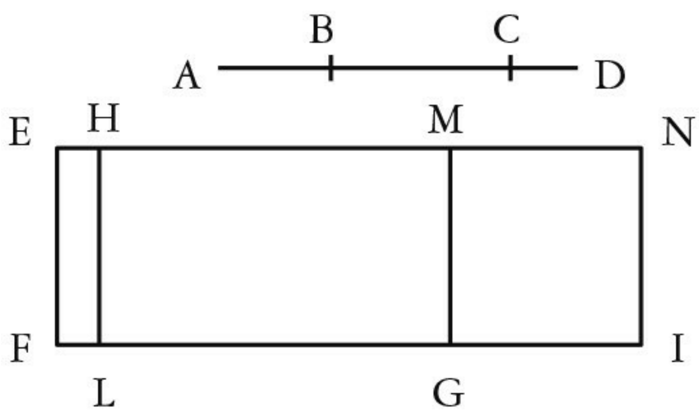
因此，只有一条直线可以这样附加上去。

这就是所要证明的。

命题**84**

只有一条直线可以附加在中项面与中项面之差的边上，使该直线与整条直线正方不可公度，它们上的正方形之和是中项面，且它们所围成矩形的二倍既是中项面，又与它们上的正方形之和不可公度。

To a straight line which produces with a medial area a medial whole only one straight line can be annexed which is incommensurable in square with the whole straight line and which with the whole straight line makes the sum of the squares on them medial and twice the rectangle contained by them both medial and also incommensurable with the sum of the squares on them.



设AB是中项面与中项面之差的边，且BC是附加在AB上的直线；

因此，AC、CB是满足上述条件的正方不可公度的直线。

[X. 78]

我说，没有别的直线可以附加在AB上，以满足同样的条件。

这是因为，如果可能，设BD是如此附加的直线，

使得AD、DB也是正方不可公度的直线，且AD、DB上的正方形之和是中项面，二倍的矩形AD、DB是中项面，且AD、DB上的正方形之

和与二倍的矩形AD、DB不可公度。

[X. 78]

给定有理直线EF，

对EF贴合出EG等于AC、CB上的正方形之和，产生作为宽的EM，

又对EM贴合出HG等于二倍的矩形AC、CB，产生作为宽的HM；

因此，余量，即AB上的正方形[II. 7]，等于EL；

因此，AB是EL的“边”。

又，对EF贴合出EI等于AD、DB上的正方形之和，产生作为宽的EN。

但AB上的正方形也等于EL；

因此，余量，即二倍的矩形AD、DB[II. 7]，等于HI。

现在，由于AC、CB上的正方形之和是中项面且等于EG，

因此，EG也是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的EM；

因此，EM是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于二倍的矩形AC、CB是中项面，且等于HG，

因此，HG也是中项面。

而它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的HM；

因此，HM是有理的，且与EF长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AC、CB上的正方形之和与二倍的矩形AC、CB不可公

度，所以

EG与HG也不可公度；

因此，EM与MH也长度不可公度。

[VI. 1，X. 11]

而两者都是有理的；

因此，EM、MH是仅正方可公度的有理直线；

因此，EH是余线，且HM是附加在它上的直线。

[X. 73]

类似地，可以证明，EH也是余线，且HN是附加在它上的直线。

因此，有不同的有理直线附加在一条余线上，且与整条直线仅正方可公度：

已经证明这是不可能的，

[X. 79]

因此，没有别的直线可以附加在AB上。

因此，只有一条直线可以附加在AB上，使该直线与整条直线正方不可公度，它们上的正方形之和是中项面，且它们所围成矩形的二倍既是中项面，又与它们上的正方形之和不可公度。

这就是所要证明的。

定义 Ⅲ **Definitions**

01 / 给定一条有理直线和一条余线，若整条直线上的正方形比附加直线上的正方形大一个与整条直线长度可公度的直线上的正方形，且整条直线与给定的有理直线长度可公度，则称此余线为第一余线。

Given a rational straight line and an apotome, if the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line commensurable in length with the whole, and the whole be commensurable in length with the rational straight line set out, let the apotome be called a *first apotome*.

02 / 但若附加直线与给定的有理直线长度可公度，且整条直线上的正方形比附加直线上的正方形大一个与整条直线可公度的直线上的正方形，则称此余线为第二余线。

But if the annex be commensurable in length with the rational straight line set out, and the square on the whole be greater than that on the annex by the square on a straight line commensurable with the whole, let the apotome be called a *second apotome*.

03 / 但若整条直线和附加直线都与给定的有理直线长度不可公度，且整条直线上的正方形比附加直线上的正方形大一个与整条直线可公度的直线上的正方形，则称此余线为第三余线。

But if neither be commensurable in length with the rational straight line set

out, and the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line commensurable with the whole, let the apotome be called a *third apotome*.

04 / 又，若整条直线上的正方形比附加直线上的正方形大一个与整条直线不可公度的直线上的正方形，那么，若整条直线与给定的有理直线长度可公度，则称此余线为第四余线；

Again, if the square on the whole be greater than the square on the annex by the square on a straight line incommensurable with the whole, then, if the whole be commensurable in length with the rational straight line set out, let the apotome be called a *fourth apotome*;

05 / 若附加直线与给定的有理直线长度可公度，则称此余线为第五余线；

if the annex be so commensurable, a *fifth*;

06 / 若整条直线和附加直线都不与给定的有理直线长度可公度，则称此余线为第六余线。

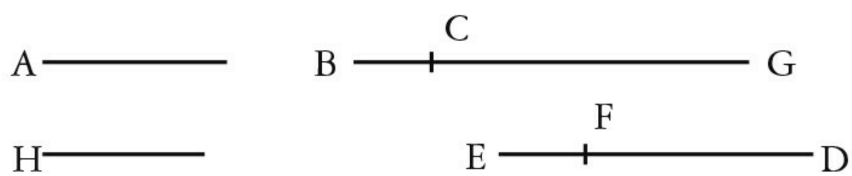
and, if neither, a *sixth*.

命题 **Proposition**

命题**85**

求第一余线。

To find the first apotome.



给定有理直线A，

且设BG与A长度可公度；

因此，BG也是有理的。

给定两个平方数DE、EF，且设它们之差FD不是平方数；

因此，ED比DF也不如同一个平方数比一个平方数。

设法使ED比DF如同BG上的正方形比GC上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，BG上的正方形与GC上的正方形可公度。

[X. 6]

但BG上的正方形是有理的；

因此，GC上的正方形也是有理的；

因此，GC也是有理的。

又，由于ED比DF不如同一个平方数比一个平方数，

因此，BG上的正方形比GC上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与GC长度不可公度。

[X. 9]

而两者都是有理的；

因此，BG、GC是仅正方可公度的有理直线；

因此，BC是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第一余线。

这是因为，设H上的正方形是BG上的正方形与GC上的正方形之差。

现在，由于ED比FD如同BG上的正方形比GC上的正方形，

因此，取换比例也有，

[V. 19，推论]

DE比EF如同GB上的正方形比H上的正方形。

但DE比EF如同一个平方数比一个平方数，

这是因为它们每一个都是平方数；

因此，GB上的正方形比H上的正方形也如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与H长度可公度。

[X. 9]

又，BG上的正方形比GC上的正方形大H上的正方形；

因此，BG上的正方形比GC上的正方形大一个与BG长度可公度的直线上的正方形。

而整条直线BG与给定的有理直线A长度可公度。

因此，BC是第一余线。

[X. 定义III. 1]

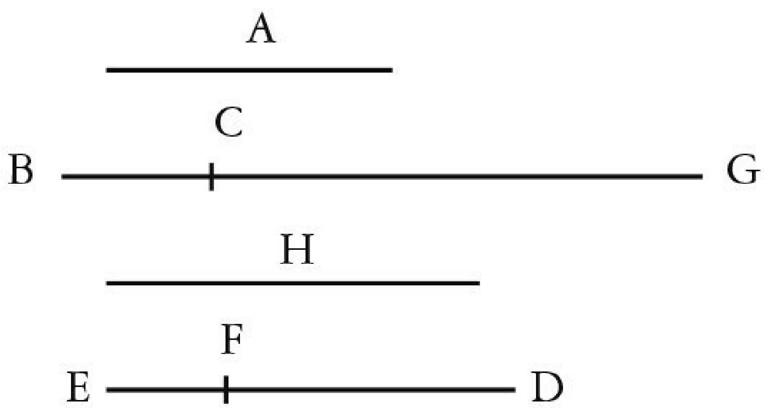
这样便求出了第一余线BC。

这就是所要求的。

命题**86**

求第二余线。

To find the second apotome.



给定有理直线A，且GC与A长度可公度；

因此，GC是有理的。

给定两个平方数DE、EF，且设它们之差DF不是平方数。

现在设法使FD比DE如同CG上的正方形比GB上的正方形。

[X. 6，推论]

因此，CG上的正方形与GB上的正方形可公度。

[X. 6]

但CG上的正方形是有理的；

因此，GB上的正方形也是有理的；

因此，BG是有理的。

又，由于GC上的正方形比GB上的正方形不如同一个平方数比一个平方数，所以

CG与GB长度不可公度。

[X. 9]

而两者都是有理的；

因此，CG、GB是仅正方可公度的有理直线，

因此，BC是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第二余线。

这是因为，设BG上的正方形比GC上的正方形大一个H上的正方形。

于是，由于BG上的正方形比GC上的正方形如同数ED比数DF，

因此，取换比例，

BG上的正方形比H上的正方形如同DE比EF。

[V. 19，推论]

而数DE、EF中的每一个都是平方数；

因此，BG上的正方形比H上的正方形如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与H长度可公度。

[X. 9]

而BG上的正方形比GC上的正方形大一个H上的正方形，

因此，BG上的正方形比GC上的正方形大一个与BG长度可公度的直线上的正方形。

而附加直线CG与给定的有理直线A可公度。

因此，BC是第二余线。

[X. 定义III. 2]

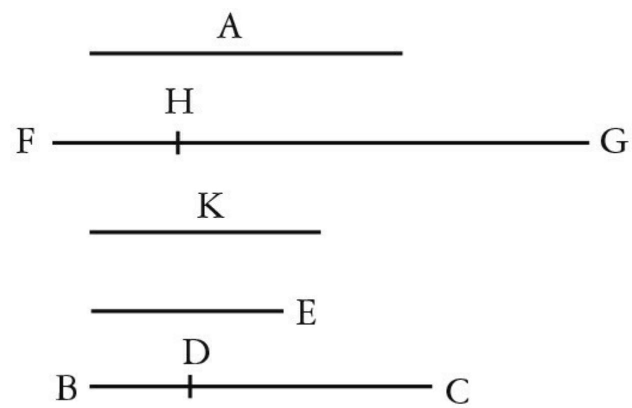
这样便求出了第二余线BC。

这就是所要证明的。

命题**87**

求第三余线。

To find the third apotome.



给定有理直线A，

设三数E、BC、CD彼此之比都不如同一个平方数比一个平方数，但CB比BD如同一个平方数比一个平方数。

设法使E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

且使BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形。

[X. 6，推论]

于是，由于E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

因此，A上的正方形与FG上的正方形可公度。

[X. 6]

但A上的正方形是有理的；

因此，FG上的正方形也是有理的；

因此，FG是有理的。

又，由于E比BC不如同一个平方数比一个平方数，

因此，A上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与FG长度不可公度。

[X. 9]

又，由于BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，FG上的正方形与GH上的正方形可公度。

[X. 6]

但FG上的正方形是有理的；

因此，GH上的正方形也是有理的；

因此，GH是有理的。

又，由于BC比CD不如同一个平方数比一个平方数，

因此，FG上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与GH长度不可公度。

[X. 9]

而两者都是有理的；

因此，FG、GH是仅正方可公度的有理直线；

因此，FH是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第三余线。

这是因为，由于E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

且BC比CD如同FG上的正方形比HG上的正方形，

因此，取首末比例，E比CD如同A上的正方形比HG上的正方形。

[V. 22]

但E比CD不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与GH长度不可公度。

[X. 9]

因此，直线FG、GH都不与给定的有理直线A长度可公度。

现在，设FG上的正方形比GH上的正方形大一个K上的正方形。

于是，由于BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，取换比例，BC比BD如同FG上的正方形比K上的正方形。

[V. 19，推论]

但BC比BD如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG上的正方形比K上的正方形也如同一个平方数比一个平方数。

因此，FG与K长度可公度，

[X. 9]

且FG上的正方形比GH上的正方形大一个与FG可公度的直线上的正方形。

而FG、GH都不与给定的有理直线A长度可公度；

因此，FH是第三余线。

[X. 定义III. 3]

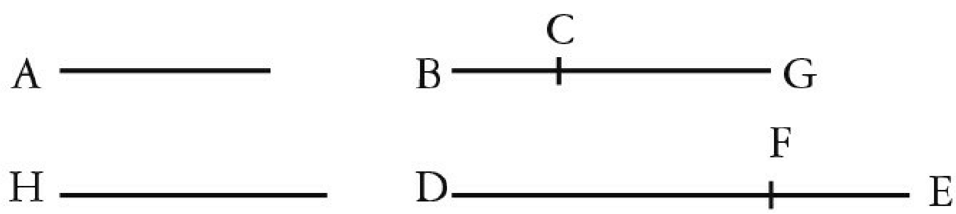
这样便求出了第三余线FH。

这就是所要证明的。

命题**88**

求第四余线。

To find the fourth apotome.



给定有理直线A，且设BG与它长度可公度；

因此，BG也是有理的。

给定两数DF、FE，使整个DE比数DF、EF中的每一个都不如同一个平方数比一个平方数。

设法使DE比EF如同BG上的正方形比GC上的正方形；

[X. 6，推论]

因此，BG上的正方形与GC上的正方形可公度。

[X. 6]

但BG上的正方形是有理的；

因此，GC上的正方形也是有理的；

因此，GC是有理的。

现在，由于DE比EF不如同一个平方数比一个平方数，

因此，BG上的正方形比GC上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与GC长度不可公度。

[X. 9]

而两者都是有理的；

因此，BG、GC是仅正方可公度的有理直线；

因此，BC是余线。

[X. 73]

现在，设BG上的正方形比GC上的正方形超出一个H上的正方形。

于是，由于DE比EF如同BG上的正方形比GC上的正方形，

因此，取换比例也有，

ED比DF如同GB上的正方形比H上的正方形。

[V. 19. 推论]

但ED比DF不如同一个平方数比一个平方数；

因此，GB上的正方形比H上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与H长度不可公度。

[X. 9]

而BG上的正方形比GC上的正方形大一个H上的正方形，

因此，BG上的正方形比GC上的正方形大一个与BG不可公度的直线上的正方形。

而整个BG与给定的有理直线A长度可公度。

因此，BC是第四余线。

[X. 定义III. 4]

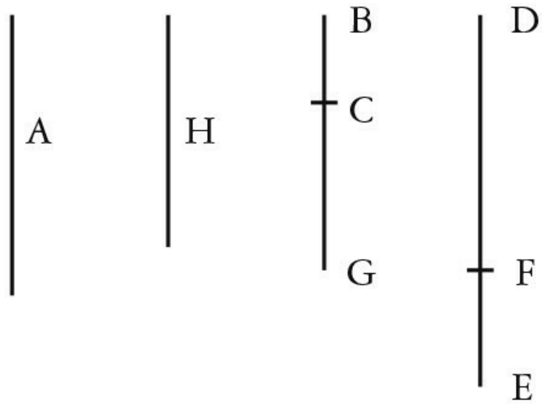
这样便求出了第四余线BC。

这就是所要证明的。

命题**89**

求第五余线。

To find the fifth apotome.



给定有理直线A，且设CG与A长度可公度；

因此，CG是有理的。

给定两数DF、FE，且使DE比直线DF、FE中的每一个都不如同一个平方数比一个平方数；

设法使FE比ED如同CG上的正方形比GB上的正方形。

因此，GB上的正方形也是有理的；

因此，BG也是有理的。

[X. 6]

现在，由于DE比EF如同BG上的正方形比GC上的正方形，

而DE比EF不如同一个平方数比一个平方数，

因此，BG上的正方形比GC上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与GC长度不可公度。

[X. 9]

而两者都是有理的；

因此，BG、GC是仅正方可公度的有理直线；

因此，BC是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第五余线。

这是因为，设BG上的正方形比GC上的正方形大一个H上的正方形。

于是，由于BG上的正方形比GC上的正方形如同DE比EF，

因此，取换比例，

ED比DF如同BG上的正方形比H上的正方形。

[V. 19，推论]

但ED比DF不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG上的正方形比H上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BG与H长度不可公度。

[X. 9]

而BG上的正方形比GC上的正方形大一个H上的正方形，

因此，GB上的正方形比GC上的正方形大一个与GB长度不可公度的直线上的正方形。

而附加直线CG与给定的有理直线A长度可公度；

因此，BC是第五余线。

[X. 定义III. 5]

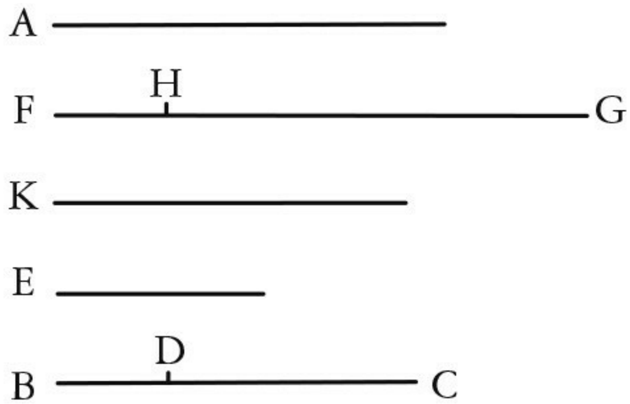
这样便求出了第五余线BC。

这就是所要证明的。

命题**90**

求第六余线。

To find the sixth apotome.



给定有理直线A，设三数E、BC、CD彼此之比都不如同一个平方数比一个平方数；

且设CB比BD也不如同一个平方数比一个平方数。

设法使E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

且BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形。

[X. 6，推论]

现在，由于E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

因此，A上的正方形与FG上的正方形 可公度。

[X. 6]

但A上的正方形是有理的；

因此，FG上的正方形也是有理的；

因此，FG也是有理的。

又，由于E比BC不如同一个平方数比一个平方数，

因此，A上的正方形比FG上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与FG长度不可公度。

[X. 9]

又，由于BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，FG上的正方形与GH上的正方 形可公度。

[X. 6]

但FG上的正方形是有理的；

因此，GH上的正方形也是有理的；

因此，GH也是有理的。

又，由于BC比CD不如同一个平方数比一个平方数，

因此，FG上的正方形比GH上的正方形不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与GH长度不可公度。

[X. 6]

而两者都是有理的。

因此，FG、GH是仅正方可公度的有理直线；

因此，FH是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第六余线。

这是因为，E比BC如同A上的正方形比FG上的正方形，

且BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，取首末比例，

E比CD如同A上的正方形比GH上的 正方形。

[V. 22]

但E比CD不如同一个平方数比一个平方数，

因此，A上的正方形比GH上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，A与GH长度不可公度；

[X. 9]

因此，直线FG、GH中的每一个都不与有理直线A长度可公度。

现在，设FG上的正方形比GH上的正方形超出一个K上的正方形。

于是，由于BC比CD如同FG上的正方形比GH上的正方形，

因此，取换比例，

CB比BD如同FG上的正方形比K上 的正方形。

[V. 19，推论]

但CB比BD不如同一个平方数比一个平方数，

因此，FG上的正方形比K上的正方形也不如同一个平方数比一个平方数；

因此，FG与K长度不可公度。

[X. 9]

而FG上的正方形比GH上的正方形大一个K上的正方形；

因此，FG上的正方形比GH上的正方形大一个与FG长度不可公度的

直线上的正方形。

而直线FG、GH中的每一个都与给定的有理直线A不可公度。

因此，FH是第六余线。

[X. 定义III. 6]

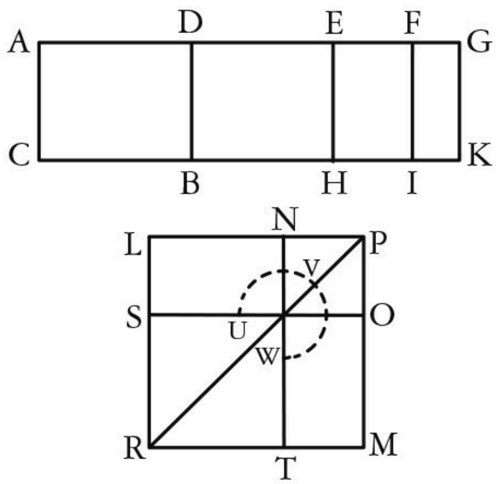
这样便求出了第六余线FH。

这就是所要证明的。

命题**91**

若一个面由有理直线和第一余线所围成，则该面的“边”是余线。

If an area be contained by a rational straight line and a first apotome, the “side” of the area is an apotome.



设面AB由有理直线AC和第一余线AD所围成；

我说，面AB的“边”是余线。

这是因为，由于AD是第一余线，设DG是它的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线。

[X. 73]

而整条直线AG与给定的有理直线AC可公度，且AG上的正方形比GD上的正方形大一个与AG长度可公度的直线上的正方形；

[X. 定义III. 1]

因此，如果对AG贴合出一个等于DG上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则它被分成可公度的两段。

[X. 17]

设DG在E被二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，

设它是矩形AF、FG；

因此，AF与FG可公度。

又过点E、F、G作EH、FI、GK平行于AC。

现在，由于AF与FG长度可公度，

因此，AG与直线AF、FG中的每一个长度也可公度。

[X. 15]

但AG与AC可公度；

因此，直线AF、FG中的每一条都与 AC长度可公度。

[X. 12]

而AC是有理的；

因此，直线AF、FG中的每一条也是有理的，

因此，矩形AI、FK中的每一个也是有理的。

[X. 19]

现在，由于DE与EG长度可公度，

因此，DG与直线DE、EG中的每一条也长度可公度。

[X. 15]

但DG是有理的，且与AC长度不可公度；

因此，直线DE、EG中的每一条也是有理的，且与AC长度不可公度；

[X. 13]

因此，矩形DH、EK中的每一个都是中 项面。

[X. 21]

现在，作正方形LM等于AI，并从中减去与它有共同角LPM且等于FK的正方形NO；

因此，正方形LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

于是，由于AF、FG所围成的矩形等于EG上的正方形，

因此，AF比EG如同EG比FG。

[VI. 17]

但AF比EG如同AI比EK，

且EG比FG如同EK比KF；

[VI. 1]

因此，EK是AI、KF的比例中项。

[V. 11]

但前已证明，MN也是LM、NO的比例中项，

[X. 53后的引理]

且AI等于正方形LM，KF等于NO；

因此，MN也等于EK。

但EK等于DH，且MN等于LO；

因此，DK等于拐尺形UVW与NO之和。

但AK也等于正方形LM、NO之和；

因此，余量AB等于ST。

但ST等于LN上的正方形；

因此，LN上的正方形等于AB；

因此，LN是AB的“边”。

其次我说，LN是余线。

这是因为，由于矩形AI、FK中的每一个都是有理的，

且它们分别等于LM、NO，

因此，正方形LM、NO中的每一个，即分别是LP、PN上的正方形，也是有理的；

因此，直线LP、PN中的每一条也是有理的。

又，由于DH是中项面，且等于LO，

因此，LO也是中项面。

于是，由于LO是中项面，

而NO是有理的，

因此，LO与NO不可公度，

但LO比NO如同LP比PN；

[VI. 1]

因此，LP与PN长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，LP、PN是仅正方可公度的有理直线；

因此，LN是余线。

[X. 73]

而它是面AB的“边”；

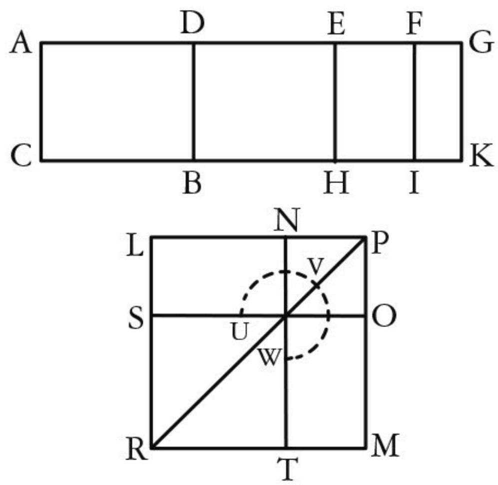
因此，面AB的“边”是余线。

这就是所要证明的。

命题**92**

若一个面由有理直线和第二余线所围成，则该面的“边”是中项线的第一余线。

If an area be contained by a rational straight line and a second apotome, the “side” of the area is a first apotome of a medial straight line.



设面AB是有理直线AC和第二余线AD所围成的矩形。

我说，面AB的“边”是中项线的第一余线。

这是因为，设DG是AD上的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线，

[X. 73]

且附加直线DG与给定的有理直线AC可公度，

而整条直线AG上的正方形比附加直线GD上的正方形大一个与AG长度可公度的直线上的正方形。

[X. 定义III. 2]

于是，由于AG上的正方形比GD上的正方形大一个与AG可公度的

直线上的正方形，

因此，如果对AG贴合出一个等于GD上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则它把AG分成可公度的两段。

[X. 17]

设DG在E被二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，

设它是矩形AF、FG;

因此，AF与FG长度可公度，

因此，AG与直线AF、FG中的每一条也长度可公度。

[X. 15]

但AG是有理的，且与AC长度不可公度；

因此，直线AF、FG中的每一条也是有理的，且与AC长度不可公度；

[X. 13]

因此，矩形AI、FK中的每一个都是中项面。

[X. 21]

又，由于DE与EG可公度，

因此，DG与直线DE、EG中的每一条也可公度。

[X. 15]

但DG与AC长度可公度。

因此，矩形DH、EK中的每一个都是有理的。

[X. 19]

于是，作正方形LM等于AI，

再减去等于FK且与LM有同一个角LPM的正方形NO；

因此，正方形LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

于是，由于AI、FK都是中项面，且分别等于LP、PN上的正方形，所以

LP、PN上的正方形也都是中项面；

因此，LP、PN也是仅正方可公度的中项线。

又，由于矩形AF、FG等于EG上的正方形，

因此，AF比EG如同EG比FG，

[VI. 17]

而AF比EG如同AI比EK，

且EG比FG如同EK比FK；

[VI. 1]

因此，EK是AI、FK的比例中项。

[V. 11]

但MN也是正方形LM、NO的比例中项，

且AI等于LM，FK等于NO；

因此，MN也等于EK。

但DH等于EK，

且LO等于MN；

因此，整个DK等于拐尺形UVW与NO之和。

于是，由于整个AK等于LM、NO之和，

且DK等于拐尺形UVW与NO之和，

因此，余量AB等于TS。

但TS是LN上的正方形；

因此，LN上的正方形等于面AB；

因此，LN等于面AB的“边”。

我说，LN是中项线的第一余线。

这是因为，由于EK是有理的，且等于LO，

因此，LO，即矩形LP、PN，是有理的。

但已证明，NO是中项面；

因此，LO与NO不可公度。

但LO比NO如同LP比PN；

[VI. 1]

因此，LP、PN长度不可公度。

[X. 11]

因此，LP、PN是仅正方可公度的中项线，且围成一个有理矩形；

因此，LN是中项线的第一余线。

[X. 74]

而它是面AB的“边”。

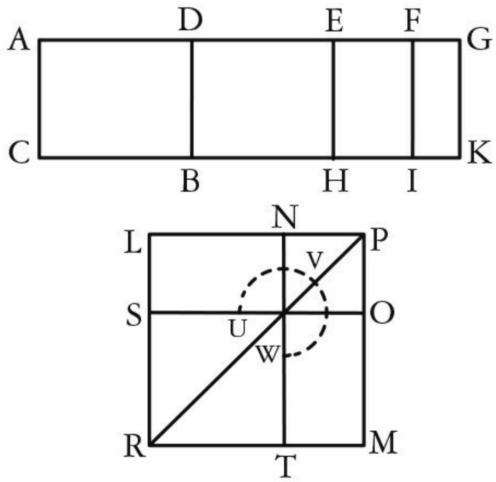
因此，面AB的“边”是中项线的第一余线。

这就是所要证明的。

命题**93**

若一个面由有理直线和第三余线所围成，则该面的**“**边**”**是中项线的第二余线。

If an area be contained by a rational straight line and a third apotome, the “side” of the area is a second apotome of a medial straight line.



设面AB由有理直线AC和第三余线AD所围成；

我说，面AB的“边”是中项线的第二余线。

这是因为，设DG是AD上的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线，

且直线AG、GD中的每一条都不与给定的有理直线AC长度可公度，

而整条直线AG上的正方形比附加直线DG上的正方形大一个与AG可公度的直线上的正方形。

[X. 定义III. 3]

于是AG上的正方形比GD上的正方形大一个与AG可公度的直线上

的正方形，

因此，如果对AG贴合出一个等于DG上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则它把AG分成可公度的两段。

[X. 17]

于是，设DG在E被二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，

设它是矩形AF、FG。

过点E、F、G作EH、FI、GK平行于AC。

因此，AF、FG可公度，

因此，AI与FK也可公度。

[VI. 1，X. 11]

由于AF、FG长度可公度，

因此，AG与直线AF、FG中的每一条也长度可公度。

[X. 15]

但AG是有理的，且与AC长度不可公度；

因此，AF、FG也都是有理的，且与AC长度不可公度。

[X. 13]

因此，矩形AI、FK中的每一个都是中项面。

[X. 21]

又，由于DE与EG长度可公度，

因此，DG与直线DE、EG中的每一条也长度可公度。

[X. 15]

但GD是有理的，且与AC长度不可公度；

因此，直线DE、EG中的每一条也是有理的，且与AC长度不可公度；

[X. 13]

因此，矩形DH、EK中的每一个都是中项面。

[X. 21]

又，由于AG、GD仅正方可公度，

因此，AG与GD长度不可公度。

但AG与AF长度可公度，且DG与EG长度可公度；

因此，AF与EG长度不可公度。

[X. 13]

但AF比EG如同AI比EK；

[VI. 1]

因此，AI与EK不可公度。

[X. 11]

现在，作正方形LM等于AI，

从中减去等于FK且与LM有相同角的NO；

因此，LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

现在，由于矩形AF、FG等于EG上的正方形，

因此，AF比EG如同EG比FG。

[VI. 17]

但AF比EG如同AI比EK，

且EG比FG如同EK比FK；

[VI. 1]

因此也有，AI比EK如同EK比FK；

[V. 11]

因此，EK是AI、FK的比例中项。

但MN也是正方形LM、NO的比例中项，

且AI等于LM，FK等于NO；

因此，EK也等于MN。

但MN等于LO，

且EK等于DH；

因此，整个DK也等于拐尺形UVW与NO之和。

但AK也等于LM、NO之和；

因此，余量AB等于ST，即等于LN上的正方形；

因此，LN是面AB的“边”。

我说，LN是中项线的第二余线。

这是因为，由于已经证明AI、FK是中项面，且分别等于LP、PN上的正方形，

因此，正方形LP、PN中的每一个也都是中项面；

因此，直线LP、PN中的每一条都是中项线。

又，由于AI与FK可公度，

[VI. 1，X. 11]

因此，LP上的正方形与PN上的正方形也可公度。

又，由于已经证明AI与EK不可公度，

因此，LM与MN也不可公度，

即LP上的正方形与矩形LP、PN不可公度；

因此，LP与PN也长度不可公度；

[VI. 1，X. 11]

因此，LP、PN是仅正方可公度的中项线。

其次我说，它们也围成一个中项矩形。

这是因为，已经证明EK是中项面，且等于矩形LP、PN，

因此，矩形LP、PN也是中项面，

因此，LP、PN是围成一个中项矩形的仅正方可公度的中项线。

因此，LN是中项线的第二余线；

[X. 75]

且它是面AB的“边”。

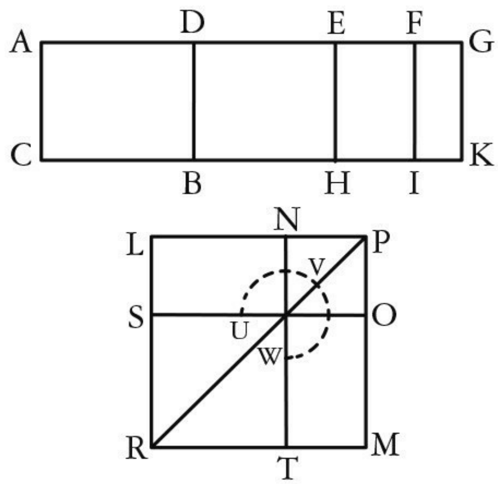
因此，面AB的“边”是中项线的第二余线。

这就是所要证明的。

命题**94**

若一个面由有理直线和第四余线所围成，则该面的“边”是次线。

If an area be contained by a rational straight line and a fourth apotome, the “side” of the area is minor.



设面AB由有理直线AC和第四余线AD所围成；

我说，面AB的“边”是次线。

这是因为，设DG是AD上的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线，

AG与给定的有理直线AC长度可公度，

且整条直线AG上的正方形比附加直线DG上的正方形大一个与AG长度不可公度的直线上的正方形，

[X. 定义III. 4]

于是，由于AG上的正方形比GD上的正方形大一个与AG长度不可公度的直线上的正方形，

因此，如果对AG贴合出一个等于DG上的正方形的四分之一且亏缺

一个正方形的平行四边形，则它把AG分成不可公度的两段。

[X. 18]

于是，设DG被E二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，

且设它是矩形AF、FG；

因此，AF与FG长度不可公度。

过E、F、G作EH、FI、GK平行于AC、BD。

于是，由于AG是有理的，且与AC长度可公度，

因此，整个AK是有理的。

[X. 19]

又，由于DG与AC长度不可公度，且两者都是有理的，

因此，DK是中项面。

[X. 21]

又，由于AF与FG长度不可公度，

因此，AI与FK也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

现在，作正方形LM等于AI，

从中减去等于FK且与LM有相同的角LPM的正方形NO。

因此，LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

于是，由于矩形AF、FG等于EG上的正方形，

因此，按照比例，AF比EG如同EG比FG。

[VI. 17]

但AF比EG如同AI比EK，

且EG比FG如同EK比FK；

[VI. 1]

因此，EK是AI、FK的比例中项。

[V. 11]

但MN也是正方形LM、NO的比例中项，

且AI等于LM，FK等于NO；

因此，EK也等于MN。

但DH等于EK，LO等于MN；

因此，整个DK等于拐尺形UVW与NO之和。

于是，由于整个AK等于正方形LM、NO之和，

且DK等于拐尺形UVW与正方形NO之和；

因此，余量AB等于ST，即等于LN上的正方形；

因此，LN是面AB的“边”。

我说，LN是被称为次线的无理直线。

这是因为，由于AK是有理的，且等于LP、PN上的正方形之和，

因此，LP、PN上的正方形之和是有理的。

又，由于DK是中项面，

且DK等于二倍的矩形LP、PN，

因此，二倍的矩形LP、PN是中项面。

由于已经证明，AI与FK不可公度，

因此，LP上的正方形与PN上的正方形也不可公度。

因此，LP、PN是正方不可公度的直线，且它们上的正方形之和是有理的，但它们所围成矩形的二倍是中项面。

因此，LN是被称为次线的无理直线；

[X. 76]

且它是面AB的“边”。

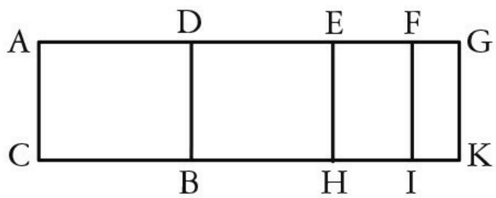
因此，面AB的“边”是次线。

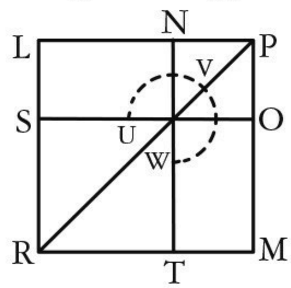
这就是所要证明的。

命题**95**

若一个面由有理直线和第五余线所围成，则该面的“边”是中项面与有理面之差的边。

If an area be contained by a rational straight line and a fifth apotome, the “side” of the area is a straight line which produces with a rational area a medial whole.





设面AB由有理直线AC和第五余线AD所围成；

我说，面AB的“边”是中项面与有理面之差的边。

这是因为，设DG是AD上的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线，

附加直线GD与给定的有理直线AC长度可公度，

且整条直线AG上的正方形比附加直线DG上的正方形大一个与AG不可公度的直线上的正方形。

[X. 定义III. 5]

因此，如果对AG贴合出一个等于DG上的正方形的四分之一且亏缺

一个正方形的平行四边形，则它把AG分成不可公度的两段。

[X. 18]

于是，设DG在E被二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，设它是矩形AF、FG；

因此，AF与FG长度不可公度。

现在，由于AG与CA长度不可公度，且两者都是有理的，

因此，AK是中项面。

[X. 21]

又，由于DG是有理的，且与AC长度可公度，所以

DK是有理的。

[X. 19]

现在，作正方形LM等于AI，且减去等于FK且有相同角LPM的正方形NO；

因此，正方形LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

于是类似地，可以证明，LN是面AB的“边”。

我说，LN是中项面与有理面之差的边。

这是因为，由于已经证明，AK是中项面且等于LP、PN上的正方形之和，

因此，LP、PN上的正方形之和是中项面。

又，由于DK是有理的且等于二倍的矩形LP、PN，所以

后者也是有理的。

又，由于AI与FK不可公度，

因此，LP上的正方形与PN上的正方形也不可公度；

因此，LP、PN是正方不可公度的直线，且它们上的正方形之和是中项面，但它们所围成矩形的二倍是有理的。

因此，余量LN是被称为中项面与有理面之差的边的无理直线；

[X. 77]

且它是面AB的“边”。

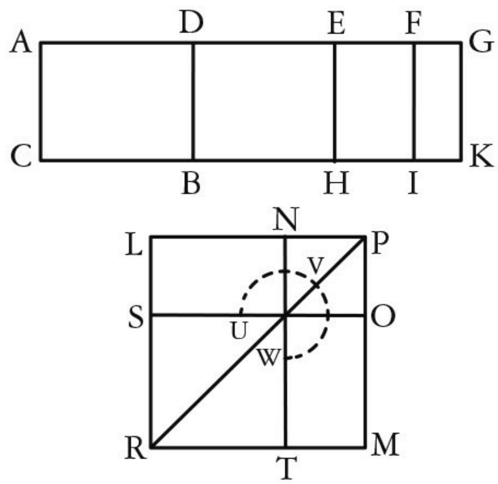
因此，面AB的“边”是中项面与有理面之差的边。

这就是所要证明的。

命题**96**

若一个面由有理直线和第六余线所围成，则该面的**“**边**”**是中项面与中项面之差的边。

If an area be contained by a rational straight line and a sixth apotome, the “side” of the area is a straight line which produces with a medial area a medial whole.



设面AB由有理直线AC和第六余线AD所围成；

我说，面AB的“边”是中项面与中项面之差的边。

这是因为，设DG是AD上的附加直线；

因此，AG、GD是仅正方可公度的有理直线，

它们中的每一条都不与给定的有理直线AC长度可公度，

且整条直线AG上的正方形比附加直线DG上的正方形大一个与AG长度不可公度的直线上的正方形。

[X. 定义III. 6]

于是，由于AG上的正方形比GD上的正方形大一个与AG长度不可

公度的直线上的正方形，

因此，如果对AG贴合出一个等于DG上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，则它把AG分成不可公度的两段。

[X. 18]

于是，设DG在E被二等分，

对AG贴合出一个等于EG上的正方形且亏缺一个正方形的平行四边形，

且设它是矩形AF、FG；

因此，AF与FG长度不可公度。

但AF比FG如同AI比FK；

[VI. 1]

因此，AI与FK不可公度。

[X. 11]

又，由于AG、AC是仅正方可公度的有理直线，所以

AK是中项面。

[X. 21]

又，由于AC、DG是长度不可公度的有理直线，

因此，DK也是中项面。

[X. 21]

现在，由于AG、GD仅正方可公度，

因此，AG与GD长度不可公度。

但AG比GD如同AK比KD；

[VI. 1]

因此，AK与KD不可公度。

[X. 11]

现在，作正方形LM等于AI，

且减去等于FK且有相同角的正方形NO；

因此，LM、NO有相同的对角线。

[VI. 26]

设PR是它们的对角线，并作图。

于是，按照和前面类似的方法可以证明，LN是面AB的“边”。

我说，LN是中项面与中项面之差的边。

这是因为，由于已经证明，AK是中项面且等于LP、PN上的正方形之和，

因此，LP、PN上的正方形之和是中项面。

又，由于已经证明，DK是中项面且等于二倍的矩形LP、PN，

因此，二倍的矩形LP、PN也是中项面。

又，由于已证明AK与DK不可公度，LP、PN上的正方形之和与二倍的矩形LP、PN也不可公度。

又，由于AI与FK不可公度，

因此，LP上的正方形与PN上的正方形也不可公度；

因此，LP、PN是正方不可公度的直线，且它们上的正方形之和是中项面，它们所围成矩形的二倍是中项面，且它们上的正方形之和与它们所围成矩形的二倍不可公度。

因此，LN是被称为中项面与中项面之差的边的无理直线；

[X. 78]

且它是面AB的“边”。

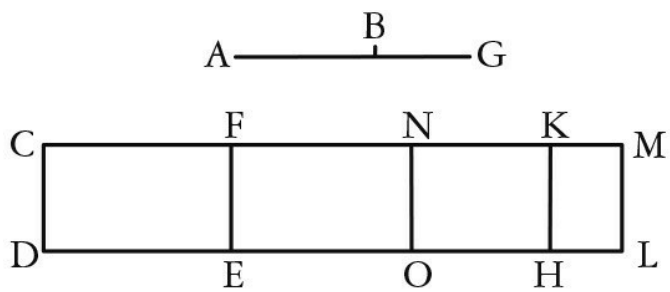
因此，面AB的“边”是中项面与中项面之差的边。

这就是所要证明的。

命题**97**

对一有理直线贴合出一个矩形等于一条余线上的正方形，则产生的宽是第一余线。

The square on an apotome applied to a rational straight line produces as breadth a first apotome.



设AB是余线，CD是有理直线，

对CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF；

我说，CF是第一余线。

这是因为，设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是仅正方可公度的有理直线。

[X. 73]

对CD贴合出CH等于AG上的正方形，又作KL等于BG上的正方形。

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和，且CE等于AB上的正方形；

因此，余下的FL等于二倍的矩形AG、GB。

[II. 7]

设FM在点N被二等分，

且过N作NO平行于CD；

因此，矩形FO、LN中的每一个都等于矩形AG、GB。

现在，由于AG、GB上的正方形是有理的，

且DM等于AG、GB上的正方形之和，

因此，DM是有理的。

而DM是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM；

因此，CM是有理的，且与CD长度可 公度。

[X. 20]

又，由于二倍的矩形AG、GB是中项面，且FL等于二倍的矩形AG、GB，

因此，FL是中项面。

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的FM；

因此，FM是有理的，且与CD长度不 可公度。

[X. 22]

又，由于AG、GB上的正方形是有理的，

而二倍的矩形AG、GB是中项面，

因此，AG、GB上的正方形之和与二倍的矩形AG、GB不可公度。

而CL等于AG、GB上的正方形之和，

且FL等于二倍的矩形AG、GB，

因此，DM与FL不可公度。

但DM比FL如同CM比FM；

[VI. 1]

因此，CM与FM长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线；

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，CF也是第一余线。

这是因为，由于矩形AG、GB是AG、GB上的正方形的比例中项，

且CH等于AG上的正方形，

KL等于BG上的正方形，

且NL等于矩形AG、GB，

因此，NL也是CH、KL的比例中项；

因此，CH比NL如同NL比KL。

但CH比NL如同CK比NM，

且NL比KL如同NM比KM；

[VI. 1]

因此，矩形CK、KM等于NM上的正方形[VI. 17]，即等于FM上的正方形的四分之一。

又，由于AG上的正方形与GB上的正方形可公度，所以

CH与KL也可公度。

但CH比KL如同CK比KM；

[VI. 1]

因此，CK与KM可公度。

[X. 11]

于是，由于CM、MF是两条不等的直线，

且对CM贴合出等于FM上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的矩形CK、KM，

而CK与KM可公度，

因此，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM长度可公度的直线上的正方形。

[X. 17]

而CM与给定的有理直线CD长度可公度，

因此，CF是第一余线。

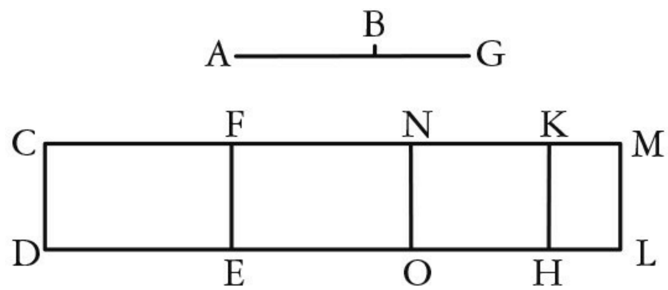
[X. 定义III. 1]

这就是所要证明的。

命题**98**

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线的第一余线上的正方形，则产生的宽是第二余线。

The square on a first apotome of a medial straight line applied to a rational straight line produces as breadth a second apotome.



设AB是中项线的第一余线，CD是有理直线，

对CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF；

我说，CF是第二余线。

这是因为，设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是围成一个有理矩形的仅正方可公度的中项线。

[X. 74]

对CD贴合出CH等于AG上的正方形，产生作为宽的CK，以及贴合出KL等于GB上的正方形，产生作为宽的KM；

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和；

因此，CL也是中项面。

[X. 15和23，推论]

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM；

因此，CM是有理的，且与CD长度不 可公度。

[X. 22]

现在，由于CL等于AG、GB上的正方形之和，

且AB上的正方形等于CE，

因此，余下的二倍的矩形AG、GB等于FL。

[II. 7]

但二倍的矩形AG、GB是有理的；

因此，FL是有理的。

而它是对有理直线FE贴合出的，产生作为宽的FM；

因此，FM也是有理的，且与CD长度 可公度。

[X. 20]

现在，由于AG、GB上的正方形之和，即CL，是中项面，而二倍的矩形AG、GB，即FL，是有理的，

因此，CL与FL不可公度。

但CL比FL如同CM比FM；

[VI. 1]

因此，CM与FM长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线；

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，CF也是第二余线。

这是因为，设FM在N被二等分，

且过N作NO平行于CD；

因此，矩形FO、NL中的每一个都等于矩形AG、GB。

现在，由于矩形AG、GB是AG、GB上的正方形的比例中项，

且AG上的正方形等于CH，

矩形AG、GB等于NL，

以及BG上的正方形等于KL，

因此，NL也是CH、KL的比例中项；

因此，CH比NL如同NL比KL。

但CH比NL如同CK比NM，

且NL比KL如同NM比MK；

[VI. 1]

因此，CK比NM如同NM比KM；

[V. 11]

因此，矩形CK、KM等于NM上的正方形[VI. 17]，即等于FM上的正方形的四分之一。

于是，由于CM、FM是两条不等的直线，矩形CK、KM是对较长直线CM贴合出的，等于MF上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形，并把CM分成可公度的两段，

因此，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM长度可公度的直线上的正方形。

[X. 17]

而附加直线FM与给定的有理直线CD长度可公度；

因此，CF是第二余线。

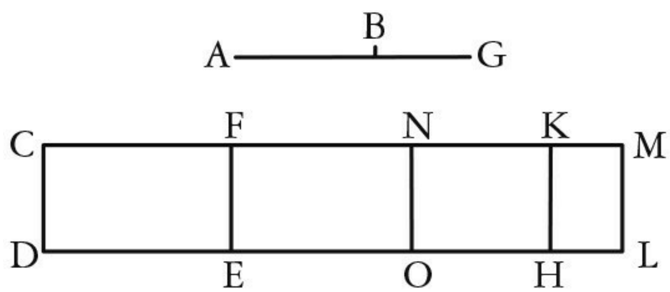
[X. 定义III. 2]

这就是所要证明的。

命题**99**

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线的第二余线上的正方形，则产生的宽是第三余线。

The square on a second apotome of a medial straight line applied to rational straight line produces as breadth a third apotome.



设AB是中项线的第二余线，CD是有理直线，

且对CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF。

我说，CF是第三余线。

设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是围成一个中项矩形的仅正方可公度的中项线。

[X. 75]

设CH是对CD贴合出的且等于AG上的正方形，产生作为宽的CK，

又设KL是对KH贴合出的且等于BG上的正方形，产生作为宽的KM；

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和；

因此，CL也是中项面。

[X. 15和23，推论]

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM；

因此，CM是有理的，且与CD长度不 可公度。

[X. 22]

现在，由于CL等于AG、GB上的正方形之和，

且CE等于AB上的正方形，

因此，余下的LF等于二倍的矩形AG、GB。

[II. 7]

于是，设FM在点N被二等分，

且作NO平行于CD；

因此，矩形FO、NL中的每一个都等于矩形AG、GB。

但矩形AG、GB是中项面；

因此，FL也是中项面。

又，它是对有理直线EF贴合出的，产生作为宽的FM；

因此，FM也是有理的，且与CD长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AG、GB仅正方可公度，

因此，AG与GB长度不可公度；

因此，AG上的正方形与矩形AG、GB 也不可公度。

[VI. 1，X. 11]

但AG、GB上的正方形之和与AG上的正方形可公度，

且二倍的矩形AG、GB与矩形AG、GB可公度；

因此，AG、GB上的正方形之和与二倍的矩形AG、GB不可公度。

[X. 13]

但CL等于AG、GB上的正方形之和，

且FL等于二倍的矩形AG、GB；

因此，CL与FL也不可公度。

但CL比FL如同CM比FM；

[VI. 1]

因此，CM与FM长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线；

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，它也是第三余线。

这是因为，由于AG上的正方形与GB上的正方形可公度，

因此，CH与KL也可公度，

因此，CK与KM也可公度。

[VI. 1，X. 11]

又，由于矩形AG、GB是AG、GB上的正方形的比例中项，

且CH等于AG上的正方形，

KL等于GB上的正方形，

以及NL等于矩形AG、GB；

因此，NL也是CH、KL的比例中项；

因此，CH比NL如同NL比KL。

但CH比NL如同CK比NM，

且NL比KL如同NM比KM；

[VI. 1]

因此，CK比MN如同MN比KM；

[V. 11]

因此，矩形CK、KM等于<MN上的正方形，即等于>FM上的正方形的四分之一。

于是，由于CM、MF是不等的两直线，且对CM贴合出一个等于FM上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，并把CM分成可公度的两段，

因此，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM可公度的直线上的正方形。

[X. 17]

而直线CM、MF都与给定的有理直线CD长度不可公度；

因此，CF是第三余线。

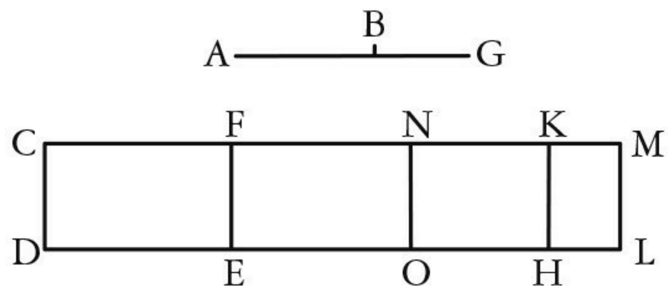
[X. 定义III. 3]

这就是所要证明的。

命题**100**

对一有理直线贴合出一个矩形等于次线上的正方形，则产生的宽是第四余线。

The square on a minor straight line applied to a rational straight line produces as breadth a fourth apotome.



设AB是次线，CD是有理直线，对有理直线CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF；

我说，CF是第四余线。

这是因为，设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是正方不可公度的直线，使AG、GB上的正方形之和是有理的，但二倍的矩形AG、GB是中项面。

[X. 76]

对CD贴合出CH等于AG上的正方形，产生作为宽的CK，

以及贴合出KL等于BG上的正方形，产生作为宽的KM；

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和。

又，AG、GB上的正方形之和是有理的；

因此，CL也是有理的。

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM；

因此，CM也是有理的，且与CD长度可公度。

[X. 20]

又，由于整个CL等于AG、GB上的正方形之和，且CE等于AB上的正方形，

因此，余下的FL等于二倍的矩形AG、GB。

[II. 7]

于是，设FM在点N被二等分，

且过点N作NO平行于直线CD、ML；

因此，矩形FO、NL中的每一个都等于矩形AG、GB。

又，由于二倍的矩形AG、GB是中项面且等于FL，

因此，FL也是中项面。

而它是对有理直线FE贴合出的，产生作为宽的FM；

因此，FM是有理的，且与CD长度不 可公度。

[X. 22]

又，由于AG、GB上的正方形之和是有理的，

而二倍的矩形AG、GB是中项面，

因此，AG、GB上的正方形之和与二倍的矩形AG、GB不可公度。

但CL等于AG、GB上的正方形之和，

而FL等于二倍的矩形AG、BG；

因此，CL与FL不可公度。

但CL比FL如同CM比MF；

[VI. 1]

因此，CM与MF长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的；

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线；

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，CF也是第四余线。

这是因为，由于AG、GB正方不可公度，

因此，AG上的正方形与GB上的正方形也不可公度。

而CH等于AG上的正方形，

且KL等于GB上的正方形；

因此，CH与KL不可公度。

但CH比KL如同CK比KM；

[VI. 1]

因此，CK与KM长度不可公度。

[X. 11]

又，由于矩形AG、GB是AG、GB上的正方形的比例中项，

且AG上的正方形等于CH，

GB上的正方形等于KL，

以及矩形AG、GB等于NL，

因此，NL是CH、KL的比例中项；

因此，CH比NL如同NL比KL。

但CH比NL如同CK比NM，

且NL比KL如同NM比KM；

[VI. 1]

因此，CK比MN如同MN比KM；

[V. 11]

因此，矩形CK、KM等于MN上的正方形[VI. 17]，即等于FM上的正方形的四分之一。

于是，由于CM、MF是不等的两直线，矩形CK、KM是对CM贴合出的，等于MF上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形，且把CM分成不可公度的两段，

因此，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM不可公度的直线上的正方形。

[X. 18]

而整条直线CM与给定的有理直线CD长度可公度；

因此，CF是第四余线。

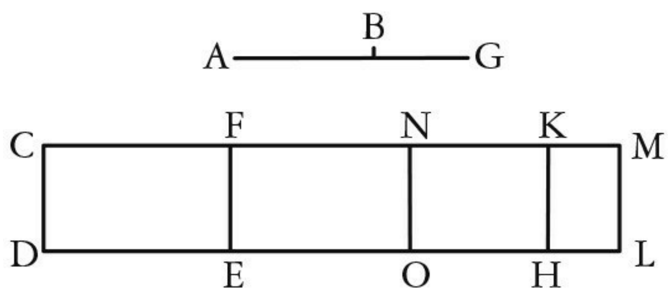
[X. 定义III. 4]

这就是所要证明的。

命题**101**

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项面与有理面之差的边上的正方形，则产生的宽是第五余线。

The square on the straight line which produces with a rational area a medial whole, if applied to a rational straight line, produces as breadth a fifth apotome.



设AB是中项面与有理面之差的边，CD是有理直线，且对CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF；

我说，CF是第五余线。

这是因为，设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是正方不可公度的直线，使它们上的正方形之和是中项面，但二倍的矩形AG、GB是有理面。

[X. 77]

对CD贴合出CH等于AG上的正方形，贴合出KL等于GB上的正方形；

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和。

但AG、GB上的正方形之和是中项面；

因此，CL是中项面。

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM，

因此，CM是有理的，且与CD不可公度。

[X. 22]

由于CL等于AG、GB上的正方形之和，

且CE等于AB上的正方形，

因此，余下的FL等于二倍的矩形AG、GB。

[II. 7]

设FM在N被二等分，

且过点N作NO平行于直线CD或ML，

因此，矩形FO、NL中的每一个等于矩形AG、GB。

又，由于二倍的矩形AG、GB是有理的且等于FL，

因此，FL是有理的。

而对有理直线EF贴合，产生作为宽的FM；

因此，FM是有理的，且与CD长度可公度。

[X. 20]

现在，由于CL是中项面，FL是有理面，

因此，CL与FL不可公度。

但CL比FL如同CM比MF；

[VI. 1]

因此，CM与MF长度不可公度，

[X. 11]

而两者都是有理的，

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线，

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，CF也是第五余线。

这是因为，类似地可以证明，矩形CK、KM等于NM上的正方形，即等于FM上的正方形的四分之一。

又，由于AG上的正方形与GB上的正方形不可公度，

而AG上的正方形等于CH，

且GB上的正方形等于KL，

因此，CH与KL不可公度。

但CH比KL如同CK比KM；

[VI. 1]

因此，CK与KM长度不可公度。

[X. 11]

于是，由于CM、MF是不等的两直线，

且对CM贴合出一个等于FM上的正方形的四分之一且亏缺一个正方形的平行四边形，

并把CM分成不可公度的两段，

因此，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM不可公度的直线上的正方形。

[X. 18]

而附加直线FM与给定的有理直线CD可公度；

因此，CF是第五余线。

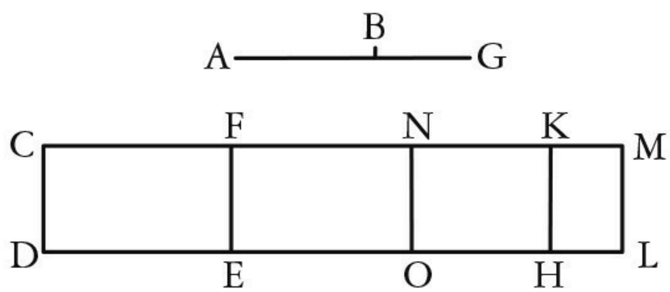
[X. 定义III. 5]

这就是所要证明的。

命题**102**

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项面与中项面之差的边上的正方形，则产生的宽是第六余线。

The square on the straight line which produces with a medial area a medial whole, if applied to a rational straight line, produces as breadth a sixth apotome.



设AB是中项面与中项面之差的边，CD是有理直线，

对CD贴合出CE等于AB上的正方形，产生作为宽的CF；

我说，CF是第六余线。

这是因为，设BG是AB上的附加直线；

因此，AG、GB是正方不可公度的直线，使它们上的正方形之和是中项面，二倍的矩形AG、GB是中项面，且AG、GB上的正方形之和与二倍的矩形AG、GB不可公度。

[X. 78]

现在，对CD贴合出CH等于AG上的正方形，产生作为宽的CK，

且KL等于BG上的正方形；

因此，整个CL等于AG、GB上的正方形之和；

因此，CL也是中项面。

而它是对有理直线CD贴合出的，产生作为宽的CM；

因此，CM是有理的，且与CD长度不 可公度。

[X. 22]

现在，由于CL等于AG、GB上的正方形之和，

而CE等于AB上的正方形，

因此，余下的FL等于二倍的矩形AG、GB。

[II. 7]

而二倍的矩形AG、GB是中项面；

因此，FL也是中项面。

而它是对有理直线FE贴合出的，产生作为宽的FM；

因此，FM是有理的，且与CD长度不可公度。

[X. 22]

又，由于AG、GB上的正方形之和与二倍的矩形AG、GB不可公度，

且CL等于AG、GB上的正方形之和，

FL等于二倍的矩形AG、GB，

因此，CL与FL不可公度。

但CL比FL如同CM比MF；

[VI. 1]

因此，CM与MF长度不可公度。

[X. 11]

而两者都是有理的。

因此，CM、MF是仅正方可公度的有理直线；

因此，CF是余线。

[X. 73]

其次我说，CF也是第六余线。

这是因为，由于FL等于二倍的矩形AG、GB，

设FM在N被二等分，

且过点N作NO平行于CD，

因此，矩形FO、NL中的每一个都等于矩形AG、GB。

又，由于AG、GB正方不可公度，

因此，AG上的正方形与GB上的正方形不可公度。

但CH等于AG上的正方形，

且KL等于GB上的正方形，

因此，CH与KL不可公度。

但CH比KL如同CK比KM；

[VI. 1]

因此，CK与KM不可公度。

[X. 11]

又，由于矩形AG、GB是AG、GB上的正方形的比例中项，

且CH等于AG上的正方形，

KL等于GB上的正方形，

以及NL等于矩形AG、GB，

因此，NL也是CH、KL的比例中项；

因此，CH比NL如同NL比KL。

同理，CM上的正方形比MF上的正方形大一个与CM不可公度的直线上的正方形。

[X. 18]

而它们都不与给定的有理直线CD可公度；

因此，CF是第六余线。

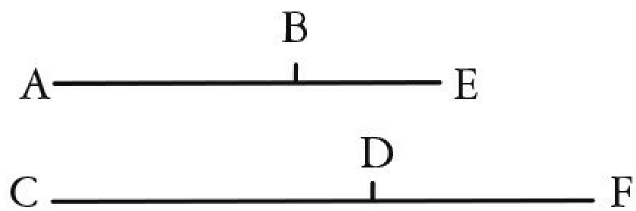
[X. 定义III. 6]

这就是所要证明的。

命题**103**

与余线长度可公度的直线仍是余线，且同级。

A straight line commensurable in length with an apotome is an apotome and the same in order.



设AB是余线，

又设CD与AB长度可公度；

我说，CD也是余线，且与AB同级。

这是因为，AB是余线，设BE是它的附加直线；

因此，AE、EB是仅正方可公度的有理 直线。

[X. 73]

设法使BE比DF如同AB比CD；

[VI. 12]

因此也有，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[V. 12]

因此也有，整个AE比整个CF如同AB比CD。

但AB与CD长度可公度。

因此，AE与CF也可公度，BE与DF也可公度。

[X. 11]

而AE、EB是仅正方可公度的有理直线，

因此，CF、FD也是仅正方可公度的有理直线；

[X. 13]

现在，由于AE比CF如同BE比DF，

因此，取更比例，AE比EB如同CF比FD。

[V. 16]

又，AE上的正方形比EB上的正方形要么大一个与AE可公度的直线上的正方形，要么大一个与AE不可公度的直线上的正方形。

于是，如果AE上的正方形比EB上的正方形大一个与AE可公度的直线上的正方形，则CF上的正方形也比FD上的正方形大一个与CF可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果AE与给定的有理直线长度可公度，则CF也与给定的有理直线长度可公度，

[X. 12]

于是，如果BE与给定的有理直线长度可公度，则DF也与给定的有理直线长度可公度。

[X. 12]

如果直线AE、EB都与给定的有理直线不可公度，则直线CF、FD也都与给定的有理直线不可公度。

[X. 13]

但如果AE上的正方形比EB上的正方形大一个与AE不可公度的直线

上的正方形，

则CF上的正方形也比FD上的正方形大一个与CF不可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果AE与给定的有理直线长度可公度，则CF也与给定的有理直线长度可公度。

如果BE与给定的有理直线长度可公度，则DF也与给定的有理直线长度可公度。

[X. 12]

如果直线AE、EB都不与给定的有理直线长度可公度，则直线CF、FD也都不与给定的有理直线长度可公度。

[X. 13]

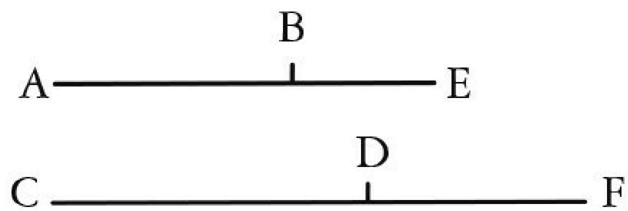
因此，CD是余线，且与AB同级。

这就是所要证明的。

命题**104**

与中项线的余线长度可公度的直线仍是中项线的余线，且同级。

A straight line commensurable in length with an apotome is an apotome and the same in order.



设AB是中项线的余线，

且设CD与AB长度可公度；

我说，CD也是中项线的余线，且与AB同级。

这是因为，由于AB是中项线的余线，设EB是它的附加直线。

因此，AE、EB是仅正方可公度的中项线。

[X. 74，75]

设法使AB比CD如同BE比DF；

[VI. 12]

因此，AE与CF也可公度，BE与DF也可公度。

[V. 12，X. 11]

但AE、EB是仅正方可公度的中项线；

因此，CF、FD也是仅正方可公度的中项线；

[X. 23，13]

因此，CD是中项线的余线。

[X. 74，75]

其次我说，CD也与AB同级。

由于AE比EB如同CF比FD，

因此也有，AE上的正方形比矩形AE、EB如同CF上的正方形比矩形CF、FD。

但AE上的正方形与CF上的正方形可公度；

因此，矩形AE、EB与矩形CF、FD也可公度。

[V. 16，X. 11]

因此，如果矩形AE、EB是有理的，则矩形CF、FD也是有理的，

[X. 定义4]

又，如果矩形AE、EB是中项面，则矩形CF、FD也是中项面。

[X. 23，推论]

因此，CD是中项线的余线，且与AB同级。

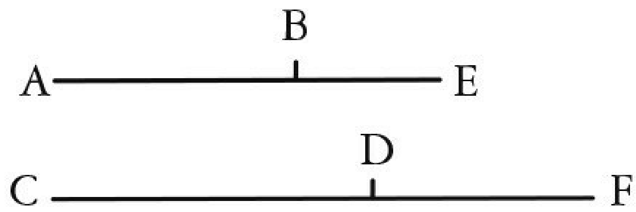
[X. 74，75]

这就是所要证明的。

命题**105**

与次线可公度的直线仍是次线。

A straight line commensurable with a minor straight line is minor.



设AB是次线，且CD与AB可公度；

我说，CD也是次线。

作图如上；

于是，由于AE、EB正方不可公度，

[X. 76]

因此，CF、FD也正方不可公度。

[X. 13]

现在，由于AE比EB如同CF比FD，

[V. 12，V. 16]

因此也有，AE上的正方形比EB上的正方形如同CF上的正方形比FD上的正方形。

[VI. 22]

因此，取合比例，AE、EB上的正方形之和比EB上的正方形如同CF、FD上的正方形之和比FD上的正方形。

[V. 18]

但BE上的正方形与DF上的正方形可公度；

因此，AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和也可公度。

[V. 16，X. 11]

但AE、EB上的正方形之和是有理的；

[X. 76]

因此，CF、FD上的正方形之和也是有 理的。

[X. 定义4]

又，由于AE上的正方形比矩形AE、EB如同CF上的正方形比矩形CF、FD，

而AE上的正方形与CF上的正方形可公度，

因此，矩形AE、EB与矩形CF、FD也可公度。

但矩形AE、EB是中项面；

[X. 76]

因此，矩形CF、FD也是中项面；

[X. 23，推论]

因此，CF、FD是正方不可公度的直线，使其上的正方形之和是有理的，但它们所围成的矩形是中项面。

因此，CD是次线。

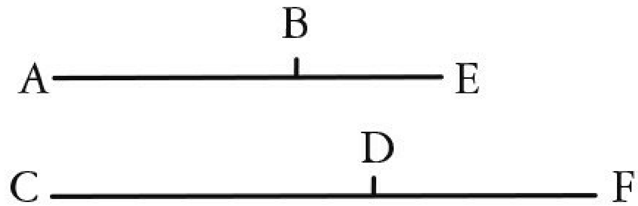
[X. 76]

这就是所要证明的。

命题**106**

与中项面和有理面之差的边可公度的直线仍是中项面与有理面之差的边。

A straight line commensurable with that which produces with a rational area a medial whole is a straight line which produces with a rational area a medial whole.



设AB是中项面与有理面之差的边，

且CD与AB可公度；

我说，CD也是中项面与有理面之差的边。

这是因为，设BE是AB上的附加直线；

因此，AE、EB是正方不可公度的直线，使AE、EB上的正方形之和是中项面，但它们所围成的矩形是有理面。

[X. 77]

作图如前。

于是，用和以前类似的方法可以证明，CF比FD如同AE比EB，

AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和可公度，

且矩形AE、EB与矩形CF、FD可公度；

因此，CF、FD是正方不可公度的直线，使CF、FD上的正方形之和是中项面，但它们所围成的矩形是有理面。

因此，CD是中项面与有理面之差的边。

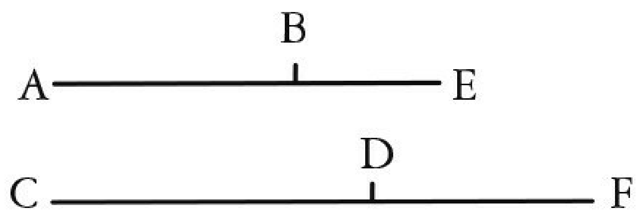
[X. 77]

这就是所要证明的。

命题**107**

与中项面和中项面之差的边可公度的直线仍是中项面与中项面之差的边。

A straight line commensurable with that which produces with a medial area a medial whole is itself also a straight line which produces with a medial area a medial whole.



设AB是中项面与中项面之差的边，

且设CD与AB可公度；

我说，CD也是中项面与中项面之差的边。

设BE是AB上的附加直线，与以前作图相同，

因此，AE、EB正方不可公度，且它们上的正方形之和是中项面，且它们所围成的矩形是中项面，且有它们上的正方形之和与它们围成的矩形不可公度。

[X. 78]

现在如前所证，AE、EB分别与CF、FD可公度，可知AE、EB上的正方形之和与CF、FD上的正方形之和可公度，且矩形AE、EB与矩形CF、FD可公度。

因此，CF、FD也正方不可公度，且它们上的正方形之和是中项面，且它们所围成的矩形是中项面，且更有，它们上的正方形之和与它们所围成的矩形不可公度。

因此，CD是中项面与中项面之差的边。

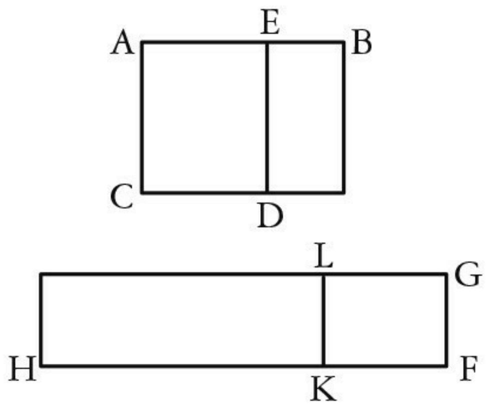
[X. 78]

这就是所要证明的。

命题**108**

若从有理面中减去中项面，则余面的**“**边**”**是两无理直线之一，要么是余线，要么是次线。

If from a rational area a medial area be subtracted, the “side” of the remaining area becomes one of two irrational straight lines, either an apotome or a minor straight line.



设从有理面BC中减去中项面BD；

我说，余面EC的“边”是两无理直线之一，要么是余线，要么是次线。

这是因为，给定有理直线FG，

对FG贴合出矩形GH等于BC，

且作GK等于被减去的DB；

因此，余量EC等于LH。

于是，由于BC是有理面，BD是中项面，

而BC等于GH，且BD等于GK，

因此，GH是有理面，GK是中项面。

而它们是对有理直线FG贴合出的；

因此，FH是有理的，且与FG长度可 公度，

[X. 20]

而FK是有理的，且与FG长度不可公度；

[X. 22]

因此，FH与FK长度不可公度。

[X. 13]

因此，FH、FK是仅正方可公度的有理直线；

因此，KH是余线[X. 73]，且KF是它的附加直线。

现在，HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF要么可公度要么不可公度的直线上的正方形。

首先，设HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF可公度的直线上的正方形。

现在，整个HF与给定的有理直线FG长度可公度；

因此，KH是第一余线。

[X. 定义III. 1]

但有理直线和第一余线所围成矩形的“边”是余线。

[X. 91]

因此，LH的“边”，即EC的“边”，是余线。

但如果HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF不可公度的直线上的正方形，

而整个FH与给定的有理直线FG长度可公度，

则KH是第四余线。

[X. 定义III. 4]

但有理直线和第四余线所围成矩形的“边”是次线。

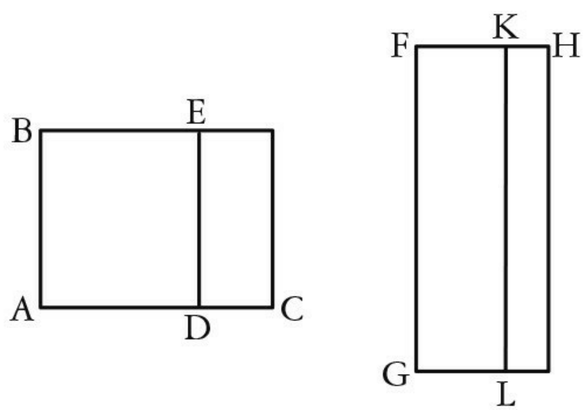
[X. 94]

这就是所要证明的。

命题**109**

若从中项面中减去有理面，则余面的**“**边**”**是两无理直线之一，要么是中项线的第一余线，要么是中项面与有理面之差的边。

If from a medial area a rational area be subtracted, there arise two other irrational straight lines, either a first apotome of a medial straight line or a straight line which produces with a rational area a medial whole.



设从中项面BC中减去有理面BD。

我说，余面EC的“边”是两无理直线之一，要么是中项线的第一余线，要么是中项面与有理面之差的边。

这是因为，给定有理直线FG，

且类似地贴合出各面，

于是可得，FH是有理的，且与FG长度不可公度，

而FK是有理的，且与FG长度可公度；

因此，FH、FK是仅正方可公度的有理 直线；

[X. 13]

因此，KH是余线，且FK是它的附加 直线。

[X. 73]

现在，如果HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF要么可公度要么不可公度的直线上的正方形。

于是，如果HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF可公度的直线上的正方形，

而附加直线FK与给定的有理直线FG长度可公度，

则KH是第二余线。

[X. 定义III. 2]

但FG是有理的；

因此，LH的“边”，即EC的“边”，是中项线的第一余线。

[X. 92]

但如果HF上的正方形比FK上的正方形大一个与HF不可公度的直线上的正方形，

而附加直线FK与给定的有理直线FG长度可公度，

则HK是第五余线；

[X. 定义III. 5]

因此，EC的“边”是中项面与有理面之差的边。

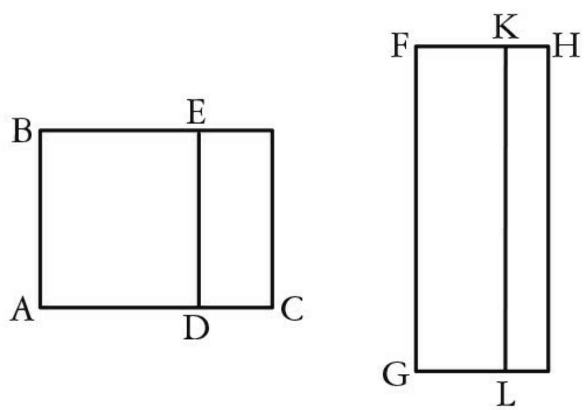
[X. 95]

这就是所要证明的。

命题**110**

若从中项面中减去与整个面不可公度的中项面，则余面的“边”是两无理直线之一，要么是中项线的第二余线，要么是两个中项面之差的边。

If from a medial area there be subtracted a medial area incommensurable with the whole, the two remaining irrational straight lines arise, either a second apotome of a medial straight line or a straight line which produces with a medial area a medial whole.



如前图，设从中项面BC中减去与整个面不可公度的中项面BD；

我说，EC的“边”是两无理直线之一，要么是中项线的第二余线，要么是两个中项面之差的边。

这是因为，由于矩形BC、BD中的每一个都是中项面，

且BC与BD不可公度，

因此，直线FH、FK中的每一个都是有理的，且与FG不可公度。

[X. 22]

又，由于BC与BD不可公度，

即GH与GK不可公度，所以

HF与FK也不可公度；

[VI. 1，X. 11]

因此，FH、FK是仅正方可公度的有理直线；

因此，KH是余线。

[X. 73]

于是，如果FH上的正方形比FK上的正方形大一个与FH可公度的直线上的正方形，

而直线FH、FK中的每一个都与给定的有理直线FG长度不可公度，

则KH是第三余线。

[X. 定义III. 3]

但KL是有理的，

而有理直线和第三余线所围成的矩形是无理的，

且它的“边”是无理的，被称为中项线的第二余线；

[X. 93]

因此，LH的“边”，即EC的“边”，是中项线的第二余线。

但如果FH上的正方形比FK上的正方形大一个与FH不可公度的直线上的正方形，

而直线HF、FK中的每一个都与FG长度不可公度，

则KH是第六余线。

[X. 定义III. 6]

但有理直线和第六余线所围成矩形的“边”是中项面与中项面之差的

边。

[X. 96]

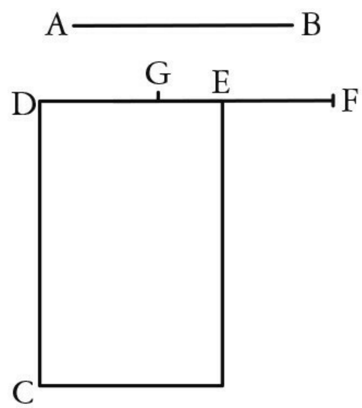
因此，LH的“边”，即EC的“边”，是中项面与中项面之差的边。

这就是所要证明的。

命题**111**

余线与二项线不同。

The apotome is not the same with the binomial straight line.



设AB是余线。

我说，AB与二项线不同。

这是因为，如果可能，设它与二项线相同；

给定有理直线DC，对DC贴合出矩形CE等于AB上的正方形，产生作为宽的DE。

于是，由于AB是余线，所以

DE是第一余线。

[X. 97]

设EF是DE上的附加直线；

因此，DF、FE是仅正方可公度的有理直线，

DF上的正方形比FE上的正方形大一个与DF可公度的直线上的正方形，

且DF与给定的有理直线DC长度可公度。

[X. 定义III. 1]

又，由于AB是二项线，

因此，DE是第一二项线。

[X. 60]

设DE在G被分成它的两段，且DG较大；

因此，DG、GE是仅正方可公度的有理直线，

DG上的正方形比GE上的正方形大一个与DG可公度的直线上的正方形，

且较长的DG与给定的有理直线DC长度可公度。

[X. 定义II. 1]

因此，DF与DG长度可公度；

[X. 12]

因此，余量GF与DF也长度可公度。

[X. 15]

但DF与EF长度不可公度；

因此，FG与EF也长度不可公度。

[X. 13]

因此，GF、FE是仅正方可公度的有理直线；

因此，EG是余线。

[X. 73]

但它也是有理的：

这是不可能的。

因此，余线与二项线不同。

这就是所要证明的。

余线以及它以后的无理直线既不同于中项线，又彼此不同。

The apotome and the irrational straight lines following it are neither the same with the medial straight line nor with one another.

这是因为，如果对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线上的正方形，则产生的作为宽的直线是有理的，且与原有理直线长度不可公度。

[X. 22]

而对一有理直线贴合出一个矩形等于一条余线上的正方形，则产生的宽是第一余线，

[X. 97]

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线的第一余线上的正方形，则产生的宽是第二余线，

[X. 98]

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项线的第二余线上的正方形，则产生的宽是第三余线，

[X. 99]

对一有理直线贴合出一个矩形等于次线上的正方形，则产生的宽是第四余线，

[X. 100]

对一有理直线贴合出一个矩形等于中项面与有理面之差的边上的正方形，则产生的宽是第五余线，

[X. 101]

对一有理直线贴合出一个矩形等于两个中项面之差的边上的正方形，则产生的宽是第六余线。

[X. 102]

于是，由于所说的宽与第一条直线不同，且彼此不同，与第一条直线不同是因为它是有理的，彼此不同是因为它们不同级，

所以显然，这些无理直线本身也彼此不同。

又，由于已经证明，余线与二项线不同，

[X. 111]

但如果对一有理直线贴合出一个矩形等于余线以后的直线上的正方形，则产生的宽依次为相应级的余线；如果对一有理直线贴合出一个矩形等于二项线以后的直线上的正方形，则产生的宽依次为相应级的二项线，

因此，余线以后的无理直线是不同的，二项线以后的无理直线也是不同的，于是总共有十三种无理直线，依次为：

中项线，

二项线，

第一双中项线，

第二双中项线，

主线，

有理中项面的“边”，

两中项面之和的“边”，

余线，

中项线的第一余线，

中项线的第二余线，

次线，

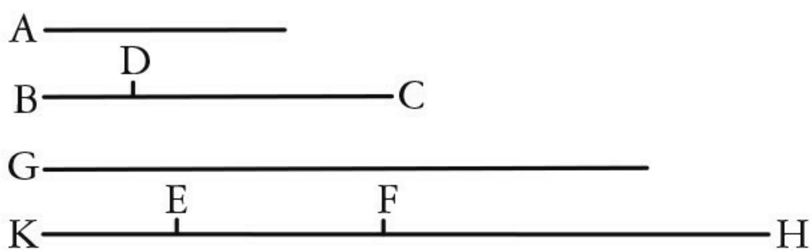
中项面与有理面之差的边，

中项面与中项面之差的边。

命题**112**

对二项线贴合出一个矩形等于一有理直线上的正方形，则产生的宽是余线，该余线的两段与二项线的两段可公度，而且有相同的比；此外，如此产生的余线与二项线同级。

The square on a rational straight line applied to the binomial straight line produces as breadth an apotome the terms of which are commensurable with the terms of the binomial and moreover in the same ratio; and further the apotome so arising will have the same order as the binomial straight line.



设A是有理直线，

设BC是二项线，且设DC是它较大的线段；

设矩形BC、EF等于A上的正方形；

我说，EF是余线，它的两段与CD、DB可公度，而且有相同的比，此外，EF与BC同级。

这是因为，设矩形BD、G等于A上的正方形。

于是，由于矩形BC、EF等于矩形BD、G，

因此，CB比BD如同G比EF。

[VI. 16]

但CB大于BD；

因此，G也大于EF。

[V. 16，V. 14]

设EH等于G；

因此，CB比BD如同HE比EF；

因此，取分比例，CD比BD如同HF 比FE。

[V. 17]

设法使HF比EF如同FK比KE；

因此也有，整个HK比整个KF如同FK比KE；

这是因为，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和。

[V. 12]

但FK比KE如同CD比DB；

[V. 11]

因此也有，HK比KF如同CD比DB。

[V. 11]

但CD上的正方形与DB上的正方形可公度；

[X. 36]

因此，HK上的正方形与KF上的正方形也可公度。

[VI. 22，X. 11]

又，HK上的正方形比KF上的正方形如同HK比KE，这是因为三条直线HK、KF、KE成比例。

[V. 定义9]

因此，HK与KE长度可公度，

因此，HE与EK也长度可公度。

[X. 15]

现在，由于A上的正方形等于矩形EH、BD，

而A上的正方形是有理的，

因此，矩形EH、BD也是有理的。

而它是对有理直线BD贴合出的；

因此，EH是有理的，且与BD长度可公度；

[X. 20]

因此，与EH可公度的EK也是有理的，且与BD长度可公度。

于是，由于CD比DB如同FK比KE，

而CD、DB是仅正方可公度的直线，

因此，FK、KE也仅正方可公度。

[X. 11]

但KE是有理的；

因此，FK也是有理的。

因此，FK、KE是仅正方可公度的有理直线；

因此，EF是余线。

[X. 73]

现在，CD上的正方形比DB上的正方形大一个与CD要么可公度要么不可公度的直线上的正方形。

于是，如果CD上的正方形比DB上的正方形大一个与CD可公度的直

线上的正方形，则FK上的正方形也比KE上的正方形大一个与FK可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果CD与给定的有理直线长度可公度，

则FK也与给定的有理直线长度可公度；

[X. 11，12]

如果BD与给定的有理直线长度可公度，

则KE也与给定的有理直线长度可公度；

[X. 12]

但如果直线CD、DB都不与给定的有理直线长度可公度，

则直线FK、KE也都不与给定的有理直线长度可公度。

但如果CD上的正方形比DB上的正方形大一个与CD不可公度的直线上的正方形，

则FK上的正方形也比KE上的正方形大一个与FK不可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果CD与给定的有理直线长度可公度，

则FK也与给定的有理直线长度可公度；

如果BD与给定的有理直线可公度，

则KE也与给定的有理直线长度可公度；

但如果直线CD、DB都不与给定的有理直线长度可公度，

则直线FK、KE也都不与给定的有理直线长度可公度；

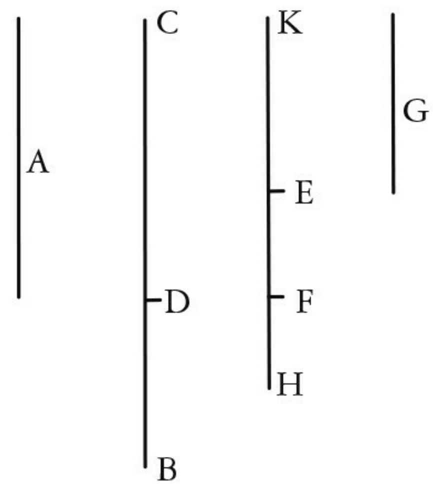
因此，FE是余线，它的两段FK、KE与二项线的两段CD、DB可公度，而且有相同的比，且FE与BC同级。

这就是所要证明的。

命题**113**

对一余线贴合出一个矩形等于一有理直线上的正方形，则产生的宽是二项线，该二项线的两段与余线的两段可公度，而且有相同的比；此外，如此产生的二项线与余线同级。

The square on a rational straight line, if applied to an apotome, produces as breadth the binomial straight line the terms of which are commensurable with the terms of the apotome and in the same ratio; and further the binomial so arising has the same order as the apotome.



设A是有理直线，BD是余线，且设对余线BD贴合出一个矩形等于有理直线A上的正方形，产生作为宽的KH；

我说，KH是二项线，它的两段与余线BD的两段可公度，而且有相同的比；此外，KH与BD同级。

这是因为，设DC是BD上的附加直线；

因此，BC、CD是仅正方可公度的有理直线。

[X. 73]

设矩形BC、G也等于A上的正方形。

但A上的正方形是有理的；

因此，矩形BC、G是有理的。

而它是对有理直线BC贴合出的；

因此，G是有理的，且与BC长度可公度。

[X. 20]

现在，由于矩形BC、G等于矩形BD、KH，

因此有比例，CB比BD如同KH比G。

[VI. 16]

但BC大于BD；

因此，KH也大于G。

[V. 16，V. 14]

设KE等于G；

因此，KE与BC长度可公度。

又，由于CB比BD如同HK比KE，

因此，取换比例，BC比CD如同KH 比HE。

[V. 19，推论]

设法使KH比HE如同HF比FE；

因此也有，余量KF比FH如同KH比HE，

即如同BC比CD。

[V. 19]

但BC、CD仅正方可公度；

因此，KF、FH也仅正方可公度。

[X. 11]

又，由于KH比HE如同KF比FH，

而KH比HE如同HF比FE，

因此也有，KF比FH如同HF比FE，

[V. 11]

因此，第一个比第三个如同第一个上的正方形比第二个上的正方形；

[V. 定义. 9]

因此也有，KF比FE如同KF上的正方形比FH上的正方形。

但KF上的正方形与FH上的正方形可公度，

这是因为KF、FH正方可公度；

因此，KF与FE也长度可公度，

[X. 11]

因此，KF与KE也长度可公度。

[X. 15]

但KE是有理的，且与BC长度可公度；

因此，KF也是有理的，且与BC长度可公度。

[X. 12]

又，由于BC比CD如同KF比FH，所以

取更比例，BC比KF如同DC比FH。

[V. 16]

但BC与KF可公度；

因此，FH与CD也长度可公度。

[X. 11]

但BC、CD是仅正方可公度的有理直线；

因此，KF、FH也是仅正方可公度的有理直线；

[X. 定义3]

因此，KH是二项线。

[X. 36]

现在，如果BC上的正方形比CD上的正方形大一个与BC可公度的直线上的正方形，

则KF上的正方形也比FH上的正方形大一个与KF可公度的直线上的正方形。

[X. 14]

又，如果BC与给定的有理直线长度可公度，

则KF也与给定的有理直线长度可公度；

如果CD与给定的有理直线长度可公度，

则FH也与给定的有理直线长度可公度；

但如果直线BC、CD都不与给定的有理直线长度可公度，

则直线KF、FH也都不与给定的有理直线长度可公度。

但如果BC上的正方形比CD上的正方形大一个与BC不可公度的直线上的正方形，

则KF上的正方形也比FH上的正方形大一个与KF不可公度的直线上

的正方形。

[X. 14]

又，如果BC与给定的有理直线长度可公度，

则KF也与给定的有理直线长度可公度；

如果CD与给定的有理直线长度可公度，

则FH也与给定的有理直线长度可公度；

但如果直线BC、CD都不与给定的有理直线长度可公度，

则直线KF、FH也都不与给定的有理直线长度可公度。

因此，KH是二项线，它的两段KF、FH与余线的两段BC、CD可公度，而且有相同的比，

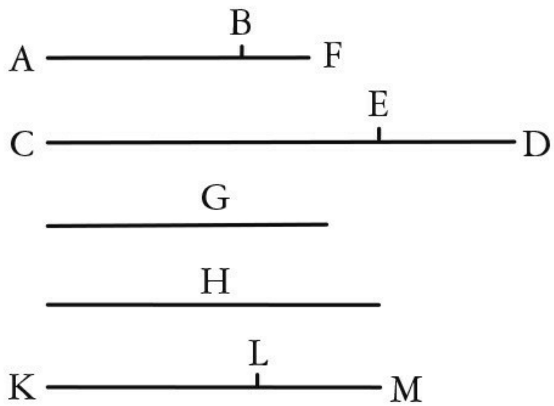
且KH与BD同级。

这就是所要证明的。

命题**114**

若余线和二项线围成一个面，该余线的两段与该二项线的两段可公度，且有相同的比，则这个面的**“**边**”**是有理的。

If an area be contained by an apotome and the binomial straight line the terms of which are commensurable with the terms of the apotome and in the same ratio, the “side” of the area is rational.



设余线AB和二项线CD围成一个面，即矩形AB、CD，

且设CE是CD的较长的一段；

设二项线的两段CE、ED与余线的两段AF、FB可公度，且有相同的比；

且设矩形AB、CD的“边”是G。

我说，G是有理的。

这是因为，给定有理直线H，

且对CD贴合出一个矩形等于H上的正方形，产生作为宽的KL。

因此，KL是余线。

设它的两段KM、ML与二项线CD的两段CE、ED可公度，且有相同

的比。

[X. 112]

但CE、ED与AF、FB也可公度，且有相同的比；

因此，AF比FB如同KM比ML。

因此，取更比例，AF比KM如同BF比LM；

因此也有，余量AB比余量KL如同AF 比KM。

[V. 19]

但AF与KM可公度；

[X. 12]

因此，AB与KL也可公度。

[X. 11]

而AB比KL如同矩形CD、AB比矩形CD、KL；

[VI. 1]

因此，矩形CD、AB与矩形CD、KL也可公度。

[X. 11]

但矩形CD、KL等于H上的正方形；

因此，矩形CD、AB与H上的正方形可公度。

但G上的正方形等于矩形CD、AB；

因此，G上的正方形与H上的正方形可公度。

但H上的正方形是有理的；

因此，G上的正方形也是有理的；

因此，G是有理的。

且它是矩形CD、AB的“边”。

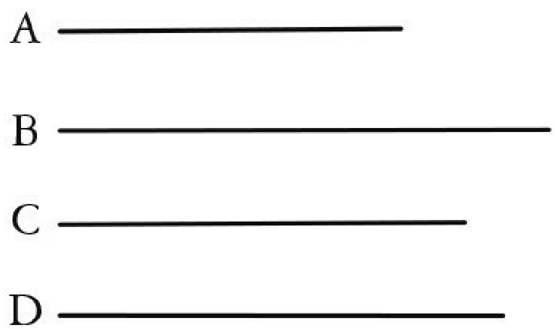
这就是所要证明的。

推论 由此显然可得，无理直线所围成的矩形也可能是有理面。

命题**115**

由一中项线可以产生无数条无理直线，且没有一条与以前的任一条相同。

From a medial straight line there arise irrational straight lines infinite in number, and none of them is the same as any of the preceding.



设A是中项线；

我说，由A可以产生无数条无理直线，且没有一条与以前的任一条相同。

给定有理直线B，且设C上的正方形等于矩形B、A；

因此，C是无理的；

[X. 定义4]

这是因为，无理直线和有理直线所围成的矩形是无理的。

[由X. 20推出]

且它与以前的任一条不同；

这是因为，对一有理直线贴合出一个矩形等于以前任一条无理直线上的正方形，都不可能产生中项线作为宽。

又，设D上的正方形等于矩形B、C；

因此，D上的正方形是无理的。

[由X. 20推出]

因此，D是无理的；

[X. 定义4]

且它与以前的任一条不同，这是因为，对一有理直线贴合出一个矩形等于以前任一条无理直线上的正方形，都不可能产生C作为宽。

类似地，如果将这种排列无限进行下去，那么显然，由一中项线可以产生无数条无理直线，且没有一条与以前的任一条相同。

这就是所要证明的。

第十一卷

定义 **Definitions**

01 / 体是有长、宽和高的东西。

A *solid* is that which has length, breadth, and depth.

02 / 体之端是面。

An extremity of a solid is a surface.

03 / 当一直线与一平面上所有与它相交的直线都成直角时，此直线与该平面成直角。

A *straight line is at right angles to a plane*, when it makes right angles with all the straight lines which meet it and are in the plane.

04 / 当在两个平面之一内所作的直线与两平面的交线成直角并且与另一平面成直角时，这两个平面成直角。

A plane is at right angles to a plane when the straight lines drawn, in one of the planes, at right angles to the common section of the planes are at right angles to the remaining plane.

05 / 从一直线在平面上方的端点向平面作垂线，该直线与连接垂足和直线在平面上端点的直线所成的角是该直线与平面的倾角。

The inclination of a straight line to a plane is, assuming a perpendicular

drawn from the extremity of the straight line which is elevated above the plane to the plane, and a straight line joined from the point thus arising to the extremity of the straight line which is in the plane, the angle contained by the straight line so drawn and the straight line standing up.

06 / 从两平面交线上的同一点在各自平面上所作交线的垂线所成的锐角是两平面的倾角。

The inclination of a plane to a plane is the acute angle contained by the straight lines drawn at right angles to the common section at the same point, one in each of the planes.

07 / 当一对平面的倾角等于另外一对平面的倾角时，则称它们有相似的倾角。

A plane is said to be *similarly inclined* to a plane as another is to another when the said angles of the inclinations are equal to one another.

08 / 平行平面是不相交的平面。

Parallel planes are those which do not meet.

09 / 相似立体形是由个数相等的相似平面所围成的那些立体形。

Similar solid figures are those contained by similar planes equal in multitude.

10 / 相等且相似的立体形是由个数和大小相等的相似平面所围成的那些立体形。

Equal and similar solid figures are those contained by similar planes equal in multitude and in magnitude.

11 / 立体角是由彼此交于同一点且不在同一面内的两条以上的线所共同构成的倾角。
或者说：立体角是由不在同一平面上且在同一点构造的两个以上的平面角所围成的角。

A *solid angle* is the inclination constituted by more than two lines which meet one another and are not in the same surface, towards all the lines.
Otherwise: A *solid angle* is that which is contained by more than two plane angles which are not in the same plane and are constructed to one point.

12 / 棱锥是从一个平面到一个点所构成的各个平面所围成的立体形。

A *pyramid* is a solid figure, contained by planes, which is constructed from one plane to one point.

13 / 棱柱是由一些平面构成的立体形，其中两个相对的平面是相等、相似且平行的，其余各面则是平行四边形。

A *prism* is a solid figure contained by planes two of which, namely those which are opposite, are equal, similar and parallel, while the rest are parallelograms.

14 / 球是一个半圆的直径保持固定，旋转半圆到运动的初始位置所形成的图形。

When, the diameter of a semicircle remaining fixed, the semicircle is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a *sphere*.

15 / 球的轴是半圆绕之旋转的保持固定的直线。

The *axis of the sphere* is the straight line which remains fixed and about which the semicircle is turned.

16 / 球心与半圆的圆心相同。

The *centre of the sphere* is the same as that of the semicircle.

17 / 球的直径是过球心且沿两个方向终止于球面的任一直线。

A *diameter of the sphere* is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the surface of the sphere.

18 / 固定直角三角形的一条直角边，旋转直角三角形到运动的初始位置，所形成的图形是圆锥。
又，若保持固定的直角边等于另一直角边，则所形成的圆锥是直角圆锥；若小于另一直角边，则是钝角圆锥；若大于另一直角边，则是锐角圆锥。

When, one side of those about the right angle in a right-angled triangle remaining fixed, the triangle is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a *cone*.
And, if the straight line which remains fixed be equal to the remaining side about the right angle which is carried round, the cone will be *right-angled*; if less, *obtuse-angled*; and if greater, *acute-angled*.

19 / 圆锥的轴是三角形旋转时保持固定的直线。

The *axis of the cone* is the straight line which remains fixed and about which the triangle is turned.

20 / 圆锥的底是三角形旋转时被带着旋转的直线所描出的圆。

And the *base* is the circle described by the straight line which is carried round.

21 / 固定矩形的一边，旋转矩形到运动的初始位置时，所形成的图形是圆柱。

When, one side of those about the right angle in a rectangular parallelogram remaining fixed, the parallelogram is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a *cylinder*.

22 / 圆柱的轴是矩形绕之旋转的保持固定的直线。

The *axis of the cylinder* is the straight line which remains fixed and about which the parallelogram is turned.

23 / 圆柱的底是被带着旋转的矩形的相对两边所描出的圆。

And the *bases* are the circles described by the two sides opposite to one another which are carried round.

24 / 相似圆锥和相似圆柱是轴与底的直径成比例的那些圆锥和圆柱。

Similar cones and cylinders are those in which the axes and the diameters of the bases are proportional.

25 / 正立方体是六个相等的正方形所围成的立体形。

A *cube* is a solid figure contained by six equal squares.

26 / 正八面体是八个相等的等边三角形所围成的立体形。

An *octahedron* is a solid figure contained by eight equal and equilateral triangles.

27 / 正二十面体是二十个相等的等边三角形所围成的立体形。

An *icosahedron* is a solid figure contained by twenty equal and equilateral triangles.

28 / 正十二面体是十二个相等的等边等角五边形所围成的立体形。

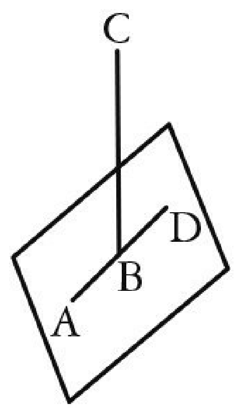
A *dodecahedron* is a solid figure contained by twelve equal, equilateral, and equiangular pentagons.

命题 **Proposition**

命题**01**

一直线不可能一部分在所假定的平面上，一部分在更高的平面上。

A part of a straight line cannot be in the plane of reference and a part in a plane more elevated.



这是因为，如果可能，设直线ABC的一部分AB在所假定的平面上，一部分BC在更高的平面上。

于是，在所假定的平面上有某直线与AB连成同一直线。

设它为BD；

因此，AB是两直线ABC、ABD的共同部分：

这是不可能的，因为若以B为圆心、以AB为距离作圆，则直径截出不等的圆周。

因此，一直线不可能一部分在所假定的平面上，一部分在更高的平

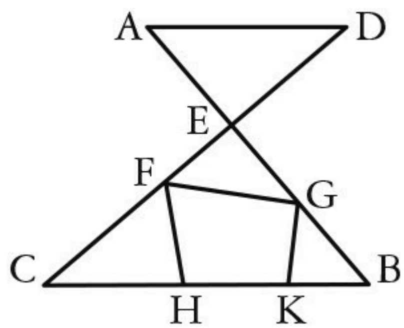
面上。

这就是所要证明的。

命题**02**

若两直线相交，则它们在同一平面上，且每个三角形都在同一平面上。

If two straight lines cut one another, they are in one plane, and every triangle is in one plane.



设两直线AB、CD交于点E；

我说，AB、CD在同一平面上，且每个三角形都在同一平面上。

这是因为，设在EC、EB上任取点F、G，

连接CB、FG，

引FH、GK；

首先我说，三角形ECB在同一平面上。

这是因为，如果三角形ECB的一部分，即FHC或GBK，在所假定的平面上，其余部分在另一个平面上，

则直线EC、EB之一的一部分也在所假定的平面上，一部分在另一平面上。

但如果三角形ECB的一部分FCBG在所假定的平面上，其余部分在另一平面上，

则两直线EC、EB的一部分也在所假定的平面上，一部分在另一平面上：

已经证明这是荒谬的。

[XI. 1]

因此，三角形ECB在同一平面上。

但无论三角形ECB在哪个平面上，直线EC、EB也都在那个平面上，

且无论直线EC、EB在哪个平面上，AB、CD也在那个平面上。

[XI. 1]

因此，直线AB、CD在同一平面上，

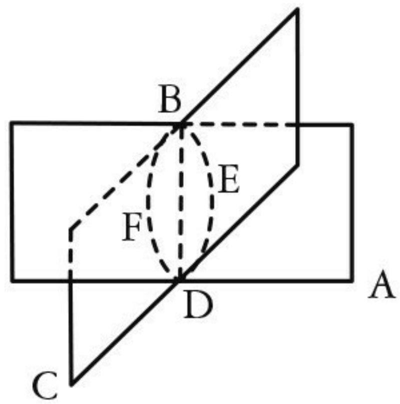
且每个三角形都在同一平面上。

这就是所要证明的。

命题**03**

若两平面相交，则它们的交线是一条直线。

If two planes cut one another, their common section is a straight line.



设两平面AB、BC相交，DB是它们的交线；

我说，线DB是一条直线。

这是因为，如果不是这样，那么从D到B在平面AB上连接直线DEB，

且在平面BC上连接直线DFB。

于是，两直线DEB、DFB有相同的端点，而且显然围成一个面：

这是荒谬的。

因此，DEB、DFB都不是直线。

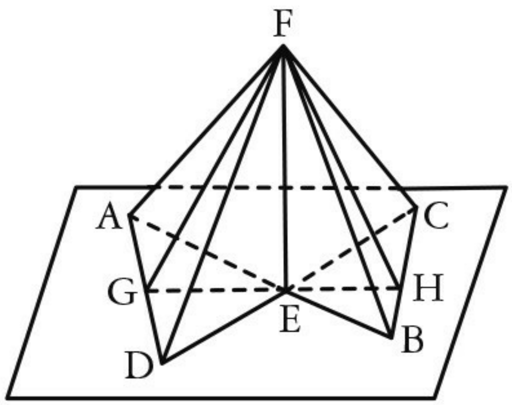
类似地，可以证明，除平面AB、BC的交线DB以外，再没有任何其他直线从D连接到B。

这就是所要证明的。

命题**04**

若一直线在另外两条直线的交点处与它们成直角，则该直线与过两直线的平面也成直角。

If a straight line be set up at right angles to two straight lines which cut one another, at their common point of section, it will also be at right angles to the plane through them.



设直线EF在两条直线AB、CD的交点E与它们成直角；

我说，EF也与过AB、CD的平面成直角。

这是因为，设AE、EB、CE、ED相交且彼此相等，

且过E任引一直线GEH；

连接AD、CB。

又[在EF上]任取点F，连接FA、FG、FD、FC、FH、FB。

现在，由于两直线AE、ED等于两直线CE、EB，且夹相等的角，

[I. 15]

因此，底AD等于底CB，

而三角形AED等于三角形CEB，

[I. 4]

因此，角DAE也等于角EBC。

但角AEG也等于角BEH；

[I. 15]

因此，三角形AGE、BEH分别有两角和一边相等，即等角的夹边AE、EB相等；

因此，其余的边也等于其余的边。

[I. 26]

因此，GE等于EH，且AG等于BH。

又，由于AE等于EB，

而FE是公共的，且在直角处。

因此，底FA等于底FB。

[I. 4]

同理，

FC也等FD。

又，由于AD等于CB，

且FA等于FB，所以

两边FA、AD分别等于两边FB、BC；

而已经证明，底FD等于底FC；

因此，角FAD也等于角FBC。

[I. 8]

又，由于已经证明，AG等于BH，

且FA也等于FB，所以

两边FA、AG等于两边FB、BH。

而已经证明，角FAG等于角FBH；

因此，底FG等于底FH。

[I. 4]

现在，由于已经证明，GE等于EH，

且EF公用，所以

两边GE、EF等于两边HE、EF；

而底FG等于底FH；

因此，角GEF等于角HEF。

[I. 8]

因此，角GEF、HEF中的每一个都是直角。

因此，FE与过E任作的直线GH成直角。

类似地，可以证明，FE与所假定平面上与它相交的所有直线都成直角。

但是当一直线与一平面上所有与它相交的直线都成直角时，此直线与该平面成直角。

[XI. 定义3]

因此，FE与所假定的平面成直角。

但所假定的平面是过直线AB、CD的平面，

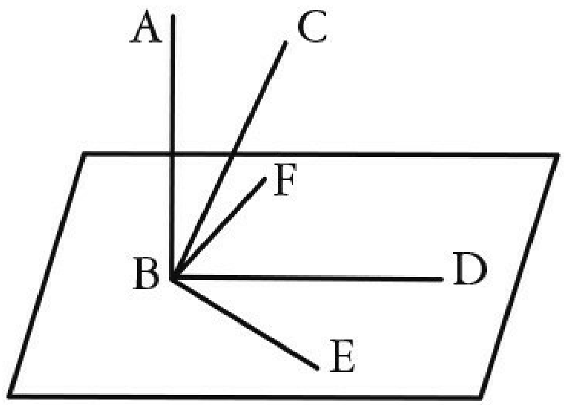
因此，FE与过AB、CD的平面成直角。

这就是所要证明的。

命题**05**

若一直线在三直线的交点处与三直线成直角，则此三直线在同一平面上。

If a straight line be set up at rigid angles to three straight lines which meet one another, at their common point of section, the three straight lines are in one plane.



设直线AB在三直线BC、BD、BE的交点B与它们成直角；

我说，BC、BD、BE在同一平面上。

这是因为，假设它们不在同一平面上，但如果可能，设BD、BE在所假定的平面上，BC在更高的平面上；

过AB、BC作平面；

于是，它与所假定平面的交线是一条直线。

[XI. 3]

设它是BF。

因此，三直线AB、BC、BF在同一平面上，即过AB、BC的平面。

现在，由于AB与直线BD、BE中的每一条都成直角，

因此，AB也与过BD、BE的平面成直角。

[XI. 4]

但过BD、BE的平面是所假定的平面；

因此，AB与所假定的平面成直角。

于是，AB也和所假定的平面上与AB相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

但所假定的平面上的BF与AB相交；

因此，角ABF是直角。

但根据假设，角ABC也是直角；

因此，角ABF等于角ABC。

且它们在同一平面上：

这是不可能的。

因此，直线BC不在更高的平面上；

因此，三直线BC、BD、BE在同一平面上。

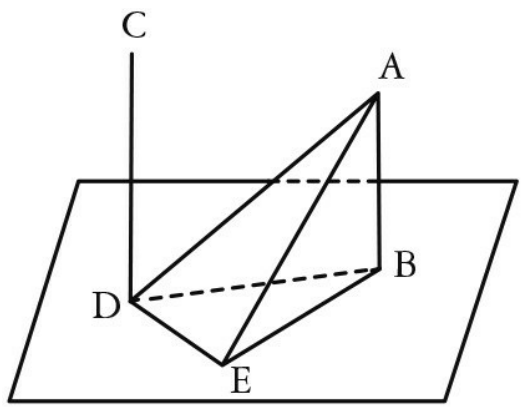
因此，如果一直线在三直线的交点与三直线成直角，则此三直线在同一平面上。

这就是所要证明的。

命题**06**

若两直线与同一平面成直角，则这两直线平行。

If two straight lines be at right angles to the same plane, the straight lines will be parallel.



设两直线AB、CD与所假定的平面成直角；

我说，AB平行于CD。

这是因为，设它们与所假定的平面交于点B、D，

连接直线BD，

在所假定的平面上作DE与BD成直角，

取DE等于AB，

连接BE、AE、AD。

现在，由于AB与所假定的平面成直角，所以它也和所假定的平面上与AB相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

但直线BD、BE中的每一个都在所假定的平面上，且与AB相交；

因此，角ABD、ABE中的每一个都是直角。

同理，

角CDB、CDE中的每一个也都是直角。

又，由于AB等于DE，

且BD公用，所以

两边AB、BD等于两边ED、DB；

而它们夹直角；

因此，底AD等于底BE。

[I. 4]

又，由于AB等于DE，

而AD也等于BE，所以

两边AB、BE等于两边ED、DA；

而AE是它们的公共底；

因此，角ABE等于角EDA。

[I. 8]

但角ABE是直角；

因此，角EDA也是直角；

因此，ED与DA成直角。

但它也与直线BD、DC中的每一条成直角；

因此，ED在三直线BD、DA、DC的交点处与它们成直角；

因此，三直线BD、DA、DC在同一平面上。

[XI. 5]

但无论DB、DA在哪个平面上，AB也在这个平面上，

这是因为任何三角形都在同一平面上；

[XI. 2]

因此，直线AB、BD、DC在同一平面上。

而角ABD、BDC中的每一个都是直角，

因此，AB平行于CD。

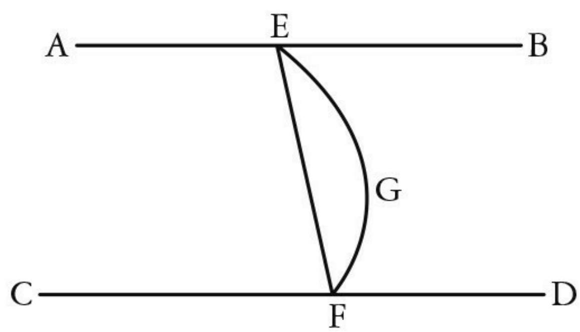
[I. 28]

这就是所要证明的。

命题**07**

若两直线平行，在它们上各任取一点，则连接两点的直线与两平行直线在同一平面上。

If two straight lines be parallel and points be taken at random on each of them, the straight line joining the points is in the same plane with the parallel straight lines.



设AB、CD是两平行直线，

分别在它们上任取点E、F；

我说，连接点E、F的直线与两平行直线在同一平面上。

这是因为，假设不是这样，如果可能，设直线EGF在更高的平面上，

过EGF作一平面；

于是，它与所假定的平面交于一条直线。

[XI. 3]

设它是EF；

因此，两直线EGF、EF围成一个面：

这是不可能的

因此，连接E和F的直线不在更高的平面上；

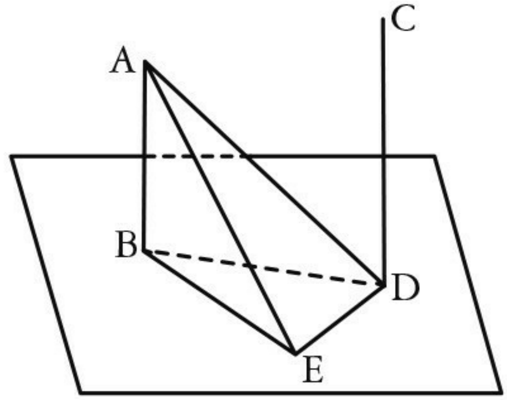
因此，连接E和F的直线在过平行线AB、CD的平面上。

这就是所要证明的。

命题**08**

若两直线平行，其中一直线与某平面成直角，则另一直线也与同一平面成直角。

If two straight lines be parallel, and one of them be at right angles to any plane, the remaining one will also be at right angles to the same plane.



设AB、CD是两平行直线，

且其中的AB与所假定的平面成直角；

我说，另一直线CD也与同一平面成直角。

这是因为，设AB、CD与所假定的平面交于点B、D。

连接BD；

因此，AB、CD、BD在同一平面上。

[XI. 7]

在所假定的平面上作DE与BD成直角，

取DE等于AB，

连接BE、AE、AD。

现在，由于AB与所假定的平面成直角，因此，AB与所假定的平面上与AB相交的所有直线都成直角；

[XI. 定义3]

因此，角ABD、ABE中的每一个都是直角。

又，由于直线BD与平行线AB、CD相交，

因此，角ABD、CDB之和等于两直角。

[I. 29]

但角ABD是直角；

因此，角CDB也是直角；

因此，CD与BD成直角。

又，由于AB等于DE，

且BD公用，所以

两边AB、BD等于两边ED、DB；

而角ABD等于角EDB，

这是因为它们都是直角；

因此，底AD等于底BE。

又，由于AB等于DE，

且BE等于AD，所以

两边AB、BE分别等于两边ED、DA，

而AE是它们的公用底；

因此，角ABE等于角EDA。

但角ABE是直角；

因此，角EDA也是直角；

因此，ED与AD成直角。

但它也与DB成直角；

因此，ED也与过BD、DA的平面成直角。

[XI. 4]

因此，ED也和过BD、DA的平面上与ED相交的直线都成直角。

但DC在过BD、DA的平面上，这是因为AB、BD在过BD、DA的平面上，

[XI. 2]

而DC也在AB、BD所在的平面上。

因此，ED与DC成直角，

因此，CD也与DE成直角。

但CD也与BD成直角，

因此，CD在两直线DE、DB的交点D与两直线成直角；

因此，CD也与过DE、DB的平面成直角。

[XI. 4]

但过DE、DB的平面是所假定的平面；

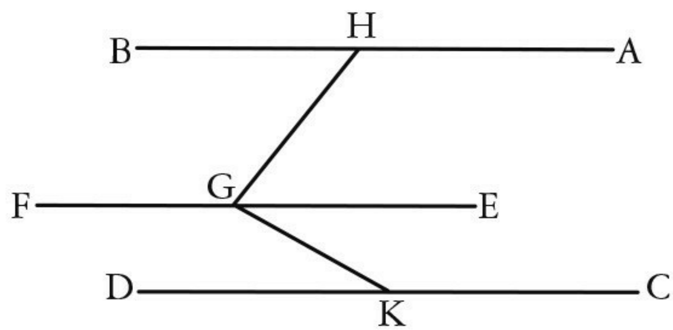
因此，CD与所假定的平面成直角。

这就是所要证明的。

命题**09**

与同一直线平行且与之不在同一平面上的直线也彼此平行。

Straight lines which are parallel to the same straight line and are not in the same plane with it are also parallel to one another.



设直线AB、CD中的每一条都平行于与之不在同一平面上的直线EF；

我说，AB平行于CD。

这是因为，在EF上任取一点G，

从它在过EF、AB的平面上作GH与EF成直角，又在过FE、CD的平面上作GK与EF成直角。

现在，由于EF与直线GH、GK中的每一条都成直角，

因此，EF也与过GH、GK的平面成直角。

[XI. 4]

而EF平行于AB；

因此，AB也与过HG、GK的平面成直角。

[XI. 8]

同理，CD也与过HG、GK的平面成直角；

因此，直线AB、CD中的每一条都与过HG、GK的平面成直角。

但若两条直线都与同一平面成直角，则这两条直线平行。

[XI. 6]

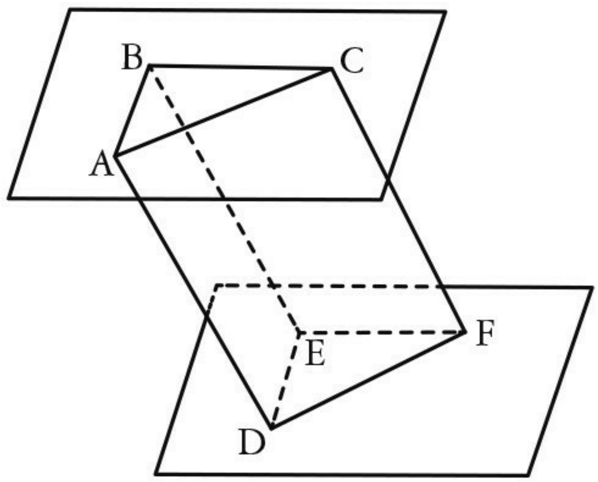
因此，AB平行于CD。

这就是所要证明的。

命题**10**

若两相交直线平行于不在同一平面上的两相交直线，则它们夹的角相等。

If two straight lines meeting one another be parallel to two straight lines meeting one another not in the same plane, they will contain equal angles.



设彼此相交的两直线AB、BC平行于不在同一平面上的两相交直线DE、EF；

我说，角ABC等于角DEF。

这是因为，截取彼此相等的BA、BC、ED、EF，且连接AD、CF、BE、AC、DF。

现在，由于BA等于且平行于ED，

因此，AD也等于且平行于BE。

[I. 33]

同理，

CF也等于且平行于BE。

因此，直线AD、CF中的每一条都等于且平行于BE。

但与同一直线平行且与之同一平面上的直线也彼此平行；

[XI. 9]

因此，AD平行且等于CF。

而AC、DF连接着它们；

因此，AC也等于且平行于DF。

[I. 33]

现在，由于两边AB、BC等于两边DE、EF，

且底AC等于底DF，

因此，角ABC等于角DEF。

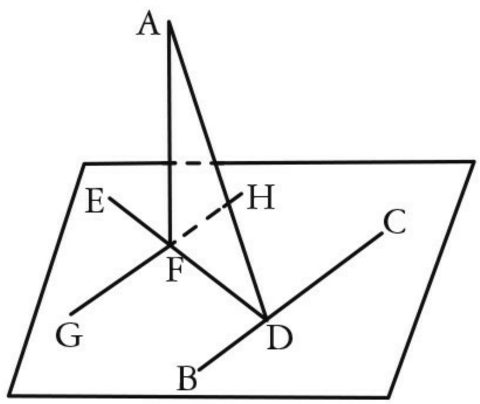
[I. 8]

这就是所要证明的。

命题**11**

从平面外给定一点作一直线垂直于给定的平面。

From a given elevated point to draw a straight line perpendicular to a given plane.



设A是平面外给定的点，且所假定的平面是给定的平面；

于是，要求从点A作一直线垂直于所假定的平面。

在所假定的平面上任意作直线BC，

且从点A作AD垂直于BC。

[I. 12]

于是，如果AD也垂直于所假定的平面，则所要求的直线已作出。

但如果不是这样，则在所假定的平面上从点D作DE与BC成直角，

[I. 11]

从A作AF垂直于DE，

[I. 12]

且过点F作GH平行于BC。

[I. 31]

现在，由于BC与直线DA、DE中的每一条都成直角，

因此，BC也与过ED、DA的平面成直角。

[XI. 4]

且GH平行于它；

但如果两直线平行，其中一直线与某平面成直角，则另一直线也与同一平面成直角；

[XI. 8]

因此，GH也与过ED、DA的平面成直角。

因此，GH也和过ED、DA的平面上与GH相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

但AF与GH相交，且在过ED、DA的平面上；

因此，GH与FA成直角，

因此，FA也与GH成直角。

但AF也与DE成直角；

因此，AF与直线GH、DE中的每一条都成直角。

但如果一直线在另外两条直线的交点处与它们成直角，则该直线与过两直线的平面也成直角；

[XI. 4]

因此，FA与过ED、GH的平面成直角。

但过ED、GH的平面是所假定的平面；

因此，AF与所假定的平面成直角。

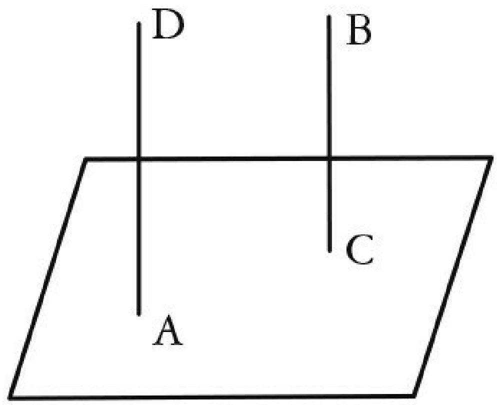
这样便从平面外的给定点A作出了直线AF垂直于所假定的平面。

这就是所要作的。

命题**12**

在给定平面上一给定点作一直线与该平面成直角。

To set up a straight line at right angles to a given plane from a given point in it.



设所假定的平面就是给定的平面，A是其上一点；

于是，要求从点A作一直线与该平面成直角。

设想B是平面外任一点，

从B作BC垂直于所假定的平面，

[XI. 11]

且过点A作AD平行于BC。

[I. 31]

于是，由于AD、CB是两平行直线，而其中之一BC与所假定的平面成直角，

因此，其余一条AD也与所假定的平面成直角。

[XI. 8]

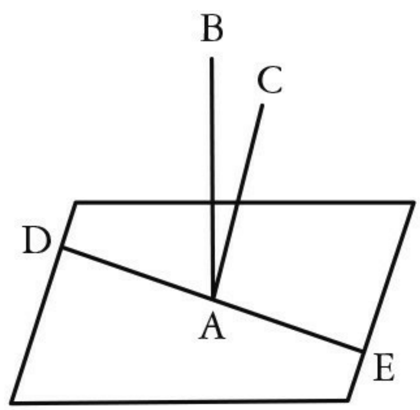
这样便在给定平面上的点A作出了AD与该平面成直角。

这就是所要作的。

命题**13**

从同一点在同侧不可能作两条直线与该平面成直角。

From the same point two straight lines cannot be set up at right angles to the same plane on the same side.



这是因为，如果可能，从同一点A在同侧作两条直线AB、AC与该平面成直角，

且过BA、AC作一平面；

于是，它与所假定的平面交成一条过A的直线。

[XI. 3]

设此直线是DAE；

因此，直线AB、AC、DAE在同一平面上。

又，由于CA与所假定的平面成直角，所以CA与所假定的平面上所有与CA相交的直线都成直角。

[XI. 定义3]

但DAE与CA相交，且在所假定的平面上；

因此，角CAE是直角。

同理，

角BAE也是直角；

因此，角CAE等于角BAE。

而它们在同一平面上：

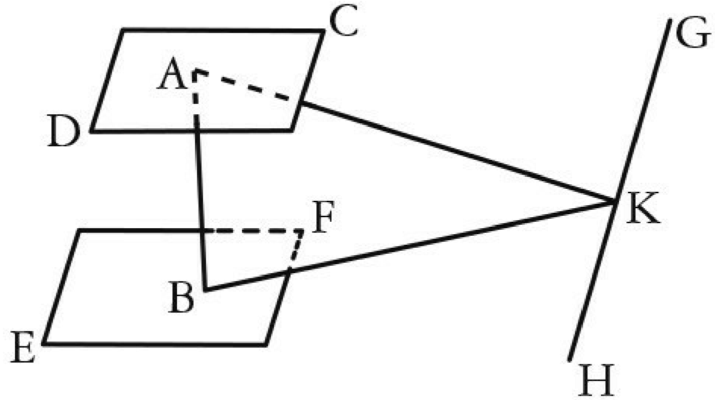
这是不可能的。

这就是所要证明的。

命题**14**

与同一直线成直角的平面是平行的。

Planes to which the same straight line is at right angles will be parallel.



设某直线AB与平面CD、EF中的每一个都成直角；

我说，这两个平面是平行的。

这是因为，如果不是这样，则它们延长后会相交。

设它们相交；

于是它们交成一直线。

[XI. 3]

设它们交成GH；

在GH上任取一点K，

连接AK、BK。

现在，由于AB与平面EF成直角，

因此，AB也与延长的平面EF上的直线BK成直角；

[XI. 定义3]

因此，角ABK是直角。

同理，

角BAK也是直角。

于是，在三角形ABK中，两个角ABK、BAK之和等于两直角之和；

这是不可能的。

[I. 17]

因此，平面CD、EF延长后不相交；

因此，平面CD、EF是平行的。

[XI. 定义8]

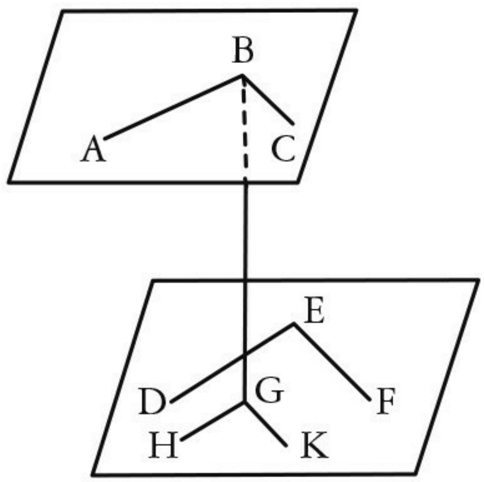
因此，与同一直线成直角的平面是平行的。

这就是所要证明的。

命题**15**

若两条相交直线平行于不在同一平面上的另外两条相交直线，则过两对直线的平面平行。

If two straight lines meeting one another be parallel to two straight lines meeting one another, not being in the same plane, the planes through them are parallel.



设两条相交直线AB、BC平行于不在同一平面上的另外两条相交直线DE、EF；

我说，过AB、BC的平面与过DE、EF的平面延长后不相交。

这是因为，从点B作BG垂直于过DE、EF的平面，

[XI. 11]

设它与平面交于点G；

过G作GH平行于ED，且作GK平行于EF。

[I. 31]

现在，由于BG与过DE、EF的平面成直角，

因此，BG也和过DE、EF的平面上与BG相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

但直线GH、GK中的每一条都与BG相交，且在过DE、EF的平面上；

因此，角BGH、BGK中的每一个都是直角。

又，由于BA平行于GH，

[XI. 9]

因此，角GBA、BGH之和等于两直角。

[I. 29]

但角BGH是直角；

因此，角GBA也是直角；

因此，GB与BA成直角。

同理，

GB也与BC成直角。

于是，由于直线GB与相交的两直线BA、BC成直角，

因此，GB也与过BA、BC的平面成直角。

[XI. 4]

但与同一直线成直角的平面是平行的；

[XI. 14]

因此，过AB、BC的平面平行于过DE、EF的平面。

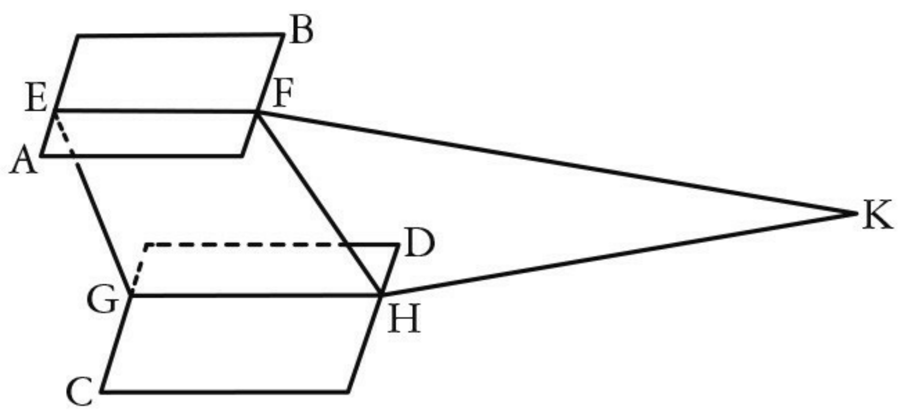
因此，若两条相交直线平行于不在同一平面上的另外两条相交直线，则过两对直线的平面平行。

这就是所要证明的。

命题**16**

若两平行平面被某平面所截，则其交线平行。

If two parallel planes be cut by any plane, their common sections are parallel.



设两平行平面AB、CD被平面EFHG所截，

且设EF、GH是它们的交线；

我说，EF平行于GH。

这是因为，如果两直线不平行，则EF、GH延长后要么沿F、H方向，要么沿E、G方向相交。

沿F、H方向延长它们，先设它们相交于K。

现在，由于EFK在平面AB上，

因此，EFK上的所有点也在平面AB上。

[XI. 1]

但K是直线EFK上的一个点；

因此，K在平面AB上。

同理，

K也在平面CD上；

因此，平面AB、CD延长后相交。

但它们不相交，这是因为，根据假设它们是平行的；

因此，直线EF、GH沿F、H方向延长后不相交。

类似地，可以证明，直线EF、GH沿E、G方向延长后也不相交。

但沿哪个方向延长都不相交的直线是平行的。

[I. 定义23]

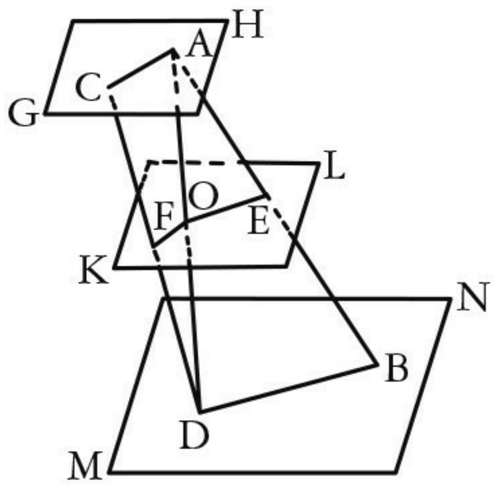
因此，EF平行于GH。

这就是所要证明的。

命题**17**

若两直线被平行平面所截，则截得的直线有相同的比。

If two straight lines be cut by parallel planes, they will be cut in the same ratios.



设两直线AB、CD被平行平面GH、KL、MN所截，其截点为A、E、B和C、F、D；

我说，直线AE比EB如同CF比FD。

这是因为，连接AC、BD、AD，

设AD与平面KL交于点O，

连接EO、OF。

现在，由于两平行平面KL、MN被平面EBDO所截，所以

它们的交线EO、BD是平行的。

[XI. 16]

同理，由于两平行平面GH、KL被平面AOFC所截，所以

它们的交线AC、OF是平行的。

[XI. 16]

又，由于直线EO平行于三角形ABD的一边BD，

因此有比例，AE比EB如同AO比OD。

[VI. 2]

又，由于直线OF平行于三角形ADC的一边AC，

因此有比例，AO比OD如同CF比FD。

[VI. 2]

但已证明，AO比OD如同AE比EB；

因此也有，AE比EB如同CF比FD。

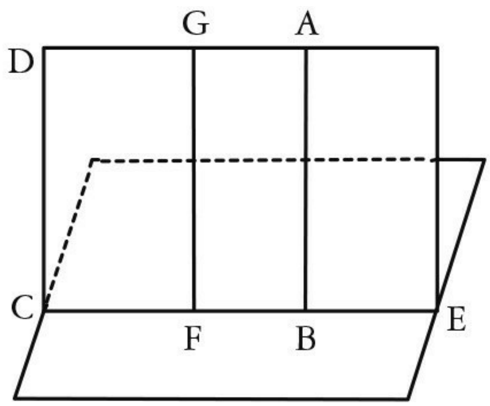
[V. 11]

这就是所要证明的。

命题**18**

若一直线与某平面成直角，则过此直线的所有平面都与该平面成直角。

If a straight line be at right angles to any plane, all the planes through it will also be at right angles to the same plane.



设某直线AB与所假定的平面成直角；

我说，过AB的所有平面都与所假定的平面成直角。

这是因为，作过AB的平面DE，

设CE是平面DE与所假定的平面的交线，

在CE上任取一点F，

在平面DE上从F作FG与CE成直角。

[I. 11]

现在，由于AB与所假定的平面成直角，所以AB也和所假定的平面上与AB相交的所有直线成直角；

[IX. 定义3]

因此，AB也与CE成直角；

因此，角ABF是直角。

但角GFB也是直角；

因此，AB平行于FG。

[I. 28]

但AB与所假定的平面成直角；

因此，FG也与所假定的平面成直角。

[XI. 8]

现在，当在两个平面之一内所作的直线与两平面的交线成直角并且与另一平面成直角时，这两个平面成直角。

[XI. 定义4]

且已经证明，与平面的交线CE成直角的平面DE上的FG与所假定的平面成直角；

因此，平面DE与所假定的平面成直角。

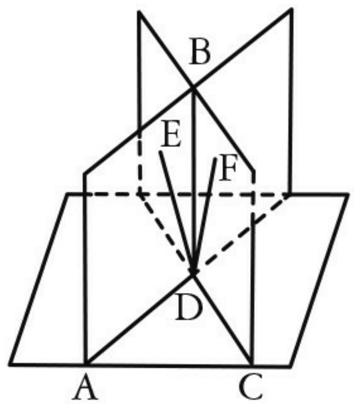
类似地，也可以证明，过AB的所有平面都与所假定的平面成直角。

这就是所要证明的。

命题**19**

若两相交平面与某平面成直角，则它们的交线也与该平面成直角。

If two planes which cut one another be at right angles to any plane, their common section will also be at right angles to the same plane.



设两平面AB、BC与所假定的平面成直角，

且设BD是它们的交线；

我说，BD与所假定的平面成直角。

这是因为，假设不是这样，那么在平面AB上从D作DE与直线AD成直角，

且在平面BC上作DF与CD成直角。

现在，由于平面AB与所假定的平面成直角，

且在平面AB上已作DE与它们的交线AD成直角，

因此，DE与所假定的平面成直角。

[XI. 定义4]

类似地，可以证明，

DF也与所假定的平面成直角。

因此，从同一点D在所假定的平面同侧有两条直线与该平面成直角：

这是不可能的。

[XI. 13]

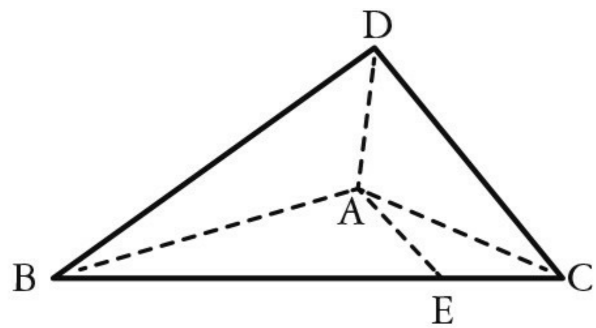
因此，除平面AB、BC的交线DB以外，从点D再作不出直线与所假定的平面成直角。

这就是所要证明的。

命题**20**

若三个平面角围成一个立体角，则任意两个平面角之和大于第三个平面角。

If a solid angle be contained by three plane angles, any two, taken together in any manner, are greater that the remaining one.



设三个平面角BAC、CAD、DAB围成A处的立体角；

我说，角BAC、CAD、DAB中的任意两角之和大于第三个角。

现在，如果角BAC、CAD、DAB彼此相等，那么显然，任意两角之和大于第三个角。

但如果不是这样，设角BAC较大，

在过BA、AC的平面上，在直线AB上的点A处作角BAE等于角DAB；

取AE等于AD，

且过点E作BEC与直线AB、AC交于点B、C；

连接DB、DC。

现在，由于AD等于AE，

且AB公用，所以

两边等于两边；

而角DAB等于角BAE；

因此，底DB等于底BE。

[I. 4]

又，由于两边BD、DC之和大于BC，

[l. 20]

且已经证明，其中DB等于BE，

因此，余下的DC大于余下的EC。

现在，由于DA等于AE，

AC公用，

且底DC大于底EC，

因此，角DAC大于角EAC。

[I. 25]

但已取角DAB等于角BAE；

因此，角DAB、DAC之和大于角BAC。

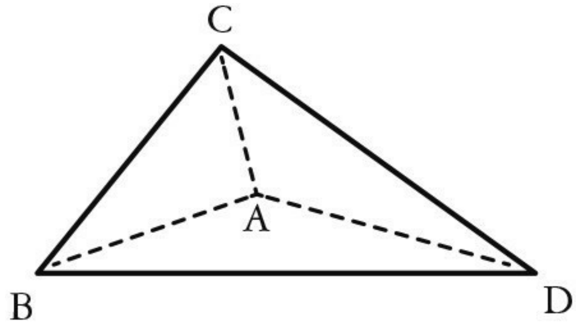
类似地，可以证明，其余的角也是这样，任意两个平面角之和大于第三个平面角。

这就是所要证明的。

命题**21**

任何立体角都由其和小于四直角的平面角所围成。

Any solid angle is contained by plane angles less than four right angles.



设A处的角是平面角BAC、CAD、DAB所围成的立体角；

我说，角BAC、CAD、DAB之和小于四直角。

这是因为，在直线AB、AC、AD上分别取点B、C、D，

连接BC、CD、DB。

现在，由于B所处的立体角是由三个平面角CBA、ABD、CBD所围成的，所以

其中任意两角之和大于第三个角；

[XI. 20]

因此，角CBA、ABD之和大于角CBD。

同理，

角BCA、ACD之和大于角BCD，

且角CDA、ADB之和大于角CDB；

因此，六个角CBA、ABD、BCA、ACD、CDA、ADB之和大于三

个角CBD、BCD、CDB之和。

但三个角CBD、BDC、BCD之和等于两直角；

[I. 32]

因此，六个角CBA、ABD、BCA、ACD、CDA、ADB之和大于两直角。

又，由于三角形ABC、ACD、ADB中每一个的三个角之和等于两直角，

因此，这三个三角形的九个角，即角CBA、ACB、BAC、ACD、CDA、CAD、ADB、DBA、BAD之和等于六直角；

而其中六个角ABC、BCA、ACD、CDA、ADB、DBA之和大于两直角；

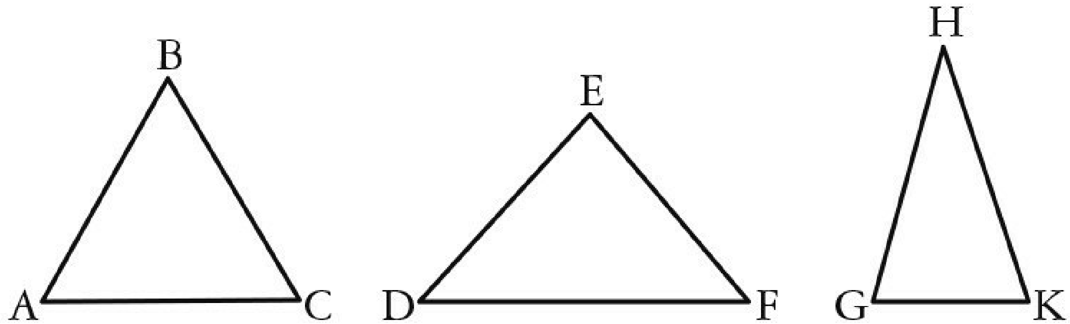
因此，围成这个立体角的其余三个角BAC、CAD、DAB之和小于四直角。

这就是所要证明的。

命题**22**

若有三个平面角，其中任意两角之和大于第三个角，且由相等的直线所夹，则连接这些相等直线端点的三条直线可以构成一个三角形。

If there be three plane angles of which two, taken together in any manner, are greater than the remaining one, and they are contained by equal straight lines, it is possible to construct a triangle out of the straight lines joining the extremities of the equal straight lines.



设有三个平面角ABC、DEF、GHK，其中任意两角之和大于第三个角，即

角ABC、DEF之和大于角GHK，

角DEF、GHK之和大于角ABC，

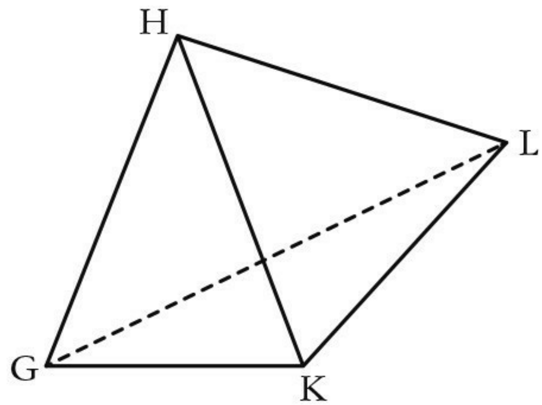
且角GHK、ABC之和大于角DEF；

设直线AB、BC、DE、EF、GH、HK相等，

连接AC、DF、GK；

我说，由等于AC、DF、GK的直线可以构成一个三角形，也就是说，直线AC、DF、GK中的任意两条之和大于第三条。

现在，如果角ABC、DEF、GHK彼此相等，那么显然，AC、DF、GK也相等，则由等于AC、DF、GK的直线可以构成一个三角形。



但如果不是这样，设它们不等，

在直线HK上的点H作角KHL等于角ABC;

取HL等于直线AB、BC、DE、EF、GH、HK中的一条，

连接KL、GL。

现在，由于两边AB、BC等于两边KH、HL，

且B处的角等于角KHL，

因此，底AC等于底KL。

[I. 4]

又，由于角ABC、GHK之和大于角DEF，

而角ABC等于角KHL，

因此，角GHL大于角DEF。

又，由于两边GH、HL等于两边DE、EF，

且角GHL大于角DEF，

因此，底GL大于底DF。

[I. 24]

但GK、KL之和大于GL。

因此，GK、KL之和更大于DF。

但KL等于AC；

因此，AC、GK之和大于其余的直线DF。

类似地，可以证明，

AC、DF之和大于GK，

以及DF、GK之和大于AC。

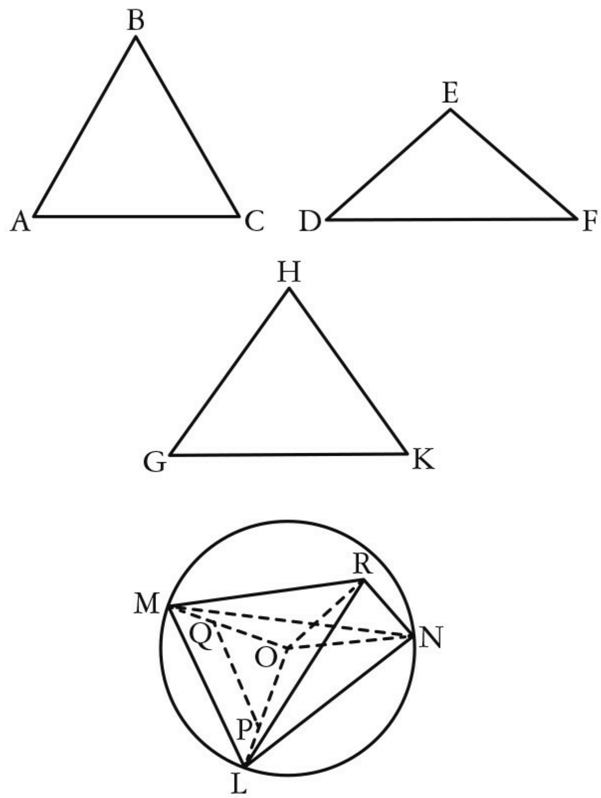
因此，由等于AC、DF、GK的直线可以构成一个三角形。

这就是所要证明的。

命题**23**

在三个平面角中，任意两角之和大于第三个角，且这三个角之和小于四直角：由这三个平面角构成一个立体角。

To construct a solid angle out of three plane angles two of which, taken together in any manner, are greater than the remaining one: thus the three angles must be less than four right angles.



设角ABC、DEF、GHK是三个给定的平面角，且设其中任意两角之和大于第三个角，而三个角之和小于四直角；

于是，要求由等于角ABC、DEF、GHK的角作一个立体角。

截取AB、BC、DE、EF、GH、HK使它们彼此相等，

连接AC、DF、GK；

因此，可以由等于AC、DF、GK的直线作一个三角形。

[XI. 22]

这样作出三角形LMN，使AC等于LM，DF等于MN，以及GK等于NL，

作三角形LMN的外接圆LMN，

设它的圆心是O；

连接LO、MO、NO；

我说，AB大于LO。

这是因为，如果不是这样，则AB要么等于LO，要么小于LO。

首先，设AB等于LO。

于是，由于AB等于LO，

而AB等于BC，且OL等于OM，所以

两边AB、BC分别等于两边LO、OM；

而根据假设，底AC等于底LM；

因此，角ABC等于角LOM。

[I. 8]

同理，

角DEF也等于角MON，

以及角GHK等于角NOL；

因此，三个角ABC、DEF、GHK之和等于三个角LOM、MON、NOL之和。

但三个角LOM、MON、NOL之和等于四直角；

因此，角ABC、DEF、GHK之和等于四直角。

但根据假设，它们又小于四直角：

这是荒谬的。

因此，AB不等于LO。

其次我说，AB也不小于LO。

这是因为，如果可能，设AB小于LO，

且作OP等于AB，OQ等于BC，

连接PQ。

于是，由于AB等于BC，所以

OP也等于OQ，

因此，余量LP等于QM。

因此，LM平行于PQ，

[VI. 2]

而LMO与PQO是等角的；

[I. 29]

因此，OL比LM如同OP比PQ；

[VI. 4]

取更比例，得LO比OP如同LM比PQ。

[V. 16]

但LO大于OP；

因此，LM也大于PQ。

但取LM等于AC；

因此，AC也大于PQ。

于是，由于两边AB、BC等于两边PO、OQ，

且底AC大于底PQ，

因此，角ABC大于角POQ。

[I. 25]

类似地，可以证明，

角DEF也大于角MON，

且角GHK大于角NOL。

因此，三个角ABC、DEF、GHK之和大于三个角LOM、MON、NOL之和。

但根据假设，角ABC、DEF、GHK之和小于四直角；

因此，角LOM、MON、NOL之和更小于四直角。

但它们之和也等于四直角：

这是荒谬的。

因此，AB不小于LO。

而已经证明，AB也不等于LO；

因此，AB大于LO。

然后，从点O作OR与圆LMN的平面成直角，

[XI. 12]

且使AB上的正方形比LO上的正方形大一个OR上的正方形；

[引理]

连接RL、RM、RN。

于是，由于RO与圆LMN的平面成直角，

因此，RO也与直线LO、MO、NO中的每一条成直角。

又，由于LO等于OM，

而OR公用且与它们成直角，

因此，底 RL等于底RM。

[I. 4]

同理，

RN也等于直线RL、RM中的每一条；

因此，三直线RL、RM、RN彼此相等。

其次，由于根据假设，AB上的正方形比LO上的正方形大一个OR上的正方形，

因此，AB上的正方形等于LO、OR上的正方形之和。

但LR上的正方形等于LO、OR上的正方形之和，这是因为角LOR是直角；

[I. 47]

因此，AB上的正方形等于RL上的正方形；

因此，AB等于RL。

但直线BC、DE、EF、GH、HK中的每一条都等于AB，

而直线RM、RN中的每一条都等于RL；

因此，直线AB、BC、DE、EF、GH、HK中的每一条都等于直线RL、RM、RN中的每一条。

又，由于两边LR、RM等于两边AB、BC，

且根据假设，底LM等于底AC，

因此，角LRM等于角ABC。

[I. 8]

同理，

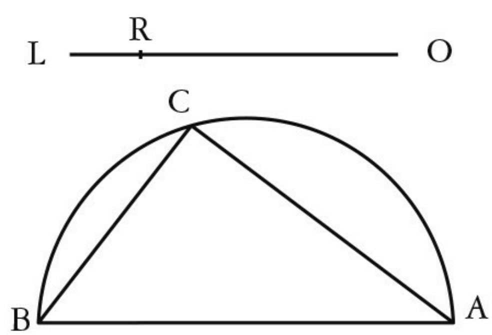
角MRN也等于角DEF，

且角LRN等于角GHK。

这样便由等于三个给定角ABC、DEF、GHK的三个平面角LRM、MRN、LRN作出了R处的立体角，该立体角由角LRM、MRN、LRN所围成。

这就是所要作的。

引理　但如何才能作出OR上的正方形，使它等于AB上的正方形与LO上的正方形之差呢？



给定直线AB、LO，

且设AB较大；

在AB上作半圆ABC，

将等于直线LO的AC纳入半圆ABC，而LO不大于直径AB；

[IV. 1]

连接CB。

于是，由于角ACB是半圆ABC上的角，

因此，角ACB是直角。

[III. 31]

因此，AB上的正方形等于AC、CB上的正方形之和。

[I. 47]

因此，AB上的正方形比AC上的正方形大一个CB上的正方形。

但AC等于LO。

因此，AB上的正方形比LO上的正方形大一个CB上的正方形。

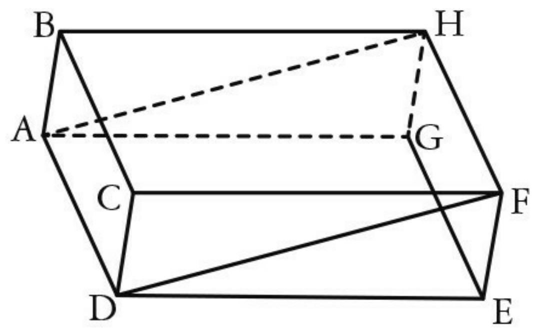
于是，如果截取OR等于BC，则AB上的正方形比LO上的正方形大一个OR上的正方形。

这就是所要作的。

命题**24**

如果若干平行平面围成一个立体，则其相对的面相等且为平行四边形。

If a solid be contained by parallel planes, the opposite planes in it are equal and parallelogrammic.



设平行平面AC、GF、AH、DF、BF、AE围成一个立体CDHG。

我说，其相对的面相等且为平行四边形。

这是因为，由于两平行平面BG、CE被平面AC所截，所以

它们的交线平行。

[XI. 16]

因此，AB平行于DC。

又，由于两平行平面BF、AE被平面AC所截，所以

它们的交线平行。

[XI. 16]

因此，BC平行于AD。

但已证明，AB平行于DC；

因此，AC是平行四边形。

类似地，可以证明，平面DF、FG、GB、BF、AE中的每一个都是平行四边形。

连接AH、DF。

于是，由于AB平行于DC，且BH平行于CF，所以

两相交直线AB、BH平行于不在同一平面上的两相交直线DC、CF；

因此，它们夹相等的角。

[XI. 10]

因此，角ABH等于角DCF。

又，由于两边AB、BH等于两边DC、CF，

[I. 34]

且角ABH等于角DCF，

因此，底AH等于底DF，

且三角形ABH等于三角形DCF。

[I. 4]

而平行四边形BG是三角形ABH的二倍，且平行四边形CE是三角形DCF的二倍；

[I. 34]

因此，平行四边形BG等于平行四边形CE。

类似地，可以证明，

AC也等于GF，

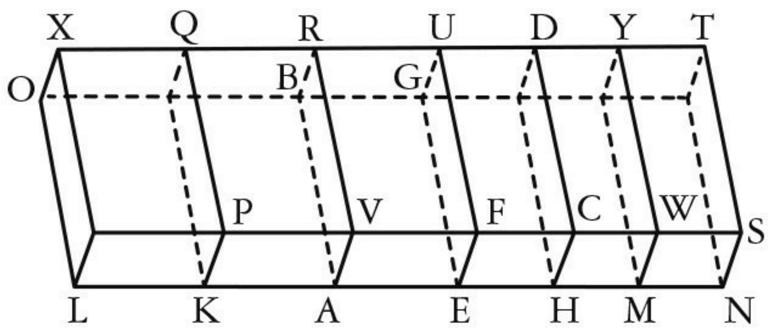
且AE等于BF。

这就是所要证明的。

命题**25**

若一个平行六面体被一个平行于相对平面的平面所截，则底比底如同立体比立体。

If a parallelepipedal solid be cut by a plane which is parallel to the opposite planes, then, as the base is to the base, so will the solid be to the solid.



设平行六面体ABCD被平行于相对平面RA、DH的平面FG所截；

我说，底AEFV比底EHCF如同立体ABFU比立体EGCD。

这是因为，沿每一个方向延长AH，

取任意数量的直线AK、KL等于AE，

又取任意数量的直线HM、MN等于EH；

并将平行四边形LP、KV、HW、MS和立体LQ、KR、DM、MT补充完整。

于是，由于直线LK、KA、AE彼此相等，所以

平行四边形LP、KV、AF也彼此相等，

且平行四边形KO、KB、AG彼此相等，

以及LX、KQ、AR彼此相等，因为它 们是相对的面。

[XI. 24]

同理，

平行四边形EC、HW、MS也彼此相等，

HG、HI、IN彼此相等，

以及DH、MY、NT彼此相等。

因此，在立体LQ、KR、AU中，各有三个平面相等。

但三个平面等于三个相对的平面；

因此，三个立体LQ、KR、AU彼此相等。

[XI. 定义10]

同理，

三个立体ED、DM、MT也彼此相等。

因此，底LF是底AF的多少倍，立体LU也是立体AU的多少倍。

同理，

底NF是底FH的多少倍，立体NU也是立体HU的同样多少倍。

又，如果底LF等于底NF，则立体LU也等于立体NU；

如果底LF大于底NF，则立体LU也大于立体NU；

如果底LF小于底NF，则立体LU也小于立体NU。

因此，有四个量，两个底AF、FH，和两个立体AU、UH，

已取底AF和立体AU的等倍量，即底LF和立体LU，

以及底HF和立体HU的等倍量，即底NF和立体NU，

且已证明，如果底LF大于底FN，则立体LU也大于立体NU，

如果底LF等于底FN，则立体LU也等于立体NU，

如果底LF小于底FN，则立体LU也小于立体NU。

因此，底AF比底FH如同立体AU比立体UH。

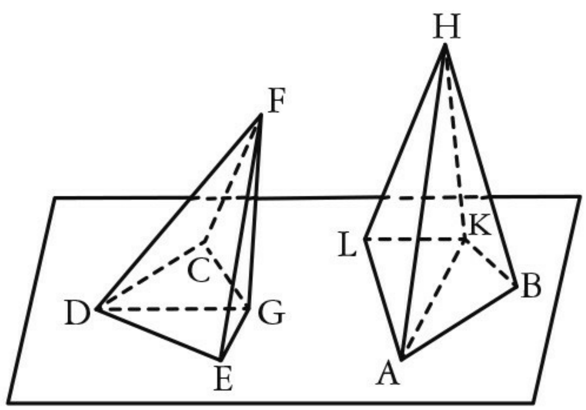
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**26**

在给定直线上的一给定点作一个立体角等于给定的立体角。

On a given straight line, and at a given point on it, to construct a solid angle equal to a given solid angle.



设AB是给定的直线，A是其上的给定点，D处的角是由角EDC、EDF、FDC所围成的给定的立体角；

于是，要求在直线AB上的点A作一个立体角等于D处的立体角。

在DF上任取一点F，

从F作FG垂直于过ED、DC的平面，设它和平面交于G，

[XI. 11]

连接DG，

在直线AB上的点A处作角BAL等于角EDC，以及角BAK等于角EDG，

[I. 23]

取AK等于DG，

从点K作KH与过BA、AL的平面成直角，

[XI. 12]

取KH等于GF，

连接HA；

我说，A处由角BAL、BAH、HAL所围成的立体角等于D处由角EDC、EDF、FDC所围成的立体角。

这是因为，设AB、DE彼此相等，

连接HB、KB、FE、GE。

于是，由于FG与所假定的平面成直角，所以FG和所假定的平面上与FG相交的所有直线都成直角；

[XI. 定义3]

因此，角FGD、FGE中的每一个都是直角。

同理，

角HKA、HKB中的每一个也都是直角。

又，由于两边KA、AB分别等于两边GD、DE，

且它们夹相等的角，

因此，底KB等于底GE。

[I. 4]

但KH也等于GF，

而它们夹直角；

因此，HB也等于FE。

[I. 4]

又，由于两边AK、KH分别等于DG、GF，

而它们夹直角；

因此，底AH等于底FD。

[I. 4]

但AB也等于DE，

因此，两边HA、AB等于两边DF、DE。

又，底HB等于FE；

因此，角BAH等于角EDF。

[I. 8]

同理，

角HAL也等于角FDC。

而角BAL也等于角EDC。

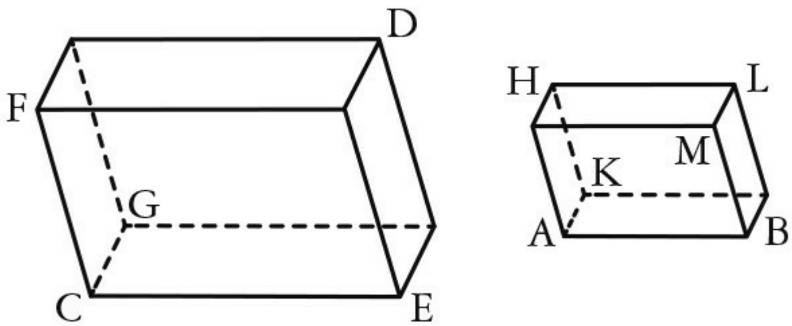
这样便在直线AB上的点A处作出了一个立体角等于给定点D处给定的立体角。

这就是所要作的。

命题**27**

在给定直线上作一个与给定的平行六面体相似且有相似位置的平行六面体。

On a given straight line to describe a parallelepipedal solid similar and similarly situated to a given parallelepipedal solid.



设AB是给定直线，CD是给定的平行六面体；于是，要求在给定直线AB上作一个与给定的平行六面体CD相似且有相似位置的平行六面体。

在直线AB上的点A处作一个由角BAH、HAK、KAB围成的立体角等于C处的立体角，因此角BAH等于角ECF，角BAK等于角ECG，角KAH等于角GCF；

并设法使EC比CG如同BA比AK，

且GC比CF如同KA比AH。

[VI. 12]

因此也有，取首末比例，

EC比CF如同BA比AH。

[V. 22]

将平行四边形HB和立体AL补充完整。

现在，由于EC比CG如同BA比AK，

于是夹相等角ECG、BAK的边成比例，

因此，平行四边形GE相似于平行四边形KB。

同理，

平行四边形GF也相似于平行四边形KH，

以及FE相似于HB；

因此，立体CD的三个平行四边形相似于立体AL的三个平行四边形。

但前面三个平行四边形与三个对面的平行四边形相等且相似，

且后面三个平行四边形与三个对面的平行四边形相等且相似；

因此，整个立体CD相似于整个立体AL。

[XI. 定义9]

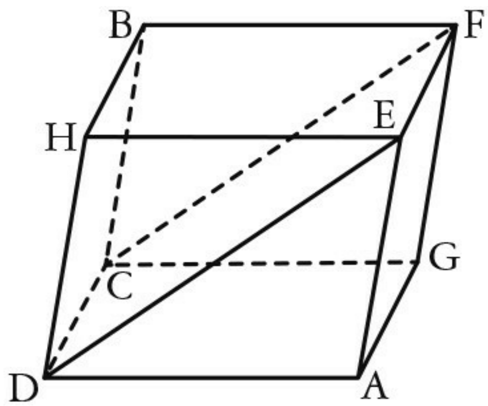
这样便在给定直线AB上作出了与给定的平行六面体CD相似且有相似位置的立体AL。

这就是所要作的。

命题**28**

若平行六面体被一个过相对的面的对角线的平面所截，则该立体被这个平面二等分。

If a parallelepipedal solid be cut by a plane through the diagonals of the opposite planes, the solid will be bisected by the plane.



设平行六面体AB被过相对的面的对角线CF、DE的平面CDEF所截；

我说，立体AB被平面CDEF二等分。

这是因为，由于三角形CGF等于三角形CFB，

[I. 34]

且三角形ADE等于三角形DEH，

而平行四边形CA也等于平行四边形EB，这是因为它们是相对的面，

且GE等于CH，

因此，由两个三角形CGF、ADE和三个平行四边形GE、AC、CE所围成的棱柱也等于由两个三角形CFB、DEH和三个平行四边形CH、

BE、CE所围成的棱柱；

这是因为，这两个棱柱是由大小和数量相等的平面所围成的。

[XI. 定义10]

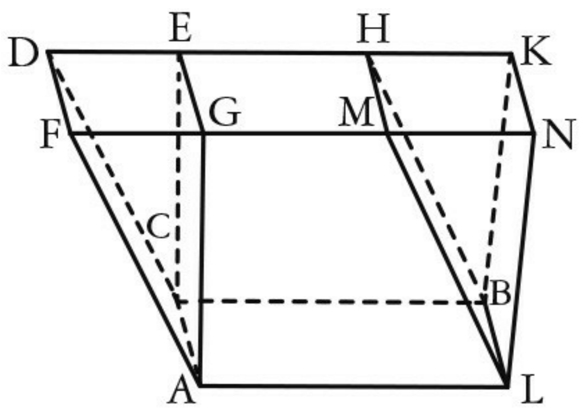
因此，整个立体AB被平面CDEF二等分。

这就是所要证明的。

命题**29**

同底同高且侧棱端点在相同直线上的平行六面体彼此相等。

Parallelepipedal solids which are on the same base and of the same height, and in which the extremities of the sides which stand up are on the same straight lines, are equal to one another.



设CM、CN是同底AB且同高的两个平行六面体，

且设其侧棱AG、AF、LM、LN、CD、CE、BH、BK的端点在相同直线FN、DK上；

我说，立体CM等于立体CN。

这是因为，由于图形CH、CK中的每一个都是平行四边形，CB等于直线DH、EK中的每一条，

[I. 34]

因此，DH也等于EK。

从它们中各减去EH；

因此，余量DE等于余量HK。

因此，三角形DCE也等于三角形HBK，

[I. 8，4]

且平行四边形DG等于平行四边形HN。

[I. 36]

同理，

三角形AFG也等于三角形MLN。

但平行四边形CF等于平行四边形BM，且CG等于BN，这是因为它们是相对的面；

因此，由两个三角形AFG、DCE和三个平行四边形AD、DG、CG所围成的棱柱等于由两个三角形MLN、HBK和三个平行四边形BM、HN、BN所围成的棱柱。

给它们分别加上以平行四边形AB为底、其相对的面是GEHM的立体；

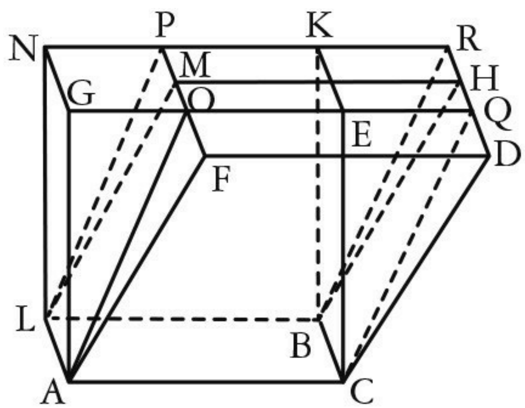
因此，整个平行六面体CM等于整个平行六面体CN。

这就是所要证明的。

命题**30**

同底同高且侧棱端点不在相同直线上的平行六面体彼此相等。

Parallelepipedal solids which are on the same base and of the same height, and in which the extremities of the sides which stand up are not on the same straight lines, are equal to one another.



设CM、CN是同底AB且同高的两个平行六面体，

且设其侧棱AF、AG、LM、LN、CD、CE、BH、BK的端点不在相同直线上；

我说，立体CM等于立体CN。

这是因为，延长NK、DH，它们交于R，

又延长FM、GE至P、Q；

连接AO、LP、CQ、BR。

于是，以平行四边形ACBL为底、以FDHM为其相对的面的立体CM等于以平行四边形ACBL为底、以OQRP为其相对的面的立体CP；

这是因为，它们同底ACBL且同高，且其侧棱AF、AO、LM、LP、CD、CQ、BH、BR的端点在相同直线FP、DR上。

[XI. 29]

但以平行四边形ACBL为底、以OQRP为其相对的面的立体CP等于以平行四边形ACBL为底、以GEKN为其相对的面的立体CN；

这是因为，它们同底ACBL且同高，且其侧棱AG、AO、CE、CQ、LN、LP、BK、BR的端点在相同直线GQ、NR上。

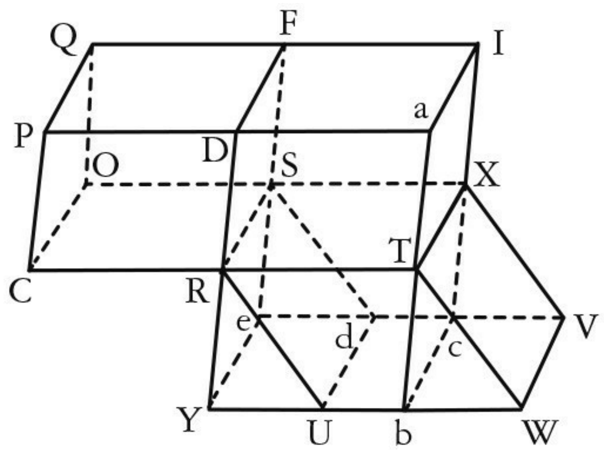
因此，立体CM也等于立体CN。

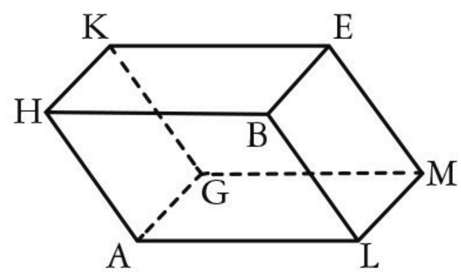
这就是所要证明的。

命题**31**

等底等高且侧棱端点不在相同直线上的平行六面体彼此相等。

Parallelepipedal solids which are on the same base and of the same height, and in which the extremities of the sides which stand up are not on the same straight lines, are equal to one another.





设平行六面体AE、CF等高且有相等的底AB、CD。

我说，立体AE等于立体CF。

首先，设侧棱HK、BE、AG、LM、PQ、DF、CO、RS与底AB、CD成直角；

延长直线CR成直线RT；

在直线RT上的点R作角TRU等于角ALB，

[I. 23]

取RT等于AL，且RU等于LB，

并将底RW和立体XU补充完整。

现在，由于两边TR、RU等于两边AL、LB，

且它们夹相等的角，

因此，平行四边形RW与平行四边形HL相等且相似。

又，由于AL等于RT，LM等于RS，

且它们夹直角，

因此，平行四边形RX等于且相似于平行四边形AM。

同理，

SU也等于且相似于LE；

因此，立体AE的三个平行四边形等于且相似于立体XU的三个平行四边形。

但前面三个平行四边形等于且相似于三个相对的平行四边形，后面三个平行四边形等于且相似于三个相对的平行四边形；

[XI. 24]

因此，整个平行六面体AE等于整个平行六面体XU。

[XI. 定义10]

延长DR、WU交于Y，

过T作aTb平行于DY，

延长PD至a，

并将立体YX、RI补充完整。

于是，以平行四边形RX为底、以Yc为其相对的面的立体XY等于以平行四边形RX为底、以UV为其相对的面的立体XU，

这是因为，它们同底RX且同高，且侧棱RY、RU、Tb、TW、Se、Sd、Xc、XV的端点在相同直线YW、eV上。

[XI. 29]

但立体XU等于立体AE；

因此，立体XY也等于立体AE。

又，由于平行四边形RUWT等于平行四边形YT，

这是因为它们同底RT且在相同的平行线RT、YW之间，

[I. 35]

而平行四边形RUWT等于平行四边形CD，因为它也等于AB，

因此，平行四边形YT也等于CD。

但DT是另一个平行四边形；

因此，CD比DT如同YT比DT。

[V. 7]

又，由于平行六面体CI被与相对平面平行的平面RF所截，所以

底CD比底DT如同立体CF比立体RI。

[XI. 25]

同理，

由于平行六面体YI被与相对平面平行的平面RX所截，所以

底YT比底TD如同立体YX比立体RI。

[XI. 25]

但底CD比DT如同YT比DT；

因此也有，立体CF比立体RI如同立体 YX比立体RI。

[V. 11]

因此，立体CF、YX中的每一个与RI都有相同的比；

因此，立体CF等于立体YX。

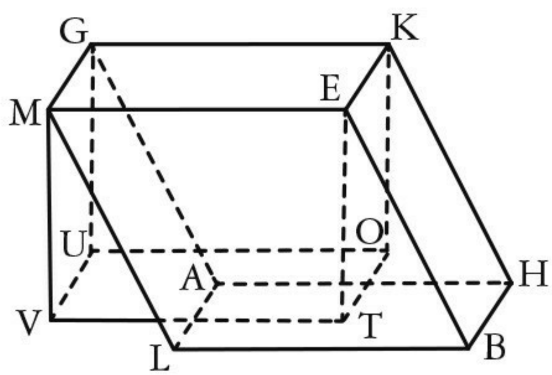
[V. 9]

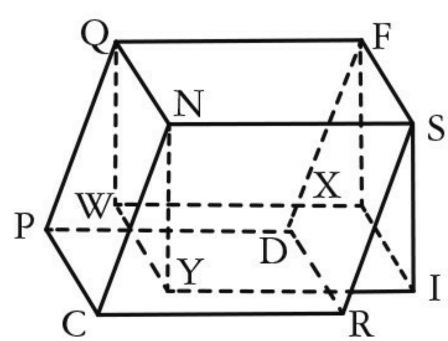
但已证明，立体YX等于AE；

因此，AE也等于CF。

其次，设侧棱AG、HK、BE、LM、CN、PQ、DF、RS与底AB、CD不成直角；

则我又说，立体AE等于立体CF。





这是因为，从点K、E、G、M、Q、F、N、S作KO、ET、GU、MV、QW、FX、NY、SI垂直于所假定的平面，且与该平面交于点O、

T、U、V、W、X、Y、I，

连接OT、OU、UV、TV、WX、WY、YI、IX。

于是，立体KV等于立体QI，

这是因为它们等底KM、QS且同高，且它们的侧棱与它们的底成直角。

但立体KV等于立体AE，

且QI等于CF；

这是因为它们同底同高，且侧棱的端点不在相同直线上。

[XI. 30]

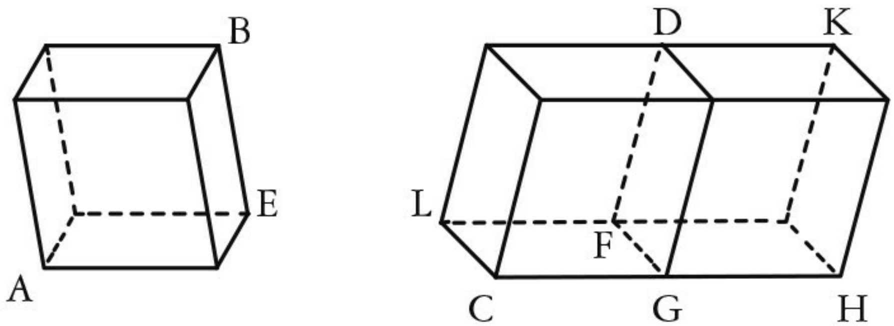
因此，立体AE也等于立体CF。

这就是所要证明的。

命题**32**

等高的平行六面体之比如同其底之比。

Parallelepipedal solids which are of the same height are to one another as their bases.



设AB、CD是等高的平行六面体；

我说，平行六面体AB、CD之比如同其底之比，即底AE比底CF如同立体AB比立体CD。

这是因为，对FG贴合出FH等于AE，

[I. 45]

且以FH为底、以CD的高为高，将平行六面体GK补充完整。

于是，立体AB等于立体GK；

这是因为它们等底AE、FH且同高。

[XI. 31]

又，由于平行六面体CK被与相对平面平行的平面DG所截，

因此，底CF比底FH如同立体CD比 立体DH。

[XI. 25]

但底FH等于底AE，

且立体GK等于立体AB；

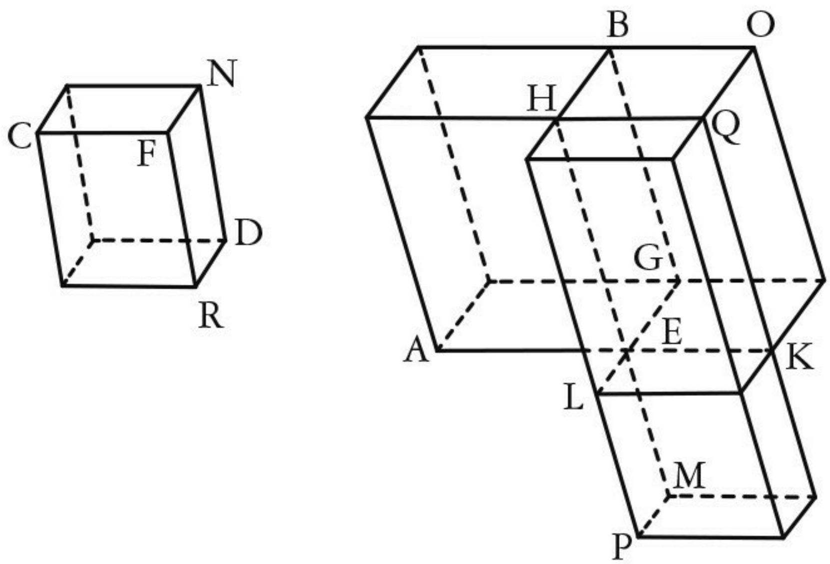
因此也有，底AE比底CF如同立体AB比立体CD。

这就是所要证明的。

命题**33**

相似平行六面体之比如同其对应边的三倍比。

Similar parallelepipedal solids are to one another in the triplicate ratio of their corresponding sides.



设AB、CD是相似平行六面体，

且设AE是与CF对应的边；

我说，立体AB比立体CD是AE比CF的三倍比。

这是因为，把AE、GE、HE延长至EK、EL、EM，

取EK等于CF，EL等于FN，以及EM等于FR，

并将平行四边形KL和立体KP补充完整。

现在，由于两边KE、EL等于两边CF、FN，

而角KEL也等于角CFN，因为角AEG也等于角CFN，这是因为立体AB、CD相似，

因此，平行四边形KL相等<且相似>于平行四边形CN。

同理，

平行四边形KM也等于且相似于CR，

以及EP相等且相似于DF；

因此，立体KP的三个平行四边形相等且相似于立体CD的三个平行四边形。

但前面三个平行四边形相等且相似于与它们相对的三个平行四边形，后面三个平行四边形相等且相似于与它们相对的三个平行四边形；

[XI. 24]

因此，整个立体KP相等且相似于整个 立体CD。

[XI. 定义10]

将平行四边形GK补充完整，

且以平行四边形GK、KL为底、以AB的高为高，将立体EO、LQ补充完整。

于是，由于立体AB、CD相似，所以

AE比CF如同EG比FN，又如同EH比FR，

而CF等于EK，FN等于EL，且FR等于EM，

因此，AE比EK如同GE比EL，也如同HE比EM。

但AE比EK如同平行四边形AG比GK，

GE比EL如同GK比KL，

且HE比EM如同QE比KM；

[VI. 1]

因此也有，平行四边形AG比GK如同GK比KL，也如同QE比KM。

但AG比GK如同立体AB比立体EO，

GK比KL如同立体OE比立体QL，

且QE比KM如同立体QL比立体KP；

[XI. 32]

因此也有，立体AB比EO如同EO比QL，也如同QL比KP。

但如果四个量成连比例，则第一个量比第四个量是第一个量比第二个量的三倍比；

[V. 定义10]

因此，立体AB比KP是AB比EO的三倍比。

但AB比EO如同平行四边形AG比GK，也如同直线AE比EK；

[VI. 1]

因此，立体AB比KP也是AE比EK的三倍比。

但立体KP等于立体CD，

且直线EK等于CF；

因此，立体AB比立体CD也是其对应边AE比其对应边CF的三倍比。

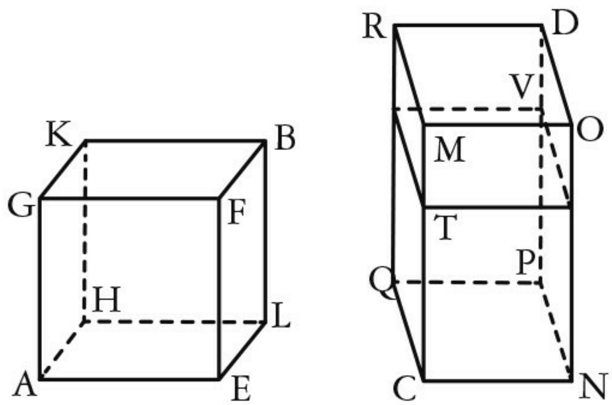
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，如果四条直线成[连]比例，则第一条比第四条如同第一条上的平行六面体比第二条上与之相似且有相似位置的平行六面体，这是因为第一条比第四条是第一条比第二条的三倍比。

命题**34**

相等平行六面体的底与高成互反比例；底与高成互反比例的平行六面体相等。

In equal parallelepipedal solids the bases are reciprocal proportional to the heights; and those parallelepipedal solids in which the bases are reciprocally proportional to the heights are equal.



设AB、CD是相等的平行六面体；

我说，在平行六面体AB、CD中，底与高成互反比例，

即底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高。

首先，设侧棱AG、EF、LB、HK、CM、NO、PD、QR与它们的底成直角；

我说，底EH比底NQ如同CM比AG。

现在，如果底EH等于底NQ，

而立体AB也等于立体CD，

则CM也等于AG。

这是因为，等高的平行六面体之比如同其底之比；

[XI. 32]

且底EH比NQ如同CM比AG，

显然，在平行六面体AB、CD中，底与高成互反比例。

其次，设底EH不等于底NQ，

但设EH较大。

现在，由于立体AB等于立体CD；

因此，CM也大于AG。

于是，取CT等于AG，

且以NQ为底、以CT为高，将平行六面体VC补充完整。

现在，由于立体AB等于立体CD，

且CV在它们之外，

而等量比同一个量，其比相同，

[V. 7]

因此，立体AB比立体CV如同立体CD比立体CV。

但立体AB比立体CV如同底EH比底NQ，

这是因为立体AB、CV等高；

[XI. 32]

又，立体CD比立体CV如同底MQ比底TQ，

[XI. 25]

也如同CM比CT；

[VI. 1]

因此也有，底EH比底NQ如同MC比CT。

但CT等于AG；

因此也有，底EH比底NQ如同MC比AG。

因此，在平行六面体AB、CD中，它们的底与高成互反比例。

又，在平行六面体AB、CD中，设它们的底与高成互反比例，即底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高；

我说，立体AB等于立体CD。

设侧棱与底成直角。

现在，如果底EH等于底NQ，

且底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高，

因此，立体CD的高也等于立体AB的高。

而等底同高的平行六面体彼此相等；

[XI. 31]

因此，立体AB等于立体CD。

其次，设底EH不等于底NQ，

但设EH较大；

因此，立体CD的高也大于立体AB的高，

即CM大于AG。

再取CT等于AG，

且类似地将CV补充完整。

由于底EH比底NQ如同MC比AG，

而AG等于CT，

因此，底EH比底NQ如同CM比CT。

但底EH比底NQ如同立体AB比立体CV，

这是因为立体AB、CV等高；

[XI. 32]

且CM比CT如同底MQ比底QT，

[VI. 1]

也如同立体CD比立体CV。

[XI. 25]

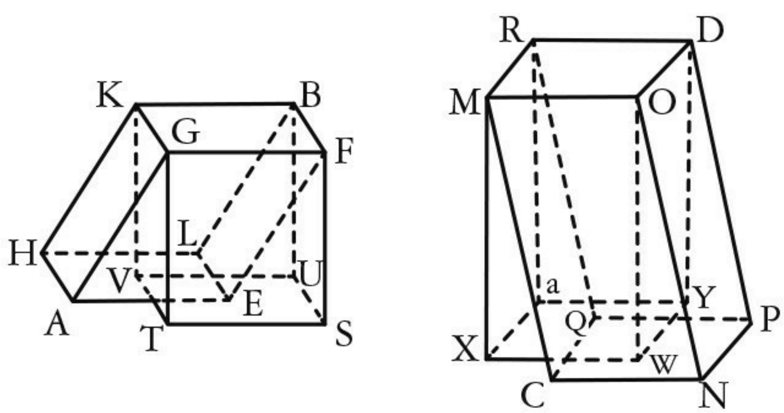
因此也有，立体AB比立体CV如同立体CD比立体CV；

因此，立体AB、CD中的每一个与CV都有相同的比。

因此，立体AB等于立体CD。

[V. 9]

现在，设侧棱FE、BL、GA、HK、ON、DP、MC、RQ与它们的底不成直角；



从点F、G、B、K、O、M、D、R向过EH、NQ的平面作垂线，

且设它们与平面交于S、T、U、V、W、X、Y、a，

将立体FV、Oa补充完整；

我说，在这种情况下，如果立体AB、CD相等，则它们的底与高也成互反比例，即底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高。

由于立体AB等于立体CD，

而AB等于BT，

这是因为它们同底FK且等高；

[XI. 29，30]

而立体CD等于DX，

这是因为它们同底RO且等高；

[XI. 29，30]

因此，立体BT也等于立体DX。

因此，底FK比底OR如同立体DX的高比立体BT的高。

[部分I]

而底FK等于底EH，

且底OR等于底NQ；

因此，底EH比底NQ如同立体DX的高比立体BT的高。

但立体DX、BT分别与立体DC、BA同高；

因此，底EH比底NQ如同立体DC的高比立体AB的高。

因此，在平行六面体AB、CD中，底与高成互反比例。

又，在平行六面体AB、CD中，设底与高成互反比例，

即底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高；

我说，立体AB等于立体CD。

这是因为，同样作图，

由于底EH比底NQ如同立体CD的高比立体AB的高，

而底EH等于底FK，

且NQ等于OR，

因此，底FK比底OR如同立体CD的高比立体AB的高。

但立体AB、CD分别与立体BT、DX同高；

因此，底FK比底OR如同立体DX的高比立体BT的高。

因此，在平行六面体BT、DX中，底与高成互反比例；

因此，立体BT等于立体DX。

[部分I]

但BT等于BA，

这是因为它们同底FK且等高；

[XI. 29，30]

而立体DX等于立体DC。

[XI. 29，30]

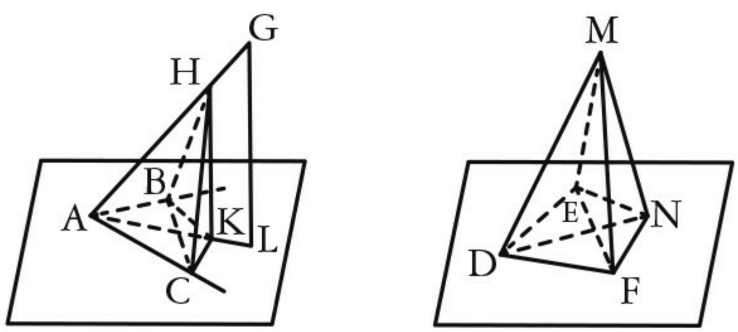
因此，立体AB也等于立体CD。

这就是所要证明的。

命题**35**

如果有两个相等的平面角，在其顶点作面外直线分别与原直线夹角相等，若在面外直线上任取一点，并从该点向原来的角所在平面作垂线，则连接垂足与原来角顶点的直线与面外直线夹角相等。

If there be two equal plane angles, and on their vertices then be set up elevated straight lines containing equal angles with the original straight lines respectively, if on the elevated straight lines points be taken at random and perpendiculars be drawn from them to the planes in which the original angles are, and if from the points so arising in the planes straight lines be joined to the vertices of the original angles, they will contain, with the elevated straight lines, equal angles.



设BAC、EDF是两个相等的直线角，从点A、D作面外直线AG、DM，它们分别与原直线夹角相等，即角MDE等于角GAB，角MDF等于角GAC，

在AG、DM上任取点G、M，

从点G、M作GL、MN垂直于过BA、AC的平面和过ED、DF的平面，设它们与两平面交于L、N，

连接LA、ND；

我说，角GAL等于角MDN。

取AH等于DM，

过点H作HK平行于GL。

但GL垂直于过BA、AC的平面；

因此，HK也垂直于过BA、AC的平面。

[XI. 8]

从点K、N作KC、NF、KB、NE垂直于直线AC、DF、AB、DE，

连接HC、CB、MF、FE。

由于HA上的正方形等于HK、KA上的正方形之和，

且KC、CA上的正方形之和等于KA上的正方形，

[I. 47]

因此，HA上的正方形也等于HK、KC、CA上的正方形之和。

但HC上的正方形等于HK、KC上的正方形之和；

[I. 47]

因此，HA上的正方形等于HC、CA上的正方形之和。

因此，角HCA是直角。

[I. 48]

同理，

角DFM也是直角。

因此，角ACH等于角DFM。

但角HAC也等于角MDF。

因此，三角形MDF、HAC有两个角分别等于两个角，一边等于一边，即等角的对边HA等于MD；

因此，它们其余的边也等于其余的边。

[I. 26]

因此，AC等于DF。

类似地，可以证明，AB也等于DE。

于是，由于AC等于DF，且AB等于DE，所以

两边CA、AB等于两边FD、DE。

又，角CAB也等于角FDE；

因此，底BC等于底EF，三角形等于三角形，其余的角等于其余的角；

[I. 4]

因此，角ACB等于角DFE。

但直角ACK也等于直角DFN；

因此，其余的角BCK也等于其余的角EFN。

同理，

角CBK也等于角FEN。

因此，三角形BCK、EFN有两个角分别等于两个角，一边等于一边，即等角的夹边BC等于EF；

因此，它们其余的边也等于其余的边。

[I. 26]

因此，CK等于FN。

但AC也等于DF；

因此，两边AC、CK等于两边DF、FN；

且它们都夹直角。

因此，底AK等于底DN。

[I. 4]

又，由于AH等于DM，所以

AH上的正方形也等于DM上的正方形。

但AK、KH上的正方形之和等于AH上的正方形，

这是因为角AKH是直角；

[I. 47]

且DN、NM上的正方形之和等于DM上的正方形，

这是因为角DNM是直角；

[I. 47]

因此，AK、KH上的正方形之和等于DN、NM上的正方形之和；

且其中AK上的正方形等于DN上的正方形；

因此，其余的KH上的正方形等于NM上的正方形；

因此，HK等于MN。

又，由于两边HA、AK分别等于两边MD、DN，

且已证明，底HK等于底MN，

因此，角HAK等于角MDN。

[I. 8]

这就是所要证明的。

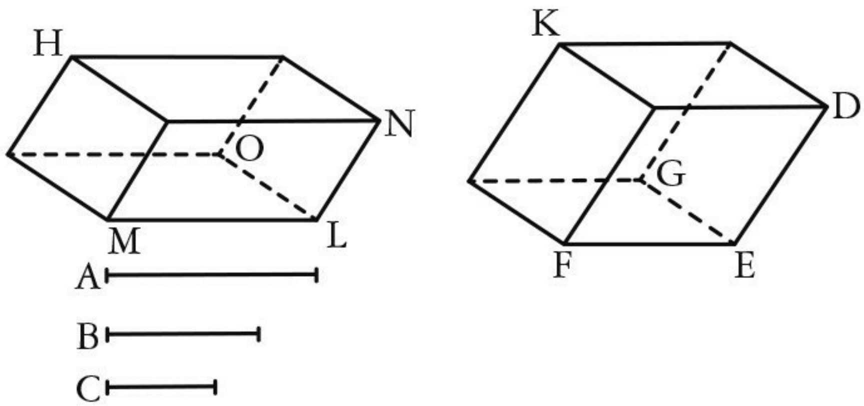
推论　由此显然可得，如果有两个相等的平面角，在这两个角上作

相等的面外直线，且面外直线分别与原直线夹相等的角，则从面外直线端点向原角所在平面所作的垂线相等。

命题**36**

若三条直线成比例，则由这三条直线构成的平行六面体等于在中项上作出的等边且与前一立体等角的平行六面体。

If three straight lines be proportional, the parallelepipedal solid formed out of the three is equal to the parallelepipedal solid on the mean which is equilateral, but equiangular with the aforesaid solid.



设A、B、C是成比例的三条直线，即A比B如同B比C；

我说，由A、B、C所构成的立体等于在B上作出的等边且与前一立体等角的立体。

在E处作出由三个角DEG、GEF、FED所围成的立体角，

取直线DE、GE、EF中的每一条等于B，

并将平行六面体EK补充完整，

取LM等于A，

在直线LM上的点L处作一个立体角等于E处的立体角，即由NLO、OLM、MLN所围成的立体角；

取LO等于B，LN等于C。

现在，由于A比B如同B比C，

而A等于LM，B等于直线LO、ED中的每一条，以及C等于LN，

因此，LM比EF如同DE比LN。

于是，夹等角NLM、DEF的边成互反比例；

因此，平行四边形MN等于平行四边形DF。

[VI. 14]

又，由于角DEF、NLM是两个平面直线角，在其顶点所作的面外直线LO、EG彼此相等，且分别与原直线夹等角，

因此，从点G、O向过NL、LM和DE、EF的平面所作的垂线相等；

[XI. 35，推论]

因此，立体LH、EK同高。

但等底同高的平行六面体彼此相等；

[XI. 31]

因此，立体HL等于立体EK。

而LH是由A、B、C所构成的立体，EK是在B上作出的立体；

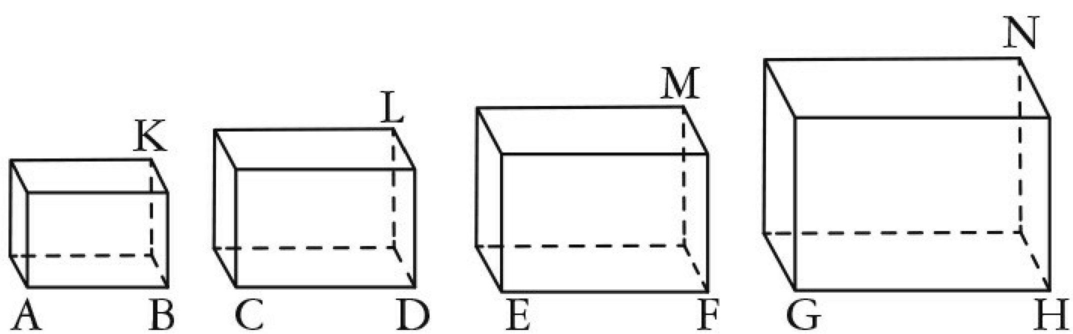
因此，由A、B、C所构成的平行六面体等于在B上作出的等边且与前一立体等角的立体。

这就是所要证明的。

命题**37**

若四条直线成比例，则在它们上作的相似且有相似位置的平行六面体也成比例；又，若在它们上作的相似且有相似位置的平行六面体成比例，则这四条直线本身也成比例。

If four straight lines be proportional, the parallelepipedal solids on them which are similar and similarly described will also be proportional; and, if the parallelepipedal solids on them which are similar and similarly described be proportional, the straight lines will themselves also be proportional.



设AB、CD、EF、GH是成比例的四条直线，即AB比CD如同EF比GH；

且在AB、CD、EF、GH上作相似且有相似位置的平行六面体KA、LC、ME、NG；

我说，KA比LC如同ME比NG。

这是因为，由于平行六面体KA与LC相似，

因此，KA比LC是AB比CD的三倍比。

[XI. 33]

同理，

ME比NG也是EF比GH的三倍比。

[XI. 33]

而AB比CD如同EF比GH。

因此也有，AK比LC如同ME比NG。

其次，设立体ME比立体NG如同立体AK比立体LC；

我说，直线AB比CD如同EF比GH。

这是因为，由于KA比LC是AB比CD的三倍比，

[XI. 33]

且ME比NG也是EF比GH的三倍比，

[XI. 33]

且KA比LC如同ME比NG，

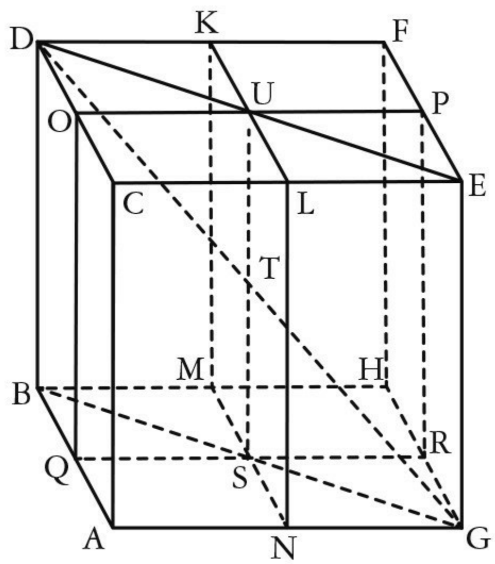
因此也有，AB比CD如同EF比GH。

这就是所要证明的。

命题**38**

若一个立方体相对的面的边被二等分，且过分点作平面，则这些平面的交线与立方体的对角线彼此二等分。

If the sides of the opposite planes of a cube be bisected, and planes be carried through the points of section, the common section of the planes and the diameter of the cube bisect one another.



设立方体AF相对的面CF、AH的各边在点K、L、M、N、O、Q、P、R被二等分，且过分点作平面KN、OR；

设US是平面的交线，且DG是立方体AF的对角线。

我说，UT等于TS，DT等于TG。

这是因为，连接DU、UE、BS、SG。

于是，由于DO平行于PE，所以

内错角DOU、UPE彼此相等。

[I. 29]

又，由于DO等于PE，OU等于UP，

且它们夹相等的角，

因此，底DU等于底UE，

三角形DOU等于三角形PUE，

且其余的角等于其余的角；

[I. 4]

因此，角OUD等于角PUE。

因此，DUE是一条直线。

[I. 14]

同理，BSG也是一条直线，

且BS等于SG。

现在，由于CA等于且平行于DB，

而CA也等于且平行于EG，

因此，DB也等于且平行于EG。

[XI. 9]

而直线DE、BG连接它们的端点；

因此，DE平行于BG。

[I. 33]

因此，角EDT等于角BGT，

这是因为它们是内错角；

[I. 29]

且角DTU等于角GTS。

[I. 15]

因此，三角形DTU、GTS有两角等于两角，一边等于一边，即等角所对的一边，即DU等于GS，

这是因为它们是DE、BG的一半；

因此，其余的边也等于其余的边。

[I. 26]

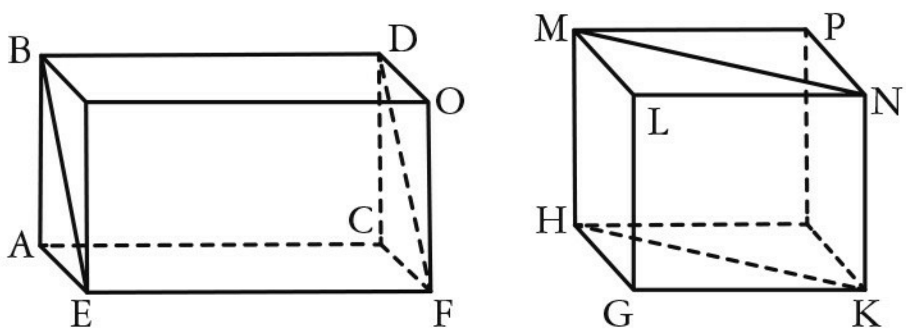
因此，DT等于TG，UT等于TS。

这就是所要证明的。

命题**39**

若有两个等高的棱柱，一个以平行四边形为底，另一个以三角形为底，且平行四边形是三角形的二倍，则两棱柱相等。

If there be two prisms of equal height, and one have a parallelogram as base and the other a triangle, and if the parallelogram be double of the triangle, the prisms will be equal.



设ABCDEF、GHKLMN是两个等高的棱柱，

一个以平行四边形AF为底，另一个以三角形GHK为底，

且平行四边形AF是三角形GHK的二倍；

我说，棱柱ABCDEF等于棱柱GHKLMN。

将立体AO、GP补充完整。

由于平行四边形AF是三角形GHK的二倍，

而平行四边形HK也是三角形GHK的二倍，

[I. 34]

因此，平行四边形AF等于平行四边形HK。

但等底同高的平行六面体彼此相等；

[XI. 31]

因此，立体AO等于立体GP。

而棱柱ABCDEF是立体AO的一半，

且棱柱GHKLMN是立体GP的一半；

[XI. 28]

因此，棱柱ABCDEF等于棱柱GHKLMN。

这就是所要证明的。

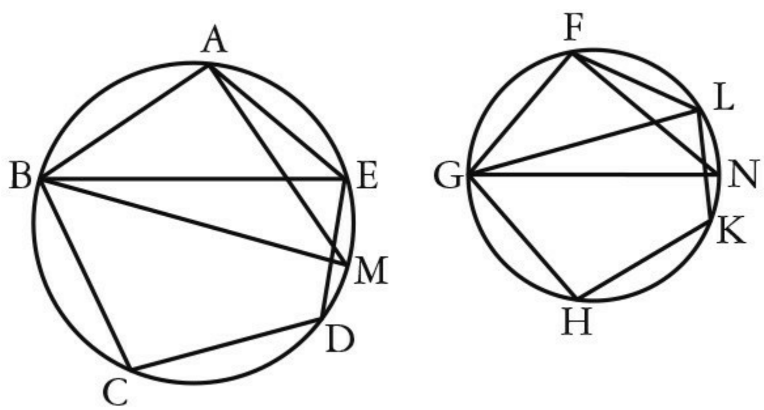
第十二卷

命题 **Proposition**

命题**01**

圆内接相似多边形之比如同直径上的正方形之比。

Similar polygons inscribed in circles are to one another as the squares on the diameters.



设ABC、FGH是圆，

ABCDE、FGHKL是内接于它们的相似多边形，且BM、GN是圆的直径；

我说，BM上的正方形比GN上的正方形如同多边形ABCDE比多边形FGHKL。

连接BE、AM、GL、FN。

现在，由于多边形ABCDE相似于多边形FGHKL，所以

角BAE等于角GFL，

且BA比AE如同GF比FL。

[VI. 定义1]

于是，两个三角形BAE、GFL有一个角等于一个角，即角BAE等于角GFL，且夹角相等的边成比例；

因此，三角形ABE与三角形FGL是等角的。

[VI. 6]

因此，角AEB等于角FLG。

但角AEB等于角AMB，

这是因为它们在同一圆周上；

[III. 27]

且角FLG等于角FNG；

因此，角AMB也等于角FNG。

但直角BAM也等于直角GFN；

[III. 31]

因此，其余的角等于其余的角。

[I. 32]

因此，三角形ABM与三角形FGN是等角的。

因此有比例，BM比GN如同BA比GF。

[VI. 4]

但BM上的正方形比GN上的正方形是BM比GN的二倍比，

且多边形ABCDE比多边形FGHKL是BA比GF的二倍比；

[VI. 20]

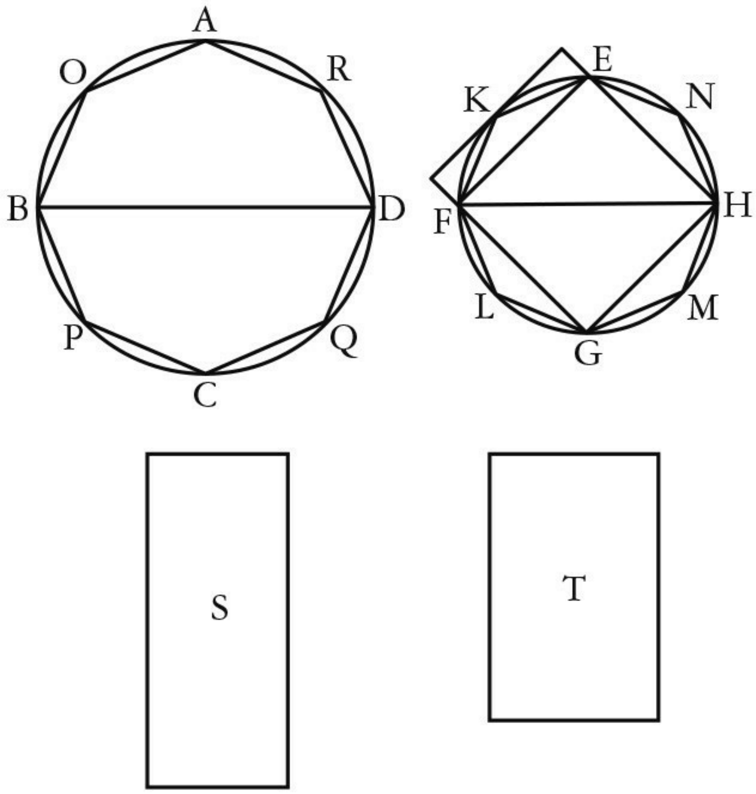
因此也有，BM上的正方形比GN上的正方形如同多边形ABCDE比多边形FGHKL。

这就是所要证明的。

命题**02**

圆与圆之比如同直径上的正方形之比。

Circles are to one another as the squares on the diameters.



设ABCD、EFGH是圆，BD、FH是它们的直径；

我说，圆ABCD比圆EFGH如同BD上的正方形比FH上的正方形。

这是因为，如果BD上的正方形比FH上的正方形不如同圆ABCD比圆EFGH，

那么BD上的正方形比FH上的正方形如同圆ABCD比某个小于圆EFGH的面积或某个大于圆EFGH的面积。

首先，设成比例的是一个小于圆EFGH的面积S。

设正方形EFGH内接于圆EFGH；于是，这个内接正方形大于圆EFGH的一半，因为如果过点E、F、G、H作圆的切线，则正方形EFGH是圆外切正方形的一半，而圆小于外切正方形；

因此，内接正方形EFGH大于圆EFGH的一半。

设圆周EF、FG、GH、HE在点K、L、M、N被二等分，

且连接EK、KF、FL、LG、GM、MH、HN、NE；

因此，三角形EKF、FLG、GMH、HNE中的每一个也大于包含该三角形的弓形的一半，因为如果过点K、L、M、N作圆的切线，且在直线EF、FG、GH、HE上将平行四边形补充完整，则三角形EKF、FLG、GMH、HNE中的每一个都是包含它的平行四边形的一半，

而包含它的弓形小于包含它的平行四边形；

因此，三角形EKF、FLG、GMH、HNE中的每一个都大于包含它的弓形的一半。

于是，将其余的圆周二等分并连接直线，这样继续作下去，可使余下的弓形之和小于圆EFGH超出面积S的部分。

这是因为，在第十卷的命题1中已经证明，给定两个不等的量，从较大量中减去一个大于它的一半的量，再从余量中减去大于该余量一半的量，这样继续作下去，则会得到某个小于较小量的余量。

这样做余下的弓形，设圆EFGH在EK、KF、FL、LG、GM、MH、HN、NE上的弓形之和小于圆EFGH超出面积S的部分。

因此，余量即多边形EKFLGMHN大于面积S。

设圆ABCD的内接多边形AOBPCQDR也相似于多边形EKFLGMHN；

因此，BD上的正方形比FH上的正方形如同多边形AOBPCQDR比多

边形EKFLGMHN。

[XII. 1]

但BD上的正方形比FH上的正方形也如同圆ABCD比面积S；

因此也有，圆ABCD比面积S如同多边形AOBPCQDR比多边形EKFLGMHN；

[V. 11]

因此，取更比例，圆ABCD比它的内接多边形如同面积S比多边形EKFLGMHN。

[V. 16]

但圆ABCD大于它的内接多边形；

因此，面积S也大于多边形EKFLGMHN。

但它也小于多边形EKFLGMHN：

这是不可能的。

因此，BD上的正方形比FH上的正方形不如同圆ABCD比某个小于圆EFGH的面积。

类似地，可以证明，圆EFGH比某个小于圆ABCD的面积也不如同FH上的正方形比BD上的正方形。

其次我说，圆ABCD比某个大于圆EFGH的面积也不如同BD上的正方形比FH上的正方形。

这是因为，如果可能，设成比例的是一个大于圆EFGH的面积S。

因此，取反比例，FH上的正方形比DB上的正方形如同面积S比圆ABCD。

但面积S比圆ABCD如同圆EFGH比某个小于圆ABCD的面积；

因此也有，FH上的正方形比BD上的正方形如同圆EFGH比某个小于圆ABCD的面积：

[V. 11]

已经证明这是不可能的。

因此，BD上的正方形比FH上的正方形不如同圆ABCD比某个大于圆EFGH的面积。

而已经证明，成比例的也不是某个小于圆EFGH的面积；

因此，BD上的正方形比FH上的正方形如同圆ABCD比圆EFGH。

这就是所要证明的。

引理　　我说，若面积S大于圆EFGH，则面积S比圆ABCD如同圆EFGH比某个小于圆ABCD的面积。

设法使面积S比圆ABCD如同圆EFGH比面积T。

我说，面积T小于圆ABCD。

这是因为，由于面积S比圆ABCD如同圆EFGH比面积T，因此，取更比例，面积S比圆EFGH等于圆ABCD比面积T。

[V. 16]

但面积S大于圆EFGH；

因此，圆ABCD大于面积T。

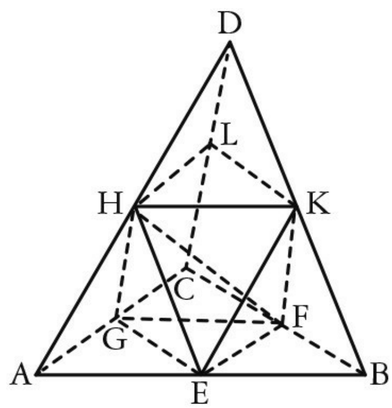
因此，面积S比圆ABCD如同圆EFGH比某个小于圆ABCD的面积。

这就是所要证明的。

命题**03**

任一以三角形为底的棱锥可被分成两个相等的、与整个棱锥相似且以三角形为底的棱锥，以及其和大于整个棱锥一半的两个相等的棱柱。

Any pyramid which has a triangular base is divided into two pyramids equal and similar to one another, similar to the whole and having triangular bases, and into two equal prisms; and the two prisms are greater than the half of the whole pyramid.



设有一个以三角形ABC为底且以点D为顶点的棱锥；

我说，棱锥ABCD可被分成两个相等的、与整个棱锥相似且以三角形为底的棱锥，以及其和大于整个棱锥一半的两个相等的棱柱。

这是因为，设AB、BC、CA、AD、DB、DC在点E、F、G、H、K、L被二等分，连接HE、EG、GH、HK、KL、LH、KF、FG。

由于AE等于EB，且AH等于DH，

因此，EH平行于DB。

[VI. 2]

同理，

HK也平行于AB。

因此，HEBK是平行四边形；

因此，HK等于EB。

[I. 34]

但EB等于EA；

因此，AE也等于HK。

但AH也等于HD；

因此，两边EA、AH分别等于两边KH、HD，

而角EAH等于角KHD；

因此，底EH等于底KD。

[I. 4]

因此，三角形AEH等于且相似于三角形HKD。

同理，

三角形AHG也等于且相似于三角形HLD。

现在，由于两相交直线EH、HG平行于两相交直线KD、DL，且不在同一平面上，所以

它们的夹角相等。

[XI. 10]

因此，角EHG等于角KDL。

又，由于两直线EH、HG分别等于KD、DL，且角EHG等于角KDL，

因此，底EG等于底KL；

[I. 4]

因此，三角形EHG相等且相似于三角形KDL。

同理，

三角形AEG也等于且相似于三角形HKL。

因此，以三角形AEG为底且以点H为顶点的棱锥等于且相似于以三角形HKL为底且以点D为顶点的棱锥。

[XI. 定义10]

又，由于HK平行于三角形ADB的一边AB，所以

三角形ADB与三角形DHK是等角的，

[I. 29]

且它们的边成比例；

因此，三角形ADB相似于三角形DHK。

[VI. 定义1]

同理，

三角形DBC也相似于三角形DKL，

且三角形ADC相似于三角形DLH。

现在，由于两相交直线BA、AC平行于两相交直线KH、HL，且不在同一平面上，所以

它们的夹角相等。

[XI. 10]

因此，角BAC等于角KHL。

而BA比AC如同KH比HL；

因此，三角形ABC相似于三角形HKL。

因此也有，以三角形ABC为底且以点D为顶点的棱锥相似于以三角形HKL为底且以点D为顶点的棱锥。

但已证明，以三角形HKL为底且以点D为顶点的棱锥相似于以三角形AEG为底且以点H为顶点的棱锥。

因此，棱锥AEGH、HKLD中的每一个都相似于整个棱锥ABCD。

其次，由于BF等于FC，所以

平行四边形EBFG等于二倍的三角形GFC。

又，由于如果有两个等高的棱柱，一个以平行四边形为底，另一个以三角形为底，且平行四边形是三角形的二倍，则两棱柱相等，

[XI. 39]

因此，由两个三角形BKF、EHG和三个平行四边形EBFG、EBKH、HKFG所围成的棱柱等于由两个三角形GFC、HKL和三个平行四边形KFCL、LCGH、HKFG所围成的棱柱。

显然，以平行四边形EBFG为底且以直线HK为其对棱的棱柱与以三角形GFC为底且以三角形HKL为其对面的棱柱中的每一个都大于以三角形AEG、HKL为底且以点H、D为顶点的棱锥中的每一个，

因为如果连接直线EF、EK，则以平行四边形EBFG为底且以HK为其对棱的棱柱大于以三角形EBF为底且以点K为顶点的棱锥。

但以三角形EBF为底且以点K为顶点的棱锥等于以三角形AEG为底且以点H为顶点的棱锥；

这是因为它们由相等且相似的平面所围成。

因此也有，以平行四边形EBFG为底且以直线HK为其对棱的棱柱大于以三角形AEG为底且以点H为顶点的棱锥。

但以平行四边形EBFG为底且以直线HK为其对棱的棱柱等于以三角形GFC为底且以三角形HKL为其对面的棱柱，

而以三角形AEG为底且以点H为顶点的棱锥等于以三角形HKL为底且以点D为顶点的棱锥。

因此，上述棱柱之和大于以三角形AEG、HKL为底且以点H、D为顶点的上述棱锥之和。

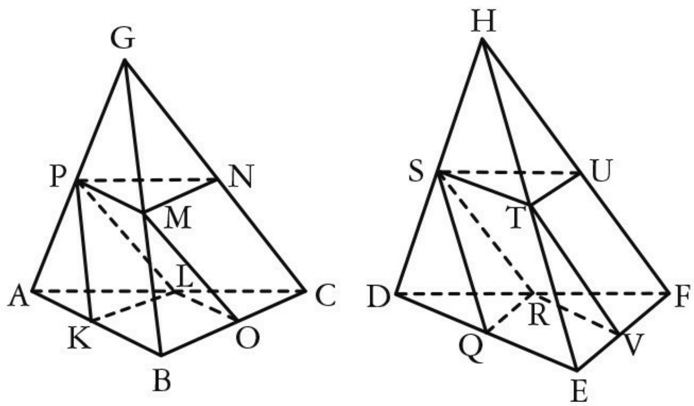
因此，以三角形ABC为底且以点D为顶点的整个棱锥已被分成两个彼此相等的棱锥和两个相等的棱柱，且这两个棱柱之和大于整个棱锥的一半。

这就是所要证明的。

命题**04**

若有以三角形为底且同高的两个棱锥，都被分成彼此相等且与整个棱锥相似的两个棱锥和两个相等的棱柱，则一个棱锥的底比另一个棱锥的底如同一个棱锥中的所有棱柱之和比另一个棱锥中相等个数的所有棱柱之和。

If there be two pyramids of the same height which have triangular bases, and each of them be divided into two pyramids equal to one another and similar to the whole, and into two equal prisms, then, as the base of the one pyramid is to the base of the other pyramid, so will all the prisms in the one pyramid be to all the prisms, being equal in multitude, in the other pyramid.



设有同高且以三角形ABC、DEF为底，以点G、H为顶点的两个棱锥，

且设它们中的每一个都被分成彼此相等且与整个棱锥相似的两个棱锥和两个相等的棱柱；

[XII. 3]

我说，底ABC比底DEF如同棱锥ABCG中所有棱柱之和比棱锥DEFH中相等个数的棱柱之和。

这是因为，由于BO等于OC，且AL等于LC。

因此，LO平行于AB，

且三角形ABC相似于三角形LOC。

同理，

三角形DEF也相似于三角形RVF。

又，由于BC是CO的二倍，EF是FV的二倍，

因此，BC比CO如同EF比FV。

又，在BC、CO上作相似且有相似位置的直线形ABC、LOC，且在EF、FV上作相似且有相似位置的直线形DEF、RVF；

因此，三角形ABC比三角形LOC如同三角形DEF比三角形RVF；

[VI. 22]

因此，取更比例，三角形ABC比三角形DEF如同三角形LOC比三角形RVF。

[V. 16]

但三角形LOC比三角形RVF如同以三角形LOG为底且以三角形PMN为其对面的棱柱比以三角形RVF为底且以STU为其对面的棱柱；

[下面的引理]

因此也有，三角形ABC比三角形DEF如同以三角形LOC为底且以PMN为其对面的棱柱比以三角形RVF为底且以STU为其对面的棱柱。

但上述棱柱之比如同以平行四边形KBOL为底且以直线PM为其对棱的棱柱比以平行四边形QEVR为底且以直线ST为其对棱的棱柱。

[XI. 39；参见XII. 3]

因此也有，这两个棱柱之比，即以平行四边形KBOL为底且以PM为

其对棱的棱柱比以三角形LOC为底且以PMN为其对面的棱柱，如同以QEVR为底且以直线ST为其对棱的棱柱比以三角形RVF为底且以STU为其对面的棱柱。

[V. 12]

因此也有，底ABC比底DEF如同上述两个棱柱之和比上述两个棱柱之和。

类似地，如果棱锥PMNG、STUH被分成两个棱柱和两个棱锥，

则底PMN比底STU如同棱锥PMNG中的两个棱柱之和比棱锥STUH中的两个棱柱之和。

但底PMN比底STU如同底ABC比底DEF；

这是因为三角形PMN、STU分别等于三角形LOC、RVF。

因此也有，底ABC比底DEF如同这四个棱柱比这四个棱柱。

类似地也有，如果将其余的棱锥再分成两个棱锥和两个棱柱，则底ABC比底DEF如同棱锥ABCG中所有棱柱之和比棱锥DEFH中相等个数的所有棱柱之和。

这就是所要证明的。

引理　但三角形LOC比三角形RVF如同以三角形LOC为底且以PMN为其对面的棱柱比以三角形RVF为底且以STU为其对面的棱柱，我们必须证明如下。

在同样的图中，从G、H向平面ABC、DEF作垂线；两垂线必然相等，因为根据假设，两棱锥等高。

现在，由于两直线GC和从G所作的垂线被平行平面ABC、PMN所截，所以

截得的直线有相同的比。

[XI. 17]

而CG被平面PMN二等分于N；

因此，从G到平面ABC的垂线也被平面PMN二等分。

同理，

从H到平面DEF的垂线也被平面STU二等分。

又，从G、H到平面ABC、DEF的垂线相等；

因此，从三角形PMN、STU到平面ABC、DEF的垂线也相等。

因此，以三角形LOC、RVF为底且以PMN、STU为其对面的棱柱等高。

因此也有，由上述棱柱所作的等高的平行六面体之比如同其底之比；

[X. 32]

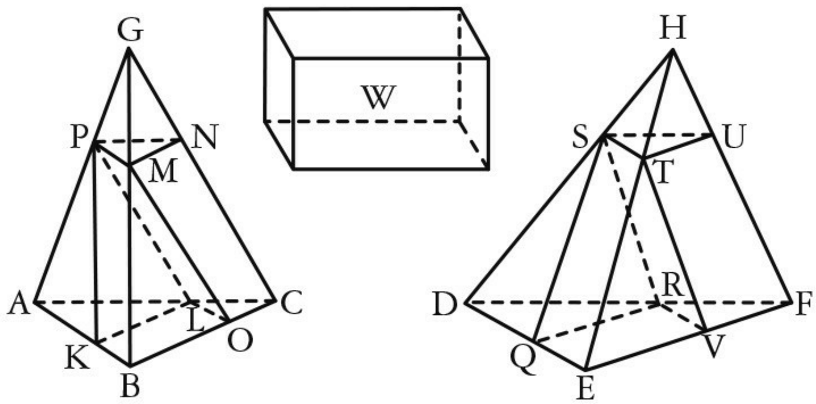
因此，它们的一半即上述棱柱之比如同底LOC比底RVF。

这就是所要证明的。

命题**05**

以三角形为底且同高的棱锥之比如同底之比。

Pyramids which are of the same height and have triangular bases are to one another as the bases.



设有以三角形ABC、DEF为底且以点G、H为顶点的同高的棱锥；

我说，底ABC比底DEF如同棱锥ABCG比棱锥DEFH。

这是因为，如果棱锥ABCG比棱锥DEFH不如同底ABC比底DEF，则底ABC比底DEF如同棱锥ABCG比某个小于棱锥DEFH或大于棱锥DEFH的立体。

首先，设成比例的是一个小于棱锥DEFH的立体W，且将棱锥DEFH分成彼此相等且与整个棱锥相似的两个棱锥和两个相等的棱柱；

则两个棱柱之和大于整个棱锥的一半。

[XII. 3]

再以类似的方式去分这样得到的棱锥，

这样继续作下去，直至由棱锥DEFH得到某些小于棱锥DEFH超出立体W的部分的棱锥。

[X. 1]

为了论证，设由此得到的棱锥是DQRS、STUH；

因此，棱锥DEFH中余下的棱柱之和大于立体W。

设棱锥ABCG也被类似地分割，且分割的次数类似于棱锥DEFH；

因此，底ABC比底DEF如同棱锥ABCG中的棱柱之和比棱锥DEFH中的棱柱之和。

[XII. 4]

但底ABC比底DEF也如同棱锥ABCG比立体W；

因此也有，棱锥ABCG比立体W如同棱锥ABCG中的棱柱之和比棱锥DEFH内部的棱柱之和；

[V. 11]

因此，取更比例，棱锥ABCG比它中的棱柱之和如同立体W比棱锥DEFH中的棱柱之和。

[V. 16]

但棱锥ABCG大于它内部的棱柱之和；

因此，立体W也大于棱锥DEFH中的棱柱之和。

但它也小于：

这是不可能的。

因此，棱锥ABCG比任何小于棱锥DEFH的立体不如同底ABC比底DEF。

类似地，可以证明，棱锥DEFH比任何小于棱柱ABCG的立体也不如同底DEF比底ABC。

其次我说，棱锥ABCG比任何大于棱锥DEFH的立体也不如同底

ABC比底DEF。

这是因为，如果可能，设成比例的是一个大于棱锥DEFH的立体W；

因此，取反比例，底DEF比底ABC如同立体W比棱锥ABCG。

但前已证明，立体W比立体ABCG如同棱锥DEFH比某个小于棱锥ABCG的立体；

[XII. 2，引理]

因此也有，底DEF比底ABC如同棱锥DEFH比某个小于棱锥ABCG的立体：

[V. 11]

已经证明这是荒谬的。

因此，棱锥ABCG比任何大于棱锥DEFH的立体不如同底ABC比底DEF。

但已证明，棱锥ABCG比任何小于棱锥DEFH的立体也不如同底ABC比底DEF。

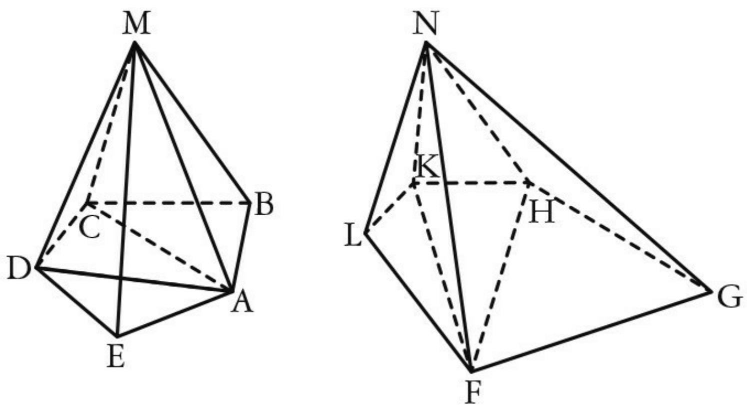
因此，底ABC比底DEF如同棱锥ABCG比棱锥DEFH。

这就是所要证明的。

命题**06**

同高且以多边形为底的棱锥之比如同底之比。

Pyramids which are of the same height and have polygonal bases are to one another as the bases.



设同高的两个棱锥以多边形ABCDE、FGHKL为底且以点M、N为顶点；

我说，底ABCDE比底FGHKL如同棱锥ABCDEM比棱锥FGHKLN。

连接AC、AD、FH、FK。

于是，由于ABCM、ACDM是以三角形为底且等高的两个棱锥，所以

它们之比如同底之比；

[XII. 5]

因此，底ABC比底ACD如同棱锥ABCM比棱锥ACDM。

又，取合比例，底ABCD比底ACD如同棱锥ABCDM比棱锥ACDM。

[V. 18]

但也有，底ACD比底ADE如同棱锥ACDM比棱锥ADEM。

[XII. 5]

因此，取首末比例，底ABCD比底ADE如同棱锥ABCDM比棱锥ADEM。

[V. 22]

又，取合比例，底ABCDE比底ADE如同棱锥ABCDEM比棱锥ADEM。

[V. 18]

类似地，也可以证明，底FGHKL比底FGH如同棱锥FGHKLN比棱锥FGHN。

又，由于ADEM、FGHN是以三角形为底且等高的两个棱锥，

因此，底ADE比底FGH如同棱锥 ADEM比棱锥FGHN。

[XII. 5]

但底ADE比底ABCDE如同棱锥ADEM比棱锥ABCDEM。

因此也有，取首末比例，底ABCDE比底FGH如同棱锥ABCDEM比棱锥FGHN。

[V. 22]

但还有，底FGH比底FGHKL也如同棱锥FGHN比棱锥FGHKLN。

因此也有，取首末比例，底ABCDE比底FGHKL如同棱锥ABCDEM比棱锥FGHKLN。

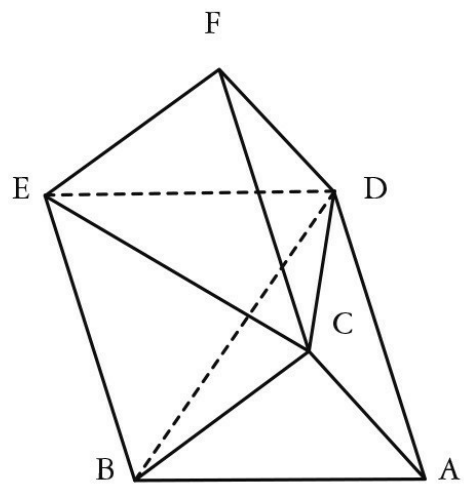
[V. 22]

这就是所要证明的。

命题**07**

任一以三角形为底的棱柱可被分成三个彼此相等的以三角形为底的棱锥。

Any prism which has a triangular base is divided into three pyramids equal to one another which have triangular bases.



设有一个以三角形ABC为底且以DEF为其对面的棱柱；

我说，棱柱ABCDEF可被分成三个彼此相等的以三角形为底的棱锥。

这是因为，连接BD、EC、CD。

由于ABED是平行四边形，且BD是它的对角线，

因此，三角形ABD等于三角形EBD；

[I. 34]

因此也有，以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥等于以三角形DEB为底且以点C为顶点的棱锥。

[XII. 5]

但以三角形DEB为底且以点C为顶点的棱锥与以三角形EBC为底且以点D为顶点的棱锥相同；

因为它们由相同的面所围成。

因此，以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥也等于以三角形EBC为底且以点D为顶点的棱锥。

又，由于FCBE是平行四边形，

且CE是它的对角线，所以

三角形CEF等于三角形CBE。

[I. 34]

因此也有，以三角形BCE为底且以点D为顶点的棱锥等于以ECF为底且以点D为顶点的棱锥。

[XII. 5]

但已证明，以三角形BCE为底且以点D为顶点的棱锥等于以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥；

因此也有，以三角形CEF为底且以点D为顶点的棱锥等于以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥；

因此，棱柱ABCDEF已被分成三个彼此相等的以三角形为底的棱锥。

又，由于以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥与以三角形CAB为底且以点D为顶点的棱锥相同，

因为它们由相同的平面所围成；

而已经证明，以三角形ABD为底且以点C为顶点的棱锥等于以三角形ABC为底且以DEF为其对面的棱柱的三分之一，

因此也有，以三角形ABC为底且以点D为顶点的棱锥等于以相同的三角形ABC为底且以DEF为对面的棱柱的三分之一。

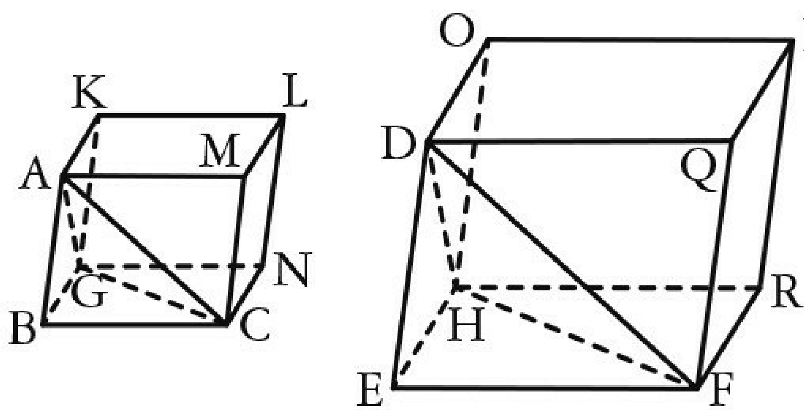
这就是所要证明的。

推论　　由此显然可得，任何棱锥是和它同底等高的棱柱的三分之一。

命题**08**

以三角形为底的相似棱锥之比是其对应边之比的三倍比。

Similar pyramids which have triangular bases are in the triplicate ratio of their corresponding sides.



设两个相似且有相似位置的棱锥分别以三角形ABC、DEF为底且以点G、H为顶点；

我说，棱锥ABCG比DEFH如同BC比EF的三倍比。

这是因为，将平行六面体BGML、EHQP补充完整。

现在，由于棱锥ABCG相似于棱锥DEFH，

因此，角ABC等于角DEF，

角GBC等于角HEF，

且角ABG等于角DEH；

且AB比DE如同BC比EF，也如同BG比EH。

又，由于AB比DE如同BC比EF，

且夹角相等的边成比例，

因此，平行四边形BM相似于平行四边形EQ。

同理，

BN也相似于ER，且BK也相似于EO；

因此，三个平行四边形MB、BK、BN相似于三个平行四边形EQ、EO、ER。

但三个平行四边形MB、BK、BN等于且相似于它们的三个对面，

且三个面EQ、EO、ER相等且相似于它们的对面。

[XI. 24]

因此，立体BGML、EHQP由同样多个相似平面所围成。

因此，立体BGML相似于立体EHQP。

但相似的平行六面体之比是其对应边之比的三倍比。

[XI. 33]

因此，立体BGML比立体EHQP是对应边BC比对应边EF的三倍比。

但立体BGML比立体EHQP如同棱锥ABCG比棱锥DEFH，

因为棱锥是平行六面体的六分之一，又因为是平行六面体一半的棱柱[XI. 28]也是棱锥的三倍。

[XII. 7]

因此，棱锥ABCG比棱锥DEFH也是BC比EF的三倍比。

这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，以多边形为底的相似棱锥之比是其对应边之比的三倍比。

这是因为，如果它们被分成以三角形为底的棱锥，由于构成它们的

底的相似多边形也被分成同样多个对应于整体的相似三角形，

[VI. 20]

于是，在一个完整棱锥中以三角形为底的棱锥比另一个完整棱锥中以三角形为底的棱锥也如同在一个完整棱锥中以三角形为底的所有棱锥之和比在另一个完整棱锥中以三角形为底的所有棱锥之和[V. 12]，即如同以多边形为底的棱锥本身比以多边形为底的棱锥。

但以三角形为底的棱锥比以三角形为底的棱锥是对应边之比的三倍比；

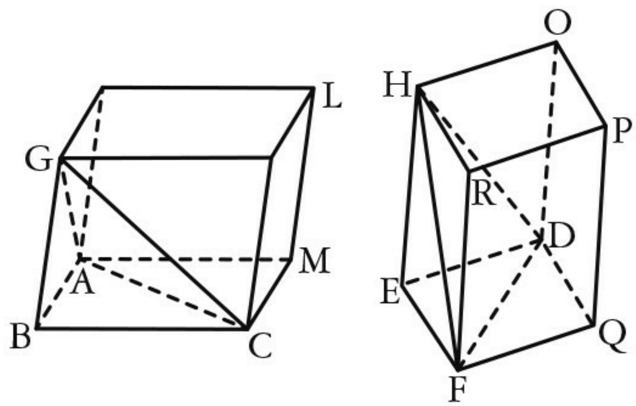
因此也有，以多边形为底的棱锥比以相似多边形为底的棱锥是对应边之比的三倍比。

这就是所要证明的。

命题**09**

以三角形为底的相等棱锥，底与高成互反比例；又，底与高成互反比例的棱锥相等。

In equal pyramids which have triangular bases the bases are reciprocally proportional to the heights; and those pyramids in which the bases are reciprocally proportional to the heights are equal.



设相等的棱锥分别以三角形ABC、DEF为底且以点G、H为顶点；

我说，在棱锥ABCG、DEFH中，底与高成互反比例，即底ABC比底DEF如同棱锥DEFH的高比棱锥ABCG的高。

这是因为，将平行六面体BGML、EHQP补充完整。

现在，由于棱锥ABCG等于棱锥DEFH，

且立体BGML是六倍的棱锥ABCG，

且立体EHQP是六倍的棱锥DEFH，

因此，立体BGML等于立体EHQP。

但相等平行六面体的底与高成互反比例；

[XI. 34]

因此，底BM比底EQ如同立体EHQP的高比立体BGML的高。

但底BM比EQ如同三角形ABC比三角形DEF。

[I. 34]

因此也有，三角形ABC比三角形DEF如同立体EHQP的高比立体BGML的高。

[V. 11]

但立体EHQP的高与棱锥DEFH的高相同，

且立体BGML的高与棱锥ABCG的高相同，

因此，底ABC比底DEF如同棱锥DEFH的高比棱锥ABCG的高。

因此，在棱锥ABCG、DEFH中，它们的底与高成互反比例。

其次，在棱锥ABCG、DEFH中，设它们的底和高成互反比例；

即底ABC比底DEF如同棱锥DEFH的高比棱锥ABCG的高；

我说，棱锥ABCG等于棱锥DEFH。

这是因为，同样作图，

由于底ABC比底DEF如同棱锥DEFH的高比棱锥ABCG的高，

而底ABC比底DEF如同平行四边形BM比平行四边形EQ，

因此也有，平行四边形BM比平行四边形EQ如同棱锥DEFH的高比棱锥ABCG的高。

[V. 11]

但棱锥DEFH的高与平行六面体EHQP的高相同，

且棱锥ABCG的高与平行六面体BGML的高相同；

因此，底BM比底EQ如同平行六面体EHQP的高比平行六面体

BGML的高。

但底与高成互反比例的平行六面体相等；

[XI. 34]

因此，平行六面体BGML等于平行六面体EHQP。

而棱锥ABCG是BGML的六分之一，棱锥DEFH是平行六面体EHQP的六分之一；

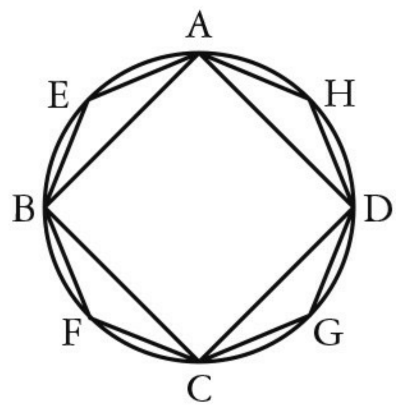
因此，棱锥ABCG等于棱锥DEFH。

这就是所要证明的。

命题**10**

任一圆锥是与它同底等高的圆柱的三分之一。

Any cone is a third part of the cylinder which has the same base with it and equal height.



设一个圆锥与一个圆柱同底，即圆ABCD，且等高；

我说，该圆锥是该圆柱的三分之一，即该圆柱是该圆锥的三倍。

这是因为，如果圆柱不是圆锥的三倍，则圆柱要么大于圆锥的三倍，要么小于圆锥的三倍。

首先，设圆柱大于圆锥的三倍，

且设正方形ABCD内接于圆ABCD；

[IV. 6]

于是，正方形ABCD大于圆ABCD的一半。

在正方形ABCD上作一个与圆柱等高的棱柱。

于是，该棱柱大于圆柱的一半，这是因为，如果作圆ABCD的外切正方形，

[IV. 7]

则圆ABCD的内接正方形是圆外切正方形的一半，

且在它们上作的平行六面体棱柱等高，

而同高的平行六面体之比如同其底之比；

[XI. 32]

因此也有，在正方形ABCD上所作的棱柱是在圆ABCD的外切正方形上所作棱柱的一半；

[参见XI. 28，或XII. 6和7，推论]

而圆柱小于在圆ABCD外切正方形上所作的棱柱；

因此，在与圆柱等高的正方形ABCD上所作的棱柱大于圆柱的一半。

设圆周AB、BC、CD、DA在点E、F、G、H被二等分，

连接AE、EB、BF、FC、CG、GD、DH、HA；

于是，已经证明，三角形AEB、BFC、CGD、DHA中的每一个都大于圆ABCD中包含该三角形的弓形的一半。

[XII. 2]

在三角形AEB、BFC、CGD、DHA中的每一个上作与圆柱等高的棱柱；

于是，如此作的每一个棱柱都大于包含它的弓形圆柱的一半，

这是因为，如果过点E、F、G、H作AB、BC、CD、DA的平行线，将AB、BC、CD、DA上的平行四边形补充完整，且在其上作与圆柱等高的平行六面体，则在三角形AEB、BFC、CGD、DHA上所作的棱柱是如此所作的各个立体的一半；

而弓形圆柱之和小于所作的平行六面体之和；

因此也有，在三角形AEB、BFC、CGD、DHA上的棱柱之和大于包含它们的弓形圆柱之和的一半。

于是，将余下的各个圆周二等分，连接直线，在每个三角形上作与圆柱等高的棱柱，

这样继续作下去，

将会余下一些弓形圆柱，它们之和小于圆柱超出三倍圆锥的部分。

[X. 1]

设余下一些弓形圆柱，它们是AE、EB、BF、FC、CG、GD、DH、HA；

因此，余下的以多边形AEBFCGDH为底且其高与圆柱的高相同的棱柱大于圆锥的三倍。

但以多边形AEBFCGDH为底且与圆柱同高的棱柱是以多边形AEBFCGDH为底且顶点与圆锥相同的棱锥的三倍；

[XII. 7，推论]

因此也有，以多边形AEBFCGDH为底且顶点与圆锥相同的棱锥大于以圆ABCD为底的圆锥。

但它也小于以圆ABCD为底的圆锥，这是因为它被后者所包含：

这是不可能的。

因此，圆柱不大于圆锥的三倍。

其次我说，圆柱也不小于圆锥的三倍，

这是因为，如果可能，设圆柱小于圆锥的三倍，

因此，反过来，圆锥大于圆柱的三分之一。

设正方形ABCD内接于圆ABCD；

因此，正方形ABCD大于圆ABCD的一半。

现在，在正方形ABCD上作一个顶点与圆锥相同的棱锥；

因此，这个棱锥大于圆锥的一半，

既然前已证明，如果作圆的外切正方形，则正方形ABCD是圆外切正方形的一半，

而且，如果在正方形上作与圆锥等高的平行六面体，也被称为棱柱，则在正方形ABCD上所作的棱柱是在圆外切正方形上所作棱柱的一半，

这是因为它们彼此之比如同其底之比。

[XI. 32]

因此也有，它们的三分之一之比也是这个比；

因此也有，以正方形ABCD为底的棱锥是在圆外切正方形上所作棱锥的一半。

而在圆外切正方形上所作的棱锥大于圆锥，

这是因为在圆外切正方形上所作的棱锥包含圆锥。

因此，以正方形ABCD为底且顶点与圆锥相同的棱锥大于圆锥的一半。

设圆周AB、BC、CD、DA在点E、F、G、H被二等分，

连接AE、EB、BF、FC、CG、GD、DH、HA；

因此也有，三角形AEB、BFC、CGD、DHA中的每一个都大于圆ABCD的包含它的弓形的一半。

现在，在三角形AEB、BFC、CGD、DHA中的每一个上分别作顶点与圆锥相同的棱锥；

因此也有，这些棱锥中的每一个都以同样的方式大于包含它的弓形圆锥的一半。

于是，通过将余下的圆周二等分，连接直线，在每个三角形上作顶点与圆锥相同的棱锥，

这样继续作下去，

将会余下一些弓形圆锥，它们之和小于圆锥超出圆柱三分之一的部分。

[X. 1]

设余下一些弓形圆柱，它们是AE、EB、BF、FC、CG、GD、DH、HA上的弓形圆柱；

因此，余下的以多边形AEBFCGDH为底且顶点与圆锥相同的棱锥大于圆柱的三分之一。

但以多边形AEBFCGDH为底且顶点与圆锥相同的棱锥是以多边形AEBFCGDH为底且与圆柱同高的棱柱的三分之一；

因此，以多边形AEBFCGDH为底且与圆柱同高的棱柱大于以圆ABCD为底的圆柱。

但棱柱也小于圆柱，这是因为棱柱被圆柱所包含：

这是不可能的。

因此，圆柱不小于圆锥的三倍。

但已证明，圆柱也不大于圆锥的三倍；

因此，圆柱是圆锥的三倍；

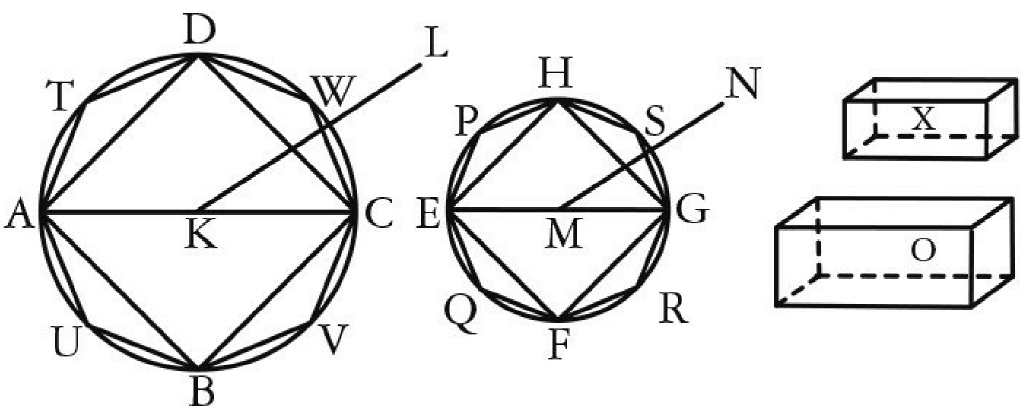
因此，圆锥是圆柱的三分之一。

这就是所要证明的。

命题**11**

同高的圆锥或圆柱之比如同其底之比。

Cones and cylinders which are of the same height are to one another as their bases.



设有同高的圆锥或圆柱，

设圆ABCD、EFGH是它们的底，KL、MN是它们的轴，且AC、EG是它们底的直径；

我说，圆ABCD比圆EFGH如同圆锥AL比圆锥EN。

这是因为，如果不是这样，那么圆ABCD比圆EFGH如同圆锥AL比某个要么小于要么大于圆锥EN的立体。

首先，设成比例的是一个小于圆锥EN的立体O，

且设立体X等于立体O小于圆锥EN的部分；

因此，圆锥EN等于立体O、X之和。

设正方形EFGH内接于圆EFGH；

因此，正方形大于圆的一半。

在正方形EFGH上作与圆锥等高的棱锥；

因此，这个棱锥大于圆锥的一半，

这是因为，如果作圆的外切正方形，且在它上作与圆锥等高的棱锥，则内接棱锥是外切棱锥的一半，

这是因为它们彼此之比如同其底之比，

[XII. 6]

而圆锥小于外切棱锥。

设圆周HE、EF、FG、GH在点P、Q、R、S被二等分，连接HP、PE、EQ、QF、FR、RG、GS、SH。

因此，三角形HPE、EQF、FRG、GSH中的每一个都大于包含它的弓形的一半。

在三角形HPE、EQF、FRG、GSH中的每一个上作与圆锥等高的棱锥；

因此也有，所作棱锥中的每一个都大于包含它的弓形圆锥的一半。

于是，通过将余下的圆周二等分，连接直线，在每个三角形上作顶点与圆锥相同的棱锥，

这样继续作下去，

将会余下一些弓形圆锥，它们之和小于立体X。

[X. 1]

设余下的是HP、PE、EQ、QF、FR、RG、GS、SH上的弓形圆锥；

因此，余下的以多边形HPEQFRGS为底且与圆锥同高的棱锥大于立体O。

也设内接于圆ABCD的多边形DTAUBVCW与多边形HPEQFRGS相

似且有相似位置，

且在它上作与圆锥AL等高的棱锥。

于是，由于AC上的正方形比EG上的正方形如同多边形DTAUBVCW比多边形HPEQFRGS，

[XII. 1]

而AC上的正方形比EG上的正方形如同圆ABCD比圆EFGH，

[XII. 2]

因此也有，圆ABCD比圆EFGH如同多边形DTAUBVCW比多边形HPEQFRGS。

但圆ABCD比圆EFGH如同圆锥AL比立体O，

且多边形DTAUBVCW比多边形HPEQFRGS如同以多边形DTAUBVCW为底且以点L为顶点的棱锥比以多边形HPEQFRGS为底且以点N为顶点的棱锥。

[XII. 6]

因此也有，圆锥AL比立体O如同以多边形DTAUBVCW为底且以点L为顶点的棱锥比以多边形HPEQFRGS为底且以点N为顶点的棱锥；

[V. 11]

因此，取更比例，圆锥AL比它中的棱锥如同立体O比圆锥EN中的棱锥。

[V. 16]

但圆锥AL大于它中的棱锥；

因此，立体O也大于圆锥EN中的棱锥。

但立体O也小于圆锥EN中的棱锥：

这是荒谬的。

因此，圆锥AL比任何小于圆锥EN的立体都不如同圆ABCD比圆EFGH。

类似地，可以证明，圆锥EN比任何小于圆锥AL的立体也都不如同圆EFGH比圆ABCD。

其次我说，圆锥AL比任何大于圆锥EN的立体也不如同圆ABCD比圆EFGH。

这是因为，如果可能，设成比例的是一个大于圆锥EN的立体O；

因此，取反比例，圆EFGH比圆ABCD如同立体O比圆锥AL。

但立体O比圆锥AL如同圆锥EN比某个小于圆锥AL的立体；

因此也有，圆EFGH比圆ABCD如同圆锥EN比某个小于圆锥AL的立体：

已经证明这是不可能的。

因此，圆锥AL比任何大于圆锥EN的立体都不如同圆ABCD比圆EFGH。

但已证明，成这个比例的也不是小于EN的立体；

因此，圆ABCD比圆EFGH如同圆锥AL比圆锥EN。

但圆锥比圆锥等于圆柱比圆柱，

这是因为圆柱是圆锥的三倍。

[XII. 10]

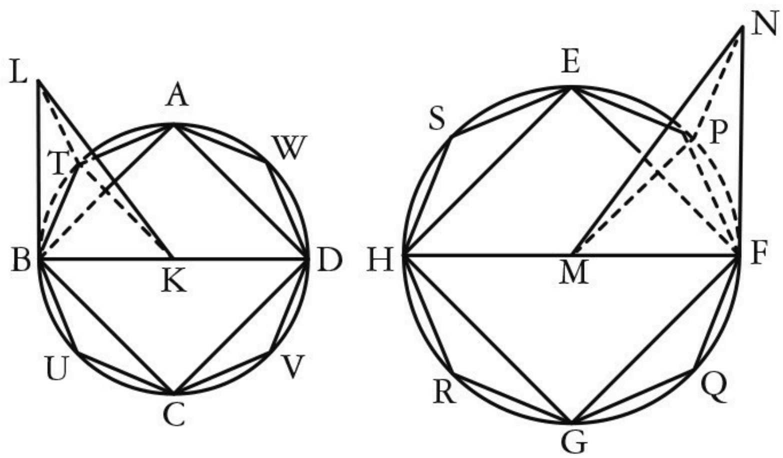
因此也有，圆ABCD比圆EFGH如同其上等高的圆柱之比。

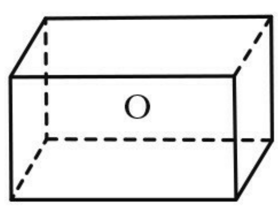
这就是所要证明的。

命题**12**

相似的圆锥或圆柱之比是其底上直径之比的三倍比。

Similar cones and cylinders are to one another in the triplicate ratio of the diameters in their bases.





设有相似的圆锥或圆柱，

设圆ABCD、EFGH是它们的底，BD与FH是底的直径，且KL、MN是圆锥及圆柱的轴。

我说，以圆ABCD为底且以L为顶点的圆锥比以圆EFGH为底且以N为顶点的圆锥是BD比FH的三倍比。

这是因为，如果圆锥ABCDL比圆锥EFGHN不是BD比FH的三倍比，

则圆锥ABCDL比某个要么小于要么大于圆锥EFGHN的立体是BD比

FH的三倍比。

首先，设成此三倍比的是一个小于圆锥EFGHN的立体O。

设正方形EFGH内接于圆EFGH；

[IV. 6]

因此，正方形EFGH大于圆EFGH的一半。

现在，在正方形EFGH上作一个顶点与圆锥相同的棱锥；

因此，此棱锥大于圆锥的一半。

设圆周EF、FG、GH、HE在点P、Q、R、S被二等分，

连接EP、PF、FQ、QG、GR、RH、HS、SE。

因此，三角形EPF、FQG、GRH、HSE中的每一个也大于圆EFGH中包含它的弓形的一半。

现在，在三角形EPF、FQG、GRH、HSE中的每一个上作一个顶点与圆锥相同的棱锥；

因此，这样作的每一个棱锥也大于包含它的弓形圆锥的一半。

于是，将余下各个圆周二等分，连接直线，在每个三角形上作顶点与圆锥相同的棱锥，

这样继续作下去，

将会余下一些弓形圆锥，它们之和小于圆锥EFGHN超出立体O的部分。

[X. 1]

设余下一些弓形圆锥，它们是EP、PF、FQ、QG、GR、RH、HS、SE上的弓形圆锥；

因此，余下的以多边形EPFQGRHS为底且以点N为顶点的棱锥大于

立体O。

也作圆ABCD的内接多边形ATBUCVDW与多边形EPFQGRHS相似且有相似位置，

在多边形ATBUCVDW上作顶点与圆锥相同的棱锥；

由若干三角形围成一个以多边形ATBUCVDW为底且以点L为顶点的棱锥，设LBT是这些三角形之一，

又由若干三角形围成一个以多边形EPFQGRHS为底且以点N为顶点的棱锥，设NFP是这些三角形之一；

接连KT、MP。

现在，由于圆锥ABCDL相似于圆锥EFGHN，

因此，BD比FH如同轴KL比轴MN。

[XI. 定义24]

但BD比FH如同BK比FM；

因此也有，BK比FM如同KL比MN。

又，取更比例，BK比KL如同FM比MN。

[V. 16]

而等角即角BKL、FMN的边成比例；

因此，三角形BKL相似于三角形FMN。

[VI. 6]

又，由于BK比KT如同FM比MP，

且它们的夹角相等，即角BKT、FMP，

这是因为，无论角BKT是圆心K的四个直角的多少部分，角FMP也

是圆心M的四个直角的同样多少部分；

于是，由于夹角相等的边成比例，

因此，三角形BKT相似于 三角形FMP。

[VI. 6]

又，由于已经证明，BK比KL如同FM比MN，

而BK等于KT，FM等于PM，

因此，TK比KL如同PM比MN；

又，等角即角TKL、PMN的边成比例，这是因为它们是直角；

因此，三角形LKT相似于三角形NMP。

[VI. 6]

又，由于三角形LKB相似于NMF，

所以

LB比BK如同NF比FM，

又，由于三角形BKT相似于FMP，

所以

KB比BT如同MF比FP，

因此，取首末比例，LB比BT如同NF比FP。

[V. 22]

又，由于三角形LTK相似于NPM，

所以

LT比TK如同NP比PM，

又，由于三角形TKB相似于PMF，

所以

KT比TB如同MP比PF；

因此，取首末比例，LT比TB如同NP比PF。

[V. 22]

但已证明，TB比BL如同PF比FN。

因此，取首末比例，TL比LB如同PN比NF。

[V. 22]

因此，在三角形LTB、NPF中，边成比例；

因此，三角形LTB、NPF等角；

[VI. 5]

因此，它们也相似。

[VI. 定义I]

因此，以三角形BKT为底且以点L为顶点的棱锥也相似于以三角形FMP为底且以点N为顶点的棱锥，

这是因为，它们由相等个数的相似平面所围成。

[XI. 定义9]

但以三角形为底的相似棱锥之比是其对应边之比的三倍比。

[XII. 8]

因此，棱锥BKTL比棱锥FMPN是BK比FM的三倍比。

类似地，从A、W、D、V、C、U到K连直线，又从E、S、H、R、G、Q到M连直线，在每个三角形上作顶点与圆锥相同的棱锥，

可以证明，每对相似棱锥之比是对应边BK比对应边FM的三倍比，即BD比FH的三倍比。

又，前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和；

[V. 12]

因此也有，棱锥BKTL比棱锥FMPN如同以多边形ATBUCVDW为底且以点L为顶点的整个棱锥比以多边形EPFQGRHS为底且以点N为顶点的整个棱锥；

因此也有，以ATBUCVDW为底且以点L为顶点的棱锥比以多边形EPFQGRHS为底且以点N为顶点的棱锥是BD比FH的三倍比。

但根据假设，以圆ABCD为底且以点L为顶点的圆锥比立体O是BD比FH的三倍比；

因此，以圆ABCD为底且以点L为顶点的圆锥比立体O如同以多边形ATBUCVDW为底且以L为顶点的棱锥比以多边形EPFQ-GRHS为底且以点N为顶点的棱锥；

因此，取更比例，以圆ABCD为底且以L为顶点的圆锥比它所包含的以多边形ATBUCVDW为底且以L为顶点的棱锥如同立体O比以多边形EPFQGRHS为底且以N为顶点的棱锥。

[V. 16]

但上述圆锥大于它之中的棱锥；

这是因为圆锥包含棱锥。

因此，立体O也大于以多边形EPFQGRHS为底且以N为顶点的棱锥。

但立体O也小于棱锥：

这是不可能的。

因此，以圆ABCD为底且以L为顶点的圆锥比任何小于以圆EFGH为底且以点N为顶点的圆锥的立体都不是BD比FH的三倍比。

类似地，可以证明，圆锥EFGHN比任何小于圆锥ABCDL的立体也不是FH比BD的三倍比。

其次我说，圆锥ABCDL比任何大于圆锥EFGHN的立体也不是BD比FH的三倍比。

这是因为，如果可能，设成比例的是一个大于圆锥EFGHN的立体O。

因此，取反比例，立体O比圆锥ABCDL是FH比BD的三倍比。

但立体O比圆锥ABCDL如同圆锥EFGHN比某个小于圆锥ABCDL的立体。

因此，圆锥EFGHN比某个小于圆锥ABCDL的立体是FH比BD的三倍比：

已经证明这是不可能的。

因此，圆锥ABCDL比任何大于圆锥EFGHN的立体都不是BD比FH的三倍比。

但已证明，成比例的也不是一个小于圆锥EFGHN的立体。

因此，圆锥ABCDL比圆锥EFGHN是BD比FH的三倍比。

但圆锥比圆锥如同圆柱比圆柱，

这是因为，同底等高的圆柱是圆锥的三倍；

[XII. 10]

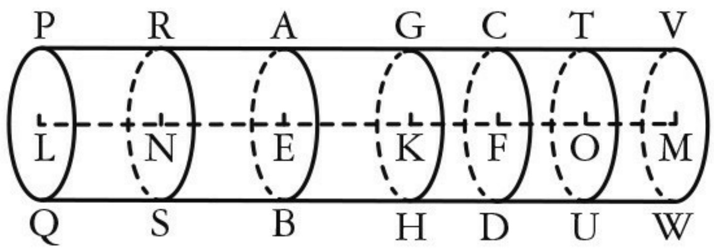
因此，圆柱比圆柱也是BD比FH的三倍比。

这就是所要证明的。

命题**13**

若一圆柱被平行于其对面的平面所截，则圆柱比圆柱如同轴比轴。

If a cylinder be cut by a plane which is parallel to its opposite planes, then, as the cylinder is to the cylinder, so will the axis be to the axis.



设圆柱AD被平行于对面AB、CD的平面GH所截，

且设平面GH与轴交于点K；

我说，圆柱BG比圆柱GD如同轴EK比轴KF。

这是因为，沿两个方向延长轴EF至点L、M，

取任意多个轴EN、NL等于轴EK，

以及取任意多个FO、OM等于FK；

又作以LM为轴的圆柱PW，其底为圆PQ、VW。

过点N、O作平面平行于AB、CD和圆柱PW的底，

又设由此产生以N、O为圆心的圆RS、TU。

于是，由于轴LN、NE、EK彼此相等，

因此，圆柱QR、RB、BG彼此之比如同其底之比。

[XII. 11]

但其底相等；

因此，圆柱QR、RB、BG也彼此相等。

于是，由于轴LN、NE、EK彼此相等，

且圆柱QR、RB、BG也彼此相等，

且前者的个数等于后者的个数，

因此，轴KL是轴EK的多少倍，圆柱QG也是圆柱GB的多少倍。

同理，轴MK是轴KF的多少倍，圆柱WG也是圆柱GD的多少倍。

又，如果轴KL等于轴KM，则圆柱QG也等于圆柱GW，

如果轴KL大于轴KM，则圆柱QG也大于圆柱GW，

如果轴KL小于轴KM，则圆柱QG也小于圆柱GW。

于是，有四个量，轴EK、KF和圆柱BG、GD，

已取轴EK和圆柱BG的等倍量，即轴LK和圆柱QG，

以及轴KF和圆柱GD的等倍量，即轴KM及圆柱GW；

且已证明，如果轴KL大于轴KM，则圆柱QG也大于圆柱GW，

如果轴KL等于轴KM，则圆柱QG也等于圆柱GW；

如果轴KL小于轴KM，则圆柱QG也小于圆柱GW。

因此，轴EK比轴KF如同圆柱BG比圆柱GD。

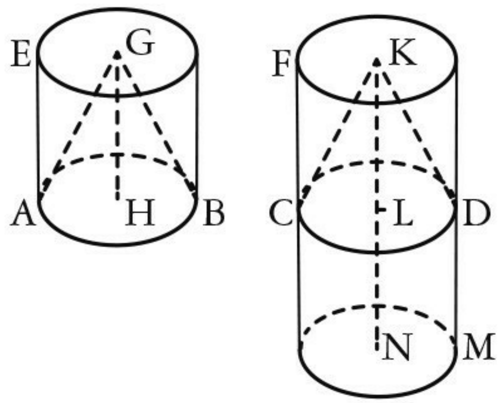
[V. 定义5]

这就是所要证明的。

命题**14**

等底的圆锥或圆柱之比如同其高之比。

Cones and cylinders which are on equal bases are to one another as their heights.



设EB、FD是等底的圆柱，底为圆AB、CD；

我说，圆柱EB比圆柱FD如同高GH比高KL。

延长轴KL至点N，

使LN等于轴GH，

又作以LN为轴的圆柱CM。

于是，由于圆柱EB、CM同高，所以它们彼此之比如同其底之比。

[XII. 11]

但它们的底彼此相等；

因此，圆柱EB、CM也相等。

又，由于圆柱FM被平行于其对面的平面CD所截，

因此，圆柱CM比圆柱FD如同轴LN比轴KL。

[XII. 13]

但圆柱CM等于圆柱EB，

且轴LN等于轴GH；

因此，圆柱EB比圆柱FD如同轴GH比轴KL。

但圆柱EB比圆柱FD如同圆锥ABG比圆锥CDK。

[XII. 10]

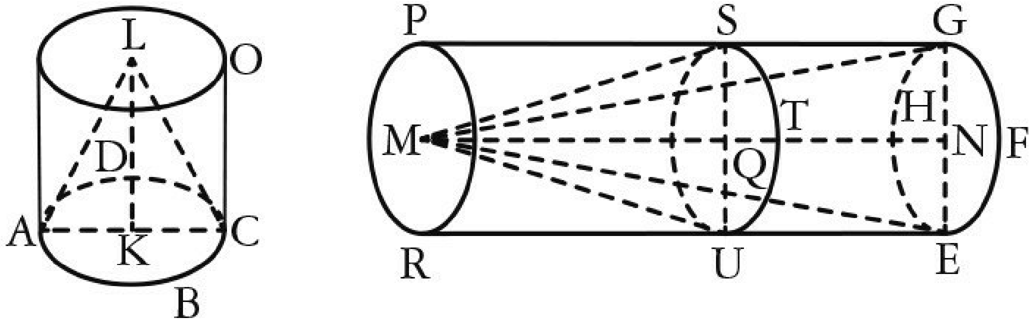
因此也有，轴GH比轴KL如同圆锥ABG比圆锥CDK，也如同圆柱EB比圆柱FD。

这就是所要证明的。

命题**15**

相等的圆锥或圆柱，其底与高成互反比例；底与高成互反比例的圆锥或圆柱相等。

In equal cones and cylinders the bases are reciprocally proportional to the heights; and those cones and cylinders in which the bases are reciprocally proportional to the heights are equal.



设有以圆ABCD、EFGH为底的相等的圆锥或圆柱；

设AC、EG是底的直径，

且KL、MN是轴，也是圆锥或圆柱的高；

将圆柱AO、EP补充完整。

我说，圆柱AO、EP的底与高成互反比例，

即底ABCD比底EFGH如同高MN比高KL。

这是因为，高LK要么等于高MN，要么不等于高MN。

首先，设高LK等于高MN。

现在，圆柱AO也等于圆柱EP。

但同高的圆锥或圆柱之比如同其底之比；

[XII. 11]

因此，底ABCD也等于底EFGH。

因此也有，取互反比例，底ABCD比底EFGH如同高MN比高KL。

其次，设高LK不等于MN，

而是MN较大；

从高MN上截取QN等于KL，

过点Q作平面TUS平行于圆EFGH、RP的平面，圆柱EP被它所截，

且设圆柱ES以圆EFGH为底，以NQ为高。

现在，由于圆柱AO等于圆柱EP，

因此，圆柱AO比圆柱ES如同圆柱EP比圆柱ES。

[V. 7]

但圆柱AO比圆柱ES如同底ABCD比底EFGH，

这是因为圆柱AO、ES同高；

[XII. 11]

又，圆柱EP比圆柱ES如同高MN比高QN，

这是因为圆柱EP被一个平行于其对面的平面所截。

[XII. 13]

因此也有，底ABCD比底EFGH如同高MN比高QN。

[V. 11]

但高QN等于高KL；

因此，底ABCD比底EFGH如同高MN比高KL。

因此，在圆柱AO、EP中，底与高成互反比例。

其次，在圆柱AO、EP中，设底与高成互反比例，

即底ABCD比底EFGH如同高MN比高KL；

我说，圆柱AO等于圆柱EP。

这是因为，同样作图，

由于底ABCD比底EFGH如同高MN比高KL，

而高KL等于高QN，

因此，底ABCD比底EFGH如同高MN比高QN。

但底ABCD比底EFGH如同圆柱AO比圆柱ES，

这是因为它们同高；

[XII. 11]

而高MN比QN如同圆柱EP比圆柱ES；

[XII. 13]

因此，圆柱AO比圆柱ES如同圆柱EP比圆柱ES。

[V. 11]

因此，圆柱AO等于圆柱EP。

[V. 9]

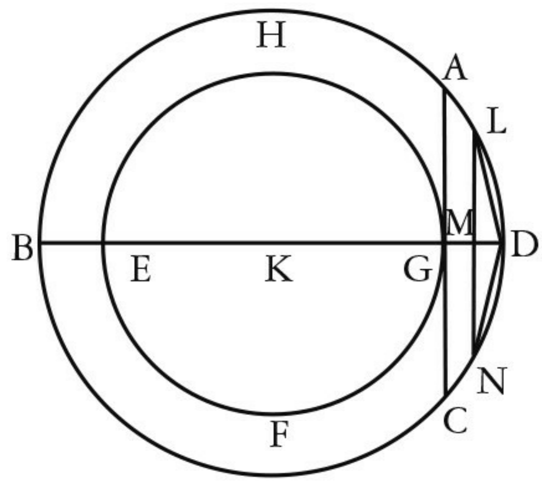
这对圆锥来说也是如此。

这就是所要证明的。

命题**16**

给定两同心圆，在大圆中作一个有偶数条边的、不与小圆相切的内接等边多边形。

Given two circles about the same centre, to inscribe in the greater circle an equilateral polygon with an even number of sides which does not touch the lesser circle.



设ABCD、EFGH是以K为共同圆心的两个给定的圆；

于是，要求在大圆ABCD中作一个有偶数条边的、不与小圆EFGH相切的内接等边多边形。

过圆心K作直线BKD，

又从点G作GA与直线BD成直角并延长到C；

因此，AC与圆EFGH相切。

[III. 16，推论]

然后，将圆周BAD二等分，再将它的一半二等分，这样继续作下去，则会留下一个小于AD的圆周。

[X. 1]

设这样留下的圆周是LD；

从L作LM垂直于BD并延长至N，

连接LD、DN；

因此，LD等于DN。

[III. 3，I. 4]

现在，由于LN平行于AC，

且AC与圆EFGH相切，

因此，LN不与圆EFGH相切；

因此，LD、DN更不与圆EFGH相切。

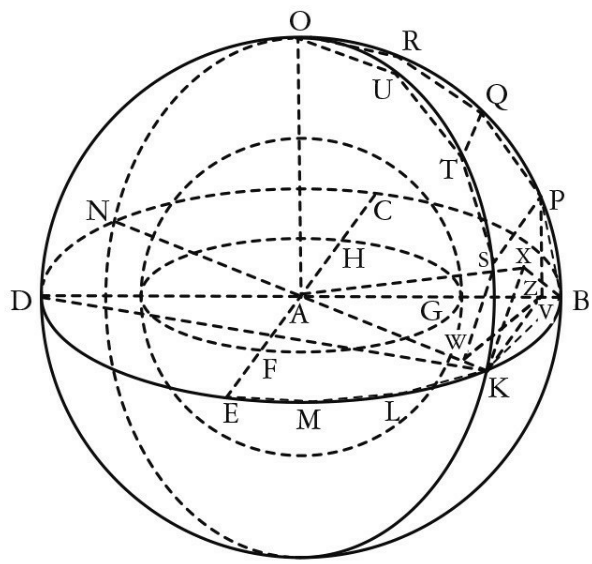
于是，如果将等于LD的直线连续纳入圆ABCD，则在圆ABCD中作出一个有偶数条边的、不与小圆EFGH相切的内接等边多边形。

这就是所要作的。

命题**17**

给定两同心球，在大球中作一个不与小球的球面相切的内接多面体。

Given two spheres about the same centre, to inscribe in the greater sphere a polyhedral solid which does not touch the lesser sphere at its surface.



设两球有相同的球心A；

于是，要求在大球中作一个不与小球的球面相切的内接多面体。

设两球被过球心的任一平面所截；

于是，截线是圆，

这是因为，球是直径保持固定，半圆绕直径旋转而成的；

[XI. 定义14]

因此，无论设想半圆处于任何位置，过半圆的平面都在球面上产生一个圆。

显然，这个圆是最大的，

这是因为，球的直径，当然既是半圆的直径也是圆的直径，大于在圆中或球中所作的所有直线。

然后，设BCDE是大球中的圆，

且FGH是小球中的圆；

在它们中作两直径BD、CE彼此成直角；

于是，给定同心的两圆BCDE、FGH，在大圆BCDE中作一个有偶数条边的、不与小圆EGH相切的内接等边多边形。

设BK、KL、LM、ME是象限BE中的边，

连接KA并延长至N，

从点A作AO与圆BCDE的平面成直角，且它与球面交于O，

过AO和直线BD、KN中的每一条作平面；

于是，出于已经陈述的理由，它们与球面截出最大的圆。

设已经作出了它们，

且设在它们中，BOD、KON是BD、KN上的半圆。

现在，由于OA与圆BCDE的平面成直角，

因此，所有过OA的平面都与圆BCDE的平面成直角；

[XI. 18]

因此，半圆BOD、KON也与圆BCDE的平面成直角。

又，由于半圆BED、BOD、KON相等，

这是因为它们在相等的直径BD、KN上，

因此，象限BE、BO、KO也彼此相等。

因此，象限BO、KO中有多少条直线等于直线BK、KL、LM、

ME，象限BE中就有多边形的多少条边。

设它们内接，且设它们是BP、PQ、QR、RO和KS、ST、TU、UO，

连接SP、TQ、UR，

从P、S作圆BCDE的平面的垂线；

[XI. 11]

它们将落在平面的公共交线BD、KN上，

这是因为BOD、KON的平面与圆BCDE的平面也成直角。

[参见XI. 定义4]

设它们是PV、SW，

连接WV。

现在，由于在相等的半圆BOD、KON中已经截取了相等的直线BP、KS，

且已作垂线PV、SW，

因此，PV等于SW，且BV等于KW。

[III. 27，I. 26]

但整个BA也等于整个KA；

因此，余下的VA也等于余下的WA；

因此，BV比VA如同KW比WA；

因此，WV平行于KB。

[VI. 2]

又，由于直线PV、SW中的每一条都与圆BCDE的平面成直角，

因此，PV平行于SW。

[XI. 6]

但已证明，PV也等于SW；

因此，WV、SP相等且平行。

[I. 33]

又，由于WV平行于SP，

而WV平行于KB，

因此，SP也平行于KB。

[XI. 9]

连接BP、KS的端点；

因此，四边形KBPS在同一平面上，

这是因为，如果两直线平行，在它们上各任取一点，则连接两点的直线与两平行直线在同一平面上。

[XI. 7]

同理，四边形SPQT、TQRU中的每一个也在同一平面上。

但三角形URO也在同一平面上。

[XI. 2]

于是，如果从点P、S、Q、T、R、U向A连接直线，则可作出圆周BO、KO之间的某个多面体，它由以四边形KBPS、SPQT、TQRU和三角形URO为底且以点A为顶点的棱锥所构成。

又，如果我们就边KL、LM、ME中的每一条像BK一样作同样的图，且就其余三个象限也作同样的图，

则可作出某个球内接多面体，它由以上述四边形和三角形URO以及其他与之对应的四边形和三角形为底且以点A为顶点的棱锥所构成。

我说，上述多面体不在圆FGH所在的面与小球相切。

从点A作AX垂直于四边形KBPS的平面，且设它与平面交于点X；

[XI. 11]

连接XB、XK。

于是，由于AX与四边形KBPS的平面成直角，因此它也与四边形平面上与之相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

因此，AX与直线BX、XK中的每一条成直角。

又，由于AB等于AK，所以

AB上的正方形也等于AK上的正方形。

且AX、XB上的正方形之和等于AB上的正方形，

这是因为X处的角是直角；

[I. 47]

且AX、XK上的正方形之和等于AK上 的正方形。

[I. 47]

因此，AX、XB上的正方形之和等于AX、XK上的正方形之和。

从它们中各减去AX上的正方形；

因此，余下的BX上的正方形等于余下的XK上的正方形；

因此，BX等于XK。

类似地，可以证明，从X到P、S连接的直线等于直线BX、XK中的

每一条。

因此，以X为圆心且以XB、XK中的一条为距离所作的圆也过P、S，

且KBPS是一个圆内的四边形。

现在，由于KB大于WV，

而WV等于SP，

因此，KB大于SP。

但KB等于直线KS、BP中的每一条；

因此，直线KS、BP中的每一条都大于SP。

又，由于KBPS是一个圆内的四边形，

而KB、BP、KS相等，且PS较小，

且BX是圆的半径，

因此，KB上的正方形大于BX上的正方形的二倍。

从K作KZ垂直于BV。

于是，由于BD小于DZ的二倍，

且BD比DZ如同矩形DB、BZ比矩形DZ、ZB，

如果在BZ上作一个正方形，且将ZD上的平行四边形补充完整，

则矩形DB、BZ也小于矩形DZ、ZB的二倍。

且如果连接KD，

则矩形DB、BZ等于BK上的正方形，

而矩形DZ、ZB等于KZ上的正方形；

[III. 31，VI. 8和推论]

因此，KB上的正方形小于KZ上的正方形的二倍。

但KB上的正方形大于BX上的正方形的二倍；

因此，KZ上的正方形大于BX上的正方形。

又，由于BA等于KA，所以

BA上的正方形等于AK上的正方形。

而BX、XA上的正方形之和等于BA上的正方形，

且KZ、ZA上的正方形之和等于KA上的正方形；

[I. 47]

因此，BX、XA上的正方形之和等于KZ、ZA上的正方形之和，

且其中KZ上的正方形大于BX上的正方形；

因此，余下的ZA上的正方形小于XA上的正方形。

因此，AX大于AZ；

因此，AX更大于AG。

而AX是多面体一个底上的垂线，

且AG在小球的球面上；[1]

因此，多面体不与小球的球面相切。

这样便对给定的两同心球，在大球中作出了一个不与小球的球面相切的内接多面体。

这就是所要作的。

推论 但如果另一个球的内接多面体也相似于球BCDE中的多面体，

则球BCDE中的多面体比另一个球中的多面体是球BCDE的直径比

另一个球的直径的三倍比。

这是因为，将这两个多面体分成个数相等、安排相似的棱锥，这些棱锥是相似的。

而相似棱锥之比是其对应边之比的三倍比；

[XII. 8，推论]

因此，以四边形KBPS为底且以点A为顶点的棱锥比另一个球中有相似安排的棱锥是对应边比对应边的三倍比，即以A为球心的球的半径AB比另一个球的半径的三倍比。

类似地也有，以A为球心的球中的每个棱锥比另一个球中有相似安排的棱锥是AB比另一个球的半径的三倍比。

而前项之一比后项之一如同所有前项之和比所有后项之和。

[V. 12]

因此，以A为球心的球中的整个多面体比另一个球中的整个多面体是AB比另一个球的半径的三倍比，即直径BD比另一个球的直径的三倍比。

这就是所要证明的。

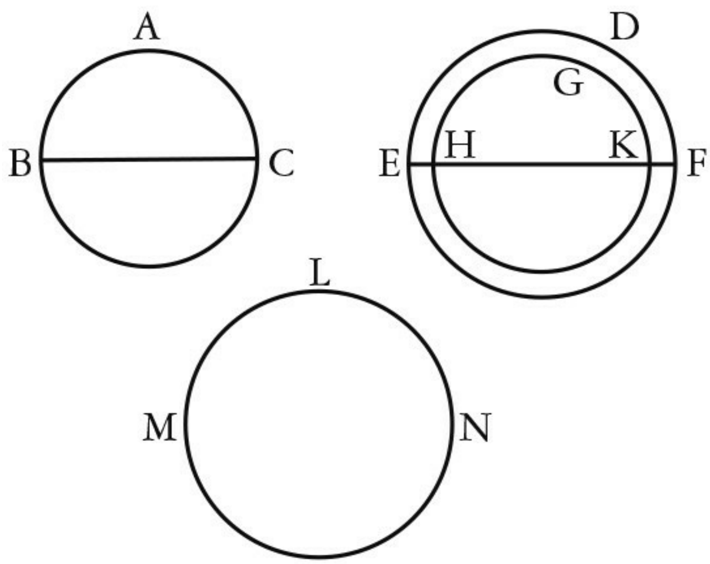
---

[1]原文如此，疑有误，应为“AG是小球的半径“。（译者注）

命题**18**

球与球之比是其直径之比的三倍比。

Spheres are to one another in the triplicate ratio of their respective diameters.



作球ABC、DEF，

且设BC、EF是它们的直径；

我说，球ABC比球DEF是BC比EF的三倍比。

这是因为，如果球ABC比球DEF不是BC比EF的三倍比，

则球ABC比某个小于DEF或大于球DEF的球是BC比EF的三倍比。

首先，设成比例的是一个小于DEF的球GHK，

设球DEF与球GHK同心，

在大球DEF中作一个不与小球GHK的球面相切的内接多面体，

[XII. 17]

且在球ABC中作一个内接多面体相似于球DEF中的多面体；

因此，ABC中的多面体比DEF中的多面体是BC比EF的三倍比。

[XII. 17，推论]

但球ABC比球GHK也是BC比EF的三倍比；

因此，球ABC比球GHK如同在球ABC中的多面体比球DEF中的多面体；

取更比例，球ABC比它内部的多面体如同球GHK比球DEF中的多面体。

[V. 16]

但球ABC大于它内部的多面体；

因此，球GHK也大于球DEF中的多面体。

但球GHK也小于球DEF中的多面体，

这是因为球GHK被球DEF中的多面体所包含。

因此，球ABC比一个小于球DEF的球不是直径BC比直径EF的三倍比。

类似地，可以证明，球DEF比一个小于球ABC的球也不是EF比BC的三倍比。

其次我说，球ABC比某个大于球DEF的球也不是BC比EF的三倍比。

这是因为，如果可能，设成比例的是一个大于DEF的球LMN；

因此，取反比例，球LMN比球ABC是直径EF比BC的三倍比。

但因为LMN大于DEF，

因此，球LMN比球ABC如同球DEF比某个小于球ABC的球，如前

已证明的。

[XII. 2，引理]

因此，球DEF比某个小于球ABC的球也是EF比BC的三倍比：

已经证明这是不可能的。

因此，球ABC比某个大于球DEF的球不是BC比EF的三倍比。

但已证明，球ABC比某个小于球DEF的球也不是BC比EF的三倍比。

因此，球ABC比球DEF是BC与EF的三倍比。

这就是所要证明的。

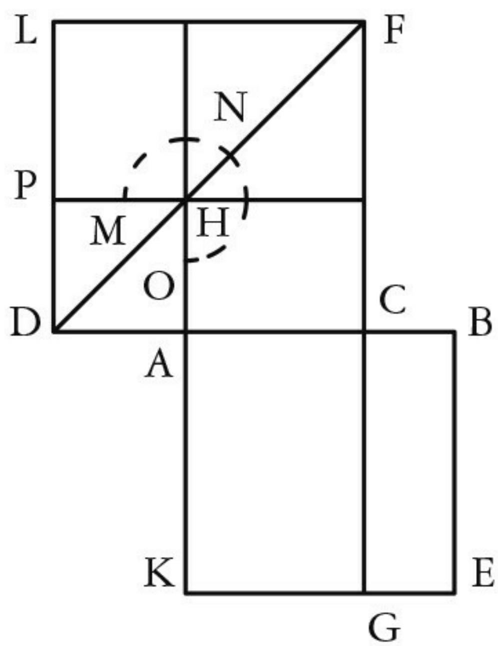
第十三卷

命题 Proposition

命题01

若把一直线分成中外比，则较大段与整条直线的一半之和上的正方形是整条直线一半上的正方形的五倍。

If a straight line be cut in extreme and mean ratio, the square on the greater segment added to the half of the whole is five times the square on the half.



设直线AB在点C被分成中外比，

且设AC是较大段；

作直线AD与CA成一直线，

使AD是AB的一半；

我说，CD上的正方形是AD上的正方形的五倍。

这是因为，在AB、DC上作正方形AE、DF，

且作DF中的图形；

延长FC到G。

现在，由于AB在C被分成中外比，

因此，矩形AB、BC等于AC上的正方形。

[VI. 定义3，VI. 17]

而CE是矩形AB、BC，且FH是AC上的正方形；

因此，CE等于FH。

又，由于BA是AD的二倍，

而BA等于KA，且AD等于AH，

因此，KA也是AH的二倍。

但KA比AH如同CK比CH；

[VI. 1]

因此，CK是CH的二倍。

但LH、HC之和也是CH的二倍。

因此，KC等于LH、HC之和。

但已证明，CE也等于HF；

因此，整个正方形AE等于拐尺形MNO。

又，由于BA是AD的二倍，

所以BA上的正方形是AD上的正方形的四倍，即AE是DH的四倍。

但AE等于拐尺形MNO；

因此，拐尺形MNO也是AP的四倍；

因此，整个DF是AP的五倍。

而DF是DC上的正方形，且AP是DA上的正方形；

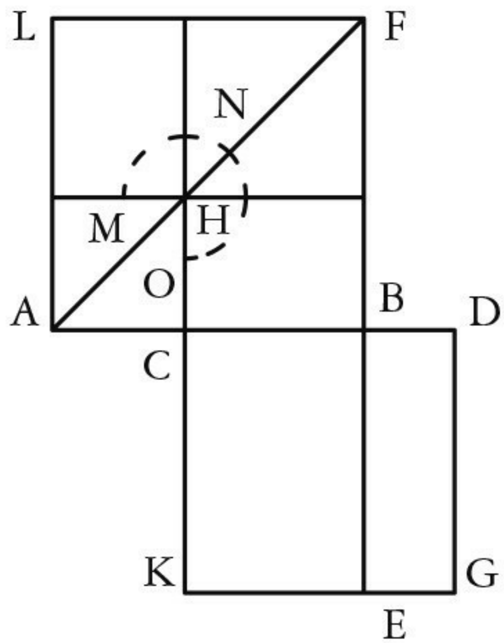
因此，CD上的正方形是DA上的正方形的五倍。

这就是所要证明的。

命题**02**

若一直线上的正方形是它的一段上的正方形的五倍，则当这段的二倍被分成中外比时，较长段是原来直线的其余部分。

If the square on a straight line be five times the square on a segment of it, then, when the double of the said segment is cut in extreme and mean ratio, the greater segment is the remaining part of the original straight line.



设直线AB上的正方形是其AC段上的正方形的五倍，

且设CD是AC的二倍；

我说，当CD被分成中外比时，较大段是CB。

在AB、CD上分别作正方形AF、CG，

作AF中的图形，

且作BE。

现在，由于BA上的正方形是AC上的正方形的五倍，所以

AF是AH的五倍。

因此，拐尺形MNO是AH的四倍。

又，由于DC是CA的二倍，

因此，DC上的正方形是CA上的正方形的四倍，

即CG是AH的四倍。

但已证明，拐尺形MNO也是AH的四倍；

因此，拐尺形MNO等于CG。

又，由于DC是CA的二倍，

而DC等于CK，且AC等于CH，

因此，KB也是BH的二倍。

[VI. 1]

但LH、HB之和也是HB的二倍；

因此，KB等于LH、HB之和。

但已证明，整个拐尺形MNO也等于整个CG；

因此，余量HF等于BG。

又，BG是矩形CD、DB，

这是因为CD等于DG；

且HF是CB上的正方形；

因此，矩形CD、DB等于CB上的正方形。

因此，DC比CB如同CB比BD。

但DC大于CB；

因此，CB也大于BD。

因此，当直线CD被分成中外比时，CB是较大段。

这就是所要证明的。

引理 证明AC的二倍大于BC。

如果不是这样，那么如果可能，设BC是CA的二倍。

因此，BC上的正方形是CA上的正方形的四倍；

因此，BC、CA上的正方形之和是CA上的正方形的五倍。

但根据假设，BA上的正方形也是CA上的正方形的五倍；

因此，BA上的正方形等于BC、CA上的正方形之和；

这是不可能的。

[II. 4]

因此，CB不是AC的二倍。

类似地，可以证明，小于CB的直线也不是CA的二倍；

因为这更荒谬。

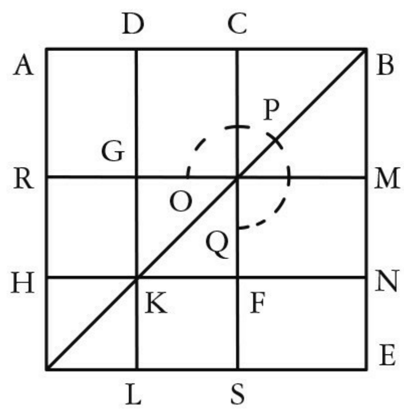
因此，AC的二倍大于CB。

这就是所要证明的。

命题**03**

若将一直线分成中外比，则较小段与较大段一半之和上的正方形是较大段一半上的正方形的五倍。

If a straight line be cut in extreme and mean ratio, the square on the lesser segment added to the half of the greater segment is five times the square on the half of the greater segment.



设直线AB在点C被分成中外比，

设AC是较大段，

且设AC在D被二等分；

我说，BD上的正方形是DC上的正方形的五倍。

这是因为，在AB上作正方形AE，

且设图已二倍地作出。

由于AC是DC的二倍，

因此，AC上的正方形是DC上的正方形的四倍，

即RS是FG的四倍。

又，由于矩形AB、BC等于AC上的正方形，

且CE是矩形AB、BC，

因此，CE等于RS。

但RS是FG的四倍；

因此，CE也是FG的四倍。

又，由于AD等于DC，所以

HK也等于KF。

因此，正方形GF也等于正方形HL。

因此，GK等于KL，即MN等于NE；

因此，MF也等于FE。

但MF等于CG；

因此，CG也等于FE。

给它们分别加上CN；

因此，拐尺形OPQ等于CE。

但已证明，CE是GF的四倍；

因此，拐尺形OPQ也是正方形FG的四倍。

因此，拐尺形OPQ与正方形FG之和是FG的五倍。

但拐尺形OPQ与正方形FG之和是正方形DN。

而DN是DB上的正方形，且GF是DC上的正方形。

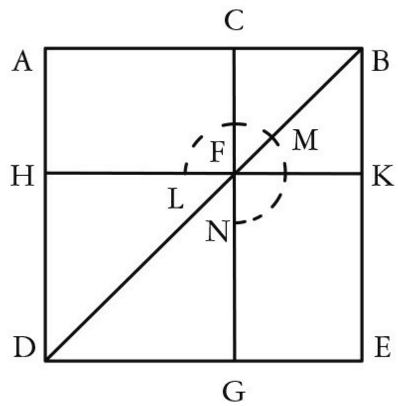
因此，DB上的正方形是DC上的正方形的五倍。

这就是所要证明的。

命题**04**

若一条直线被分成中外比，则整条直线上的正方形与较小段上的正方形之和是较大段上的正方形的三倍。

If a straight line be cut in extreme and mean ratio, the square on the whole and the square on the lesser segment together are triple of the square on the greater segment.



设AB是一条直线，

设它在C被分成中外比，

且设AC是较大段；

我说，AB、BC上的正方形之和是CA上的正方形的三倍。

这是因为，在AB上作正方形ADEB，

且设图已作出。

于是，由于AB在C被分成中外比，

且AC是较大段，

因此，矩形AB、BC等于AC上的正方形。

[VI. 定义3，VI. 17]

而AK是矩形AB、BC，且HG是AC上的正方形；

因此，AK等于HG。

又，由于AF等于FE，

给它们分别加上CK；

因此，整个AK等于整个CE；

因此，AK、CE之和是AK的二倍。

但AK、CE之和是拐尺形LMN与正方形CK之和；

因此，拐尺形LMN与正方形CK之和是AK的二倍。

但已证明，AK也等于HG；

因此，拐尺形LMN与正方形CK、HG之和是正方形HG的三倍。

又，拐尺形LMN与正方形CK、HG之和是整个正方形AE与CK之和，即AB、BC上的正方形之和，

而HG是AC上的正方形。

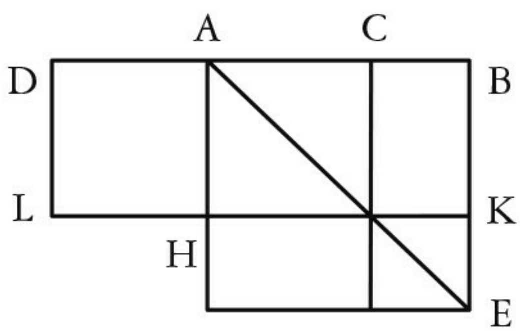
因此，AB、BC上的正方形之和是AC上的正方形的三倍。

这就是所要证明的。

命题**05**

若一条直线被分成中外比，且在此直线上加一个等于较大段的直线。则整条直线被分成中外比，且原直线是较大段。

If a straight line be cut in extreme and mean ratio, the square on the whole and the square on the lesser segment together are triple of the square on the greater segment.



设直线AB在点 C被分成中外比，

且AC是较大段，

且设AD等于AC。

我说，直线DB在A被分成中外比，

且原直线AB是较大段。

这是因为，在AB上作正方形AE，

且设图已作出。

由于AB在C被分成中外比，

因此，矩形AB、BC等于AC上的正方形。

[VI. 定义3，VI. 17]

而CE是矩形AB、BC，且CH是AC上的正方形；

因此，CE等于HC。

但HE等于CE，

且DH等于HC；

因此，DH也等于HE。

因此，整个DK等于整个AE。

又，DK是矩形BD、DA，这是因为AD等于DL；

且AE是AB上的正方形；

因此，矩形BD、DA等于AB上的正方形。

因此，DB比BA如同BA比AD。

[VI. 17]

而DB大于BA；

因此，BA也大于AD。

[V. 14]

因此，DB在A被分成中外比，且AB是较大段。

这就是所要证明的。

命题**06**

若一有理直线被分成中外比，则每一段都是被称为余线的无理直线。

If a rational straight line be cut in extreme and mean ratio, each of the segments is the irrational straight line called apotome.



设AB是一条有理直线，

设AB在C被分成中外比，

且设AC是较大段；

我说，直线AC、CB中的每一条都是被称为余线的无理直线。

这是因为，延长BA，使AD是BA的一半。

于是，由于直线AB被分成中外比，

且把AB的一半AD加到较大段AC上，

因此，CD上的正方形是DA上的正方形的五倍。

[XIII. 1]

因此，CD上的正方形比DA上的正方形是一个数比一个数；

因此，CD上的正方形与DA上的正方形可公度。

[X. 6]

但DA上的正方形是有理的，

这是因为DA是有理的，DA是AB的一半，AB是有理的；

因此，CD上的正方形也是有理的；

[X. 定义4]

因此，CD也是有理的。

又，由于CD上的正方形比DA上的正方形不如同一个平方数比一个平方数，

因此，CD与DA长度不可公度；

[X. 9]

因此，CD、DA是仅正方可公度的有理直线；

因此，AC是一条余线。

[X. 73]

又，由于AB被分成中外比，

且AC是较大段，

因此，矩形AB、BC等于AC上的正方形。

[VI. 定义3，VI. 17]

因此，余线AC上的正方形，如果是对有理直线AB贴合出的，则产生作为宽的BC。

但对一有理直线贴合出一个矩形等于一条余线上的正方形，则产生的宽是第一余线；

[X. 97]

因此，CB是第一余线。

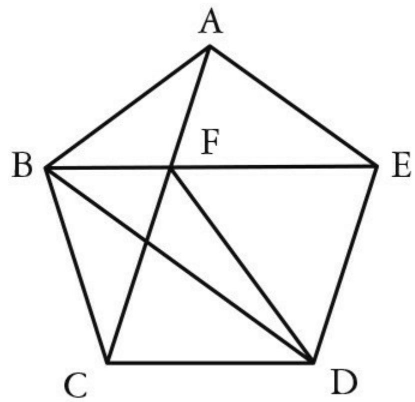
且已证明，CA也是一条余线。

这就是所要证明的。

命题**07**

若一等边五边形有三个角相等，无论相邻或不相邻，则该五边形是等角五边形。

If three angles of an equilateral pentagon, taken either in order or not in order, be equal, the pentagon will be equiangular.



在等边五边形ABCDE中，首先设相邻的三个角，即A、B、C处的角，彼此相等；

我说，五边形ABCDE是等角的。

这是因为，连接AC、BE、FD。

现在，由于两边CB、BA分别等于两边BA、AE，

且角CBA等于角BAE，

因此，底AC等于底BE，三角形ABC等于三角形ABE，且其余的角等于其余的角，

即那些等边所对的角相等，

[I. 4]

即角BCA等于角BEA，且角ABE等于角CAB；

因此，边AF也等于边BF。

[I. 6]

但已证明，整个AC也等于整个BE；

因此，其余的FC也等于其余的FE。

但CD也等于DE。

因此，两边FC、CD等于两边FE、ED；

而底FD公用；

因此，角FCD等于角FED。

[I. 8]

但已证明，角BCA也等于角AEB；

因此，整个角BCD也等于整个角AED。

但根据假设，角BCD等于A、B处的角；

因此，角AED也等于A、B处的角。

类似地，可以证明，角CDE也等于A、B、C处的角；

因此，五边形ABCDE是等角的。

其次，设给定的等角不是相邻的，但设A、C、D处的角是相等的；

我说，在这种情况下，五边形ABCDE也是等角的。

这是因为，连接BD。

于是，由于两边BA、AE等于两边BC、CD，

且它们夹角相等，

因此，底BE等于底BD，

三角形ABE等于三角形BCD，

且其余的角等于其余的角，

即等边所对的角相等；

[I. 4]

因此，角AEB等于角CDB。

但角BED也等于角BDE，

由于边BE也等于边BD。

[I. 5]

因此，整个角AED等于整个角CDE。

但根据假设，角CDE等于A、C处的角；

因此，角AED也等于A、C处的角。

同理，

角ABC也等于A、C、D处的角。

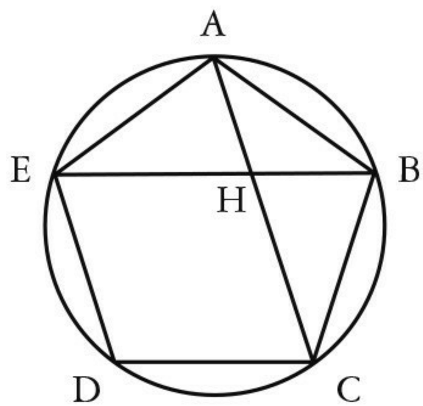
因此，五边形ABCDE是等角的。

这就是所要证明的。

命题**08**

在一个等边且等角的五边形中，顺次作两角所对的直线，则这些直线交成中外比，且较大段等于五边形的边。

If in an equilateral and equiangular pentagon straight lines subtend two angles taken in order, they cut one another in extreme and mean ratio, and their greater segments are equal to the side of the pentagon.



在等边且等角的五边形ABCDE中，顺次作A、B处的角所对的直线AC、BE，它们彼此交于点H；

我说，两直线中的每一条都在点H被分成中外比，且它们的较大段都等于五边形的边。

这是因为，设圆ABCDE外接于五边形ABCDE。

[IV. 14]

于是，由于两直线EA、AB等于两直线AB、BC，

且它们夹相等的角，

因此，底BE等于底AC，

三角形ABE等于三角形ABC，

且其余的角分别等于其余的角，

即等边所对的角相等。

[I. 4]

因此，角BAC等于角ABE；

因此，角AHE是角BAH的二倍。

[I. 32]

但角EAC也是角BAC的二倍，

这是因为，圆周EDC也是圆周CB的二倍；

[III. 28，VI. 33]

因此，角HAE等于角AHE；

因此，直线HE也等于EA，

即等于AB。

[I. 6]

又，由于直线BA等于AE，所以

角ABE也等于角AEB。

[I. 5]

但已证明，角ABE等于角BAH；

因此，角BEA也等于角BAH。

而角ABE是两三角形ABE和ABH的公共角；

因此，其余的角BAE等于其余的角AHB；

[I. 32]

因此，三角形ABE与三角形ABH是等角的。

因此有比例，EB比BA如同AB比BH。

[VI. 4]

但BA等于EH；

因此，BE比EH如同EH比HB。

而BE大于EH；

因此，EH也大于HB。

[V. 14]

因此，BE在H被分成中外比，其较大段HE等于五边形的边。

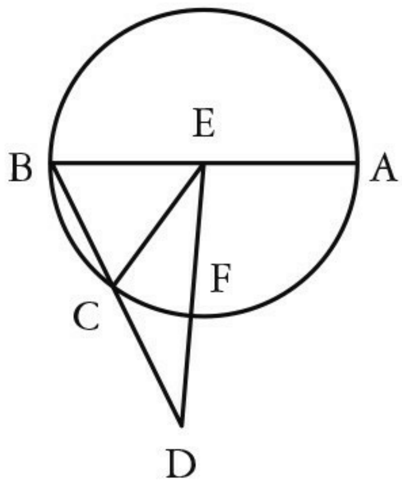
类似地，可以证明，AC也在点H被分成中外比，其较大段CH等于五边形的边。

这就是所要证明的。

命题**09**

若把同一个圆的内接正六边形的一边与内接正十边形的一边加在一起，则整条直线被分成中外比，其较大段是正六边形的边。

If the side of the hexagon and that of the decagon inscribed in the same circle be added together, the whole straight line has been cut in extreme and mean ratio, and its greater segment is the side of the hexagon.



设ABC是一个圆；

BC是圆ABC的内接正十边形的边，CD是内接正六边形的边，且设它们在同一直线上；

我说，整条直线BD被分成中外比，CD是其较大段。

这是因为，取圆心点E，

连接EB、EC、ED。

延长BE到A。

由于BC是等边十边形的边，因此，圆周ACB是圆周BC的五倍；

因此，圆周AC是圆周CB的四倍。

但圆周AC比圆周BC如同角AEC比角CEB；

[VI. 33]

因此，角AEC是角CEB的四倍。

又，由于角EBC等于角ECB，

[I. 5]

因此，角AEC是角ECB的二倍。

[I. 32]

又，由于直线EC等于CD，

这是因为，它们中的每一条都等于圆ABC的内接正六边形的边，

[IV. 15，推论]

所以角CED也等于角CDE；

[I. 5]

因此，角ECB是角EDC的二倍。

[I. 32]

但已证明，角AEC是角ECB的二倍；

因此，角AEC是EDC的四倍。

但已证明，角AEC也是角BEC的四倍；

因此，角EDC等于角BEC。

但角EBD是两三角形BEC和BED的公共角；

因此，其余的角BED也等于其余的角ECB；

[I. 32]

因此，三角形EBD与三角形EBC是等角的。

因此有比例，DB比BE如同EB比BC。

[VI. 4]

但EB等于CD。

因此，BD比DC如同DC比CB。

而BD大于DC;

因此，DC也大于CB。

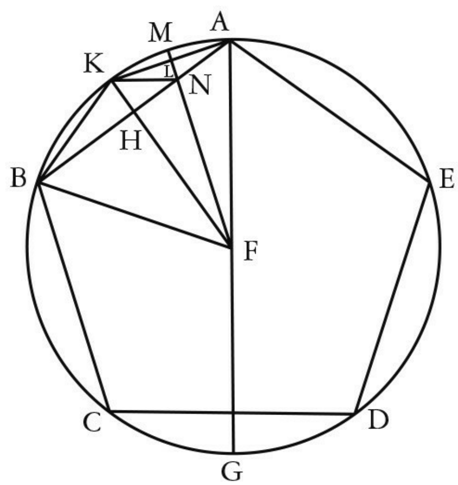
因此，直线BD被分成中外比，DC是其较大段。

这就是所要证明的。

命题**10**

若一个等边五边形内接于圆，则该五边形边上的正方形等于该圆的内接六边形边上的正方形与内接十边形边上的正方形之和。

If an equilateral pentagon be inscribed in a circle, the square on the side of the pentagon is equal to the squares on the side of the hexagon and on that of the decagon inscribed in the same circle.



设ABCDE是一个圆，

且设等边五边形ABCDE内接于圆ABCDE。

我说，五边形ABCDE边上的正方形等于圆ABCDE的内接六边形边上的正方形与十边形边上的正方形之和。

这是因为，取点F为圆心，

连接AF并延长到点G，

连接FB，

从F作FH垂直于AB且与圆交于K，

连接AK、KB，

再从F作FL垂直于AK且与圆交于M，

连接KN。

由于圆周ABCG等于圆周AEDG，

且在它们中，ABC等于AED，

因此，其余的圆周CG等于其余的圆周GD。

但CD属于一个五边形；

因此，CG属于一个十边形。

又，由于FA等于FB，

且FH是垂线，

因此，角AFK也等于角KFB。

[I. 5，I. 26]

因此，圆周AK也等于KB；

[III. 26]

因此，圆周AB是圆周BK的二倍；

因此，直线AK是十边形的一边。

同理，

圆周AK也是KM的二倍。

现在，由于圆周AB是圆周BK的二倍，

而圆周CD等于圆周AB，

因此，圆周CD也是圆周BK的二倍。

但圆周CD也是CG的二倍；

因此，圆周CG等于圆周BK。

但BK是KM的二倍，这是因为KA也是KM的二倍；

因此，CG也是KM的二倍。

但此外，圆周CB也是圆周BK的二倍，

这是因为圆周CB等于圆周BA。

因此，整个圆周BG也是BM的二倍；

因此，角GFB也是角BFM的二倍。

[VI. 33]

但角GFB也是角FAB的二倍，

这是因为角FAB等于角ABF。

因此，角BFN也等于角FAB。

但角ABF是两三角形ABF和BFN的公共角；

因此，其余的角AFB等于其余的角BNF；

[I. 32]

因此，三角形ABF与三角形BFN是等角的。

因此有比例，直线AB比BF如同FB比BN；

[VI. 4]

因此，矩形AB、BN等于BF上的正方形。

[VI. 17]

又，由于AL等于LK，

而LN公用且成直角，

因此，底KN等于底AN；

[I. 4]

因此，角LKN也等于角LAN。

但角LAN等于角KBN；

因此，角LKN也等于角KBN。

而A处的角是两三角形AKB和AKN的公共角。

因此，其余的角AKB等于其余的角KNA；

[I. 32]

因此，三角形KBA与三角形KNA是等角的。

因此有比例，直线BA比AK如同KA比AN；

[VI. 4]

因此，矩形BA、AN等于AK上的正方形。

[VI. 17]

但已证明，矩形AB、BN也等于BF上的正方形；

因此，矩形AB、BN与矩形BA、AN之和，即BA上的正方形[II. 2]，等于BF上的正方形与AK上的正方形之和。

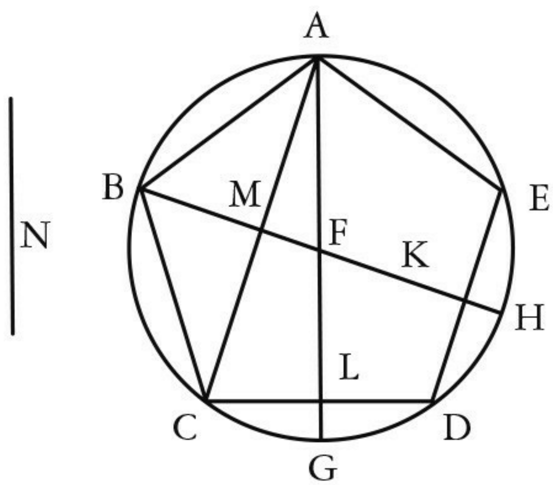
且BA是五边形的一边，BF是六边形的一边[IV. 15，推论]，AK是十边形的一边。

这就是所要证明的。

命题**11**

若一个等边五边形内接于一个有理直径的圆，则五边形的边是被称为次线的无理直线。

If in a circle which has its diameter rational an equilateral pentagon be inscribed, the side of the pentagon is the irrational straight line called minor.



设等边五边形ABCDE内接于有理直径的圆ABCDE；

我说，五边形的边是被称为次线的无理直线。

这是因为，取点F为圆心，

连接AF、FB，并延长到点G、H，

连接AC，

且使FK是AF的四分之一。

现在，AF是有理的；

因此，FK也是有理的。

但BF也是有理的；

因此，整个BK是有理的。

又，由于圆周ACG等于圆周ADG，

且其中ABC等于AED，

因此，其余的CG等于其余的GD。

如果连接AD，则可断定

点L处的角是直角，

且CD是CL的二倍。

同理，

M处的角也是直角，

且AC是CM的二倍。

于是，由于角ALC等于角AMF，

且角LAC是两三角形ACL和AMF的公共角，

因此，其余的角ACL等于其余的角 MFA；

[I. 32]

因此，三角形ACL与三角形AMF是等角的；

因此有比例，LC比CA如同MF比FA。

而可以取前项的二倍；

因此， LC的二倍比CA如同MF的二倍比FA。

但MF的二倍比FA如同MF比FA的一半；

因此也有，LC的二倍比CA如同MF比FA的一半。

而可以取后项的一半；

因此，LC的二倍比CA的一半如同MF比FA的四分之一。

而DC是LC的二倍，CM是CA的一半，FK是FA的四分之一；

因此，DC比CM如同MF比FK。

取合比例也有，DC、CM之和比CM如同MK比KF；

[V. 18]

因此也有，DC、CM之和上的正方形比CM上的正方形如同MK上的正方形比KF上的正方形。

又，由于当五边形的两边所对的直线AC被分成中外比时，较大段等于五边形的边，即等于DC，

[XIII. 8]

而较大段与整条直线一半之和上的正方形是整条直线一半上的正方形的五倍，

[XIII. 1]

且CM是整个AC的一半，

因此，DC、CM之和上的正方形是CM上的正方形的五倍。

但已证明，DC、CM之和上的正方形比CM上的正方形如同MK上的正方形比KF上的正方形；

因此，MK上的正方形是KF上的正方形的五倍；

但KF上的正方形是有理的

这是因为它的直径是有理的；

因此，MK上的正方形也是有理的；

因此，MK是有理的。

又，由于BF是FK的四倍，

因此，BK是KF的五倍；

因此，BK上的正方形是KF上的正方形的二十五倍。

但MK上的正方形是KF上的正方形的五倍；

因此，BK上的正方形比KM上的正方形不如同一个平方数比一个平方数；

因此，BK与KM长度不可公度。

[X. 9]

而它们中的每一个都是有理的。

因此，BK、KM是仅正方可公度的有理直线。

但若从一有理直线中减去与之仅正方可公度的有理直线，则余量是无理的，即一条余线；

因此，MB是一条余线，且MK附加于它。

[X. 73]

其次我说，MB也是第四余线。

设N上的正方形等于BK上的正方形与KM上的正方形之差；

因此，BK上的正方形比KM上的正方形大一个N上的正方形。

又，由于KF与FB可公度，

取合比例，KB与FB也可公度。

[X. 15]

但BF与BH可公度；

因此，BK与BH也可公度。

[X. 12]

又，由于BK上的正方形是KM上的正方形的五倍，

因此，BK上的正方形比KM上的正方形是5比1。

因此，取换比例，

BK上的正方形比N上的正方形是5比4，

[V. 19，推论]

而这不是一个平方数比一个平方数；

因此，BK与N不可公度；

[X. 9]

因此，BK上的正方形比KM上的正方形大一个与BK不可公度的直线上的正方形。

于是，由于整个BK上的正方形比附加的KM上的正方形大一个与BK不可公度的直线上的正方形，

且整个BK与有理直线BH可公度，

因此，MB是第四余线。

[X. 定义，III. 4]

但由一条有理直线和一条第四余线所围成的矩形是无理的，它的平方根是无理的，且被称为次线。

[X. 94]

但AB上的正方形等于矩形HB、BM，

因为当连接AH时，三角形ABH与三角形ABM是等角的，且HB比BA如同AB比BM。

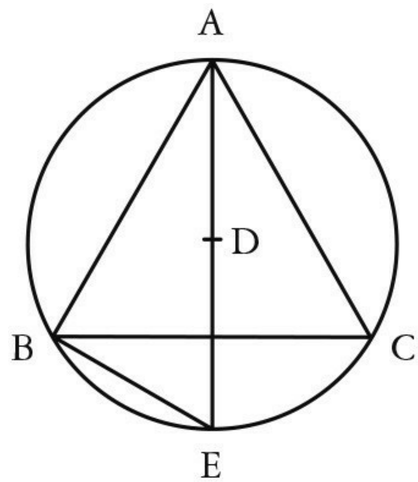
因此，五边形的边AB是被称为次线的无理直线。

这就是所要证明的。

命题**12**

若一等边三角形内接于圆，则三角形边上的正方形是圆半径上的正方形的三倍。

If an equilateral triangle be inscribed in a circle, the square on the side of the triangle is triple of the square on the radius of the circle.



设ABC是一个圆，

且设等边三角形ABC内接于它；

我说，三角形ABC一边上的正方形是圆半径上的正方形的三倍。

这是因为，取圆ABC的圆心D，

连接AD并延长到E，

连接BE。

于是，由于三角形ABC是等边的，

因此，圆周BEC是圆ABC的圆周的三分之一。

因此，圆周BE是圆的圆周的六分之一；

因此，直线BE属于一个六边形；

因此，它等于半径DE。

[IV. 15，推论]

又，由于AE是DE的二倍，

AE上的正方形是ED上的正方形的四倍，即BE上的正方形的四倍。

但AE上的正方形等于AB、BE上的正方形之和；

[III. 31，I. 47]

因此，AB、BE上的正方形之和是BE上的正方形的四倍。

因此，取分比例，AB上的正方形是BE上的正方形的三倍。

但BE等于DE；

因此，AB上的正方形是DE上的正方形的三倍。

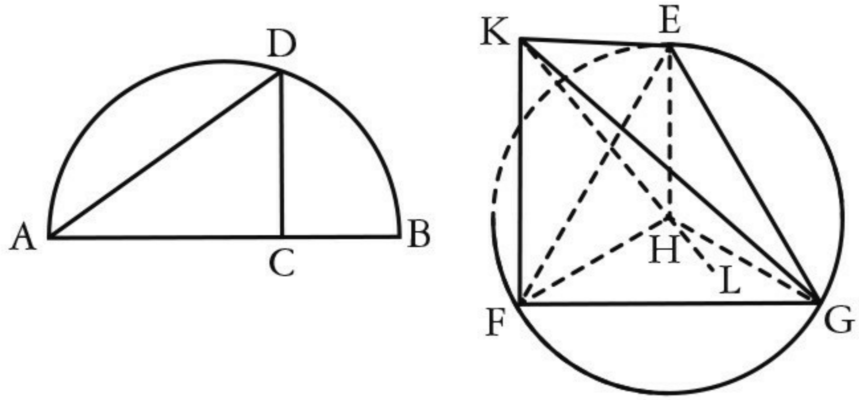
因此，三角形边上的正方形是半径上的正方形的三倍。

这就是所要证明的。

命题**13**

作给定球的内接棱锥，且证明球直径上的正方形是棱锥边上的正方形的一倍半。

To construct a pyramid, to comprehend it in a given sphere, and to prove that the square on the diameter of the sphere is one and a half times the square on the side of the pyramid.



作给定球的直径AB，

设它在点C被截，使AC是CB的二倍；

在AB上作半圆ADB，

从点C作CD与AB成直角，

连接DA；

设圆EFG的半径等于DC，

设等边三角形EFG内接于圆EFG，

[IV. 2]

取圆心为点H，

[III. 1]

连接EH、HF、HG；

从点H作HK与圆EFG的平面成直角。

[XI. 12]

在HK上截取HK等于直线AC，

连接KE、KF、KG。

现在，由于KH与圆EFG的平面成直角，

因此，它也与圆EFG的平面上与它相交的所有直线成直角。

[XI. 定义3]

但直线HE、HF、HG中的每一条都和它相交：

因此，HK与直线HE、HF、HG中的每一条都成直角。

又，由于AC等于HK，且CD等于HE，

且它们夹直角，

因此，底DA等于底KE。

[I. 4]

同理，

直线KF、KG中的每一条也等于DA；

因此，三条直线KE、KF、KG彼此相等。

又，由于AC是CB的二倍，

因此，AB是BC的三倍。

但正如后面将要证明的，AB比BC如同AD上的正方形比DC上的正方形。

因此，AD上的正方形是DC上的正方形的三倍。

但FE上的正方形也是EH上的正方形的三倍，

[XIII. 12]

且DC等于EH；

因此，DA也等于EF。

但已证明，DA等于直线KE、KF、KG中的每一条；

因此，直线EF、FG、GE中的每一条也等于直线KE、KF、KG中的每一条；

因此，四个三角形EFG、KEF、KFG、KEG是等边的。

这样便由四个等边三角形围成了一个棱锥，三角形EFG是它的底且点K是它的顶点。

其次，要求它内接于给定的球，且证明球直径上的正方形是该棱锥边上的正方形的一倍半。

使直线HL与KH成一直线，

且取HL等于CB。

现在，由于AC比CD如同CD比CB，

[VI. 8，推论]

而AC等于KH，CD等于HE，且CB等于HL，

因此，KH比HE如同EH比HL；

因此，矩形KH、HL等于EH上的正方形。

[VI. 17]

而角KHE、EHL中的每一个都是直角；

因此，在KL上作的半圆也经过E。

[参见VI. 8，III. 31]

于是，若KL保持固定，使半圆旋转到开始移动的同一位置，则它也过点F、G，

因为如果连接FL、LG，则F、G处的角是直角；

且棱锥内接于给定的球。

这是因为，球的直径KL等于给定的球的直径AB，因为KH等于AC，且HL等于CB。

其次我说，球的直径上的正方形是棱锥边上的正方形的一倍半。

这是因为，AC是BC的二倍。

因此，AB是BC的三倍；

取反比例，BA是AC的一倍半。

但BA比AC如同BA上的正方形比AD上的正方形。

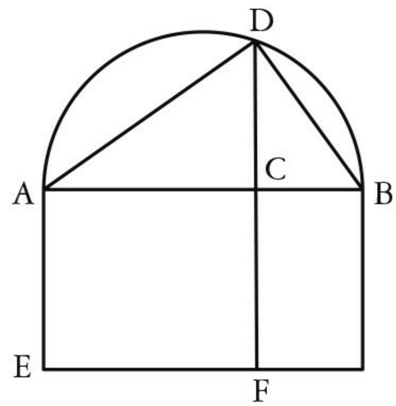
因此，BA上的正方形也是AD上的正方形的一倍半。

而BA是给定的球的直径，且AD等于棱锥的边。

因此，球的直径上的正方形是棱锥边上的正方形的一倍半。

这就是所要证明的。

引理 要求证明，AB比BC如同AD上的正方形比DC上的正方形。



这是因为，作半圆图形，

连接DB，

在AC上作正方形EC，

将平行四边形FB补充完整。

于是，由于三角形DAB与三角形DAC是等角的，

BA比AD如同DA比AC，

[VI. 8，VI. 4]

因此，矩形BA、AC等于AD上的正方形。

[VI. 17]

又，由于AB比BC如同EB比BF，

[VI. 1]

且EB是矩形BA、AC，这是因为EA等于AC，

且BF是矩形AC、CB，

因此，AB比BC如同矩形BA、AC比矩形AC、CB。

而矩形BA、AC等于AD上的正方形，

且矩形AC、CB等于DC上的正方形，

这是因为垂线DC是底的直线段AC、CB的比例中项，因为角ADB是直角。

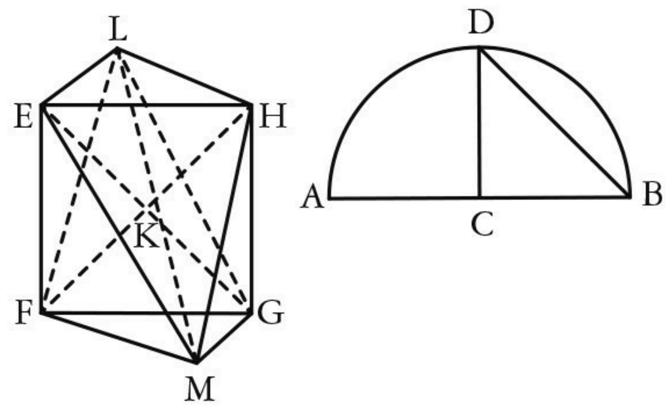
[VI. 8，推论]

因此，AB比BC如同AD上的正方形比DC上的正方形。

命题**14**

和前面的情况一样，作一个球的内接八面体；且证明球直径上的正方形是八面体边上的正方形的二倍。

To construct an octahedron and comprehend it in a sphere, as in the preceding case; and to prove that the square on the diameter of the sphere is double of the square on the side of the octahedron.



作给定球的直径AB，

且设它在C被二等分；

在AB上作半圆ADB，

从C作CD与AB成直角，

连接DB；

作正方形EFGH，使它的每条边都等于DB，

连接HF、EG，

从点K作直线KL与正方形EFGH的平面成直角，

[XI. 12]

且延长它到平面的另一侧，为KM；

在直线KL、KM上分别截取KL、KM等于直线EK、FK、GK、HK中的每一条，

连接LE、LF、LG、LH、ME、MF、MG、MH。

于是，由于KE等于KH，且角EKH是直角，

因此，HE上的正方形是EK上的正方 形的二倍。

[I. 47]

又，由于LK等于KE，

且角LKE是直角，

因此，EL上的正方形是EK上的正方形的二倍。

[I. 47]

但已证明，HE上的正方形是EK上的正方形的二倍；

因此，LE上的正方形等于EH上的正方形；

因此，LE等于EH。

同理，

LH也等于HE；

因此，三角形LEH是等边的。

类似地，可以证明，以正方形EFGH的边为底且以点L、M为顶点的其余三角形中的每一个都是等边的；这样便作出了由八个等边三角形所围成的八面体。

其次，要求它内接于给定的球，并证明球直径上的正方形是八面体边上的正方形的二倍。

这是因为，由于三条直线LK、KM、KE彼此相等，

因此，在LM上所作的半圆也经过E。

同理，

如果LM保持固定，旋转半圆到开始运动的同一位置，则

它也过点F、G、H，

且该八面体内接于一个球。

其次我说，它也内接于给定的球。

这是因为，由于LK等于KM，

而KE公用，

且它们夹直角，

因此，底LE等于底EM。

[I. 4]

又，由于角LEM是直角，这是因为它在半圆上，

[III. 31]

因此，LM上的正方形是LE上的正方 形的二倍。

[I. 47]

又，由于AC等于CB，所以

AB是BC的二倍。

但AB比BC如同AB上的正方形比BD上的正方形；

因此，AB上的正方形是BD上的正方形的二倍。

但已证明，LM上的正方形也是LE上的正方形的二倍。

且DB上的正方形等于LE上的正方形，

这是因为取EH等于DB。

因此，AB上的正方形也等于LM上的正方形；

因此，AB等于LM。

而AB是给定球的直径；

因此，LM等于给定球的直径。

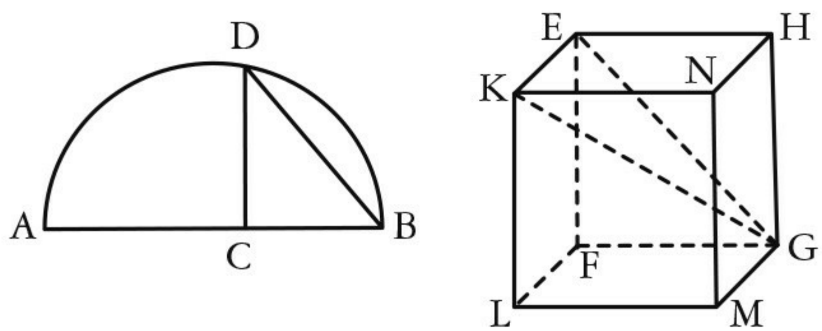
这样便在给定的球中作出了八面体，且同时证明了球直径上的正方形是八面体边上的正方形的二倍。

这就是所要证明的。

命题**15**

和棱锥一样，作一个球的内接立方体；且证明球直径上的正方形是立方体边上的正方形的三倍。

To construct a cube and comprehend it in a sphere, like the pyramid; and to prove that the square on the diameter of the sphere is triple of the square on the side of the cube.



作给定球的直径AB，

设它在点C被截，使AC是CB的二倍；

在AB上作半圆ADB，

从C作CD与AB成直角，

连接DB；

设正方形EFGH的边等于DB，

从E、F、G、H作EK、FL、GM、HN与正方形EFGH的平面成直角，

在EK、FL、GM、HN上分别截取EK、FL、GM、HN使它们等于直线EF、FG、GH、HE中的每一条，

连接KL、LM、MN、NK；

这样便作出了立方体FN，它由六个相等的正方形所围成。

于是，要求使它内接于给定的球，且证明球直径上的正方形是立方体边上的正方形的三倍。

连接KG、EG。

于是，由于角KEG是直角，这是因为KE与平面EG成直角，当然与直线EG也成直角，

[XI. 定义3]

因此，在KG上所作的半圆也过点E。

又，由于GF与FL、FE中的每一条都成直角，所以

GF也与平面FK成直角；

因此也有，如果连接FK，则GF与FK成直角；

因此，在GK上所作的半圆也过F。

类似地，它也过立方体其余的顶点。

于是，如果KG保持固定，使半圆旋转到开始运动的同一位置，则

该立方体内接于一个球。

其次我说，它也内接于给定的球。

这是因为，由于GF等于FE，

且F处的角是直角，

因此，EG上的正方形是EF上的正方形的二倍。

但EF等于EK；

因此，EG上的正方形是EK上的正方形的二倍。

因此，GE、EK上的正方形之和，即GK上的正方形[l. 47]，是EK上

的正方形的三倍。

又，由于AB是BC的三倍。

而AB比BC如同AB上的正方形比BD上的正方形，

因此，AB上的正方形是BD上的正方形的三倍。

但已证明，GK上的正方形也是KE上的正方形的三倍。

而KE等于DB；

因此，KG也等于AB。

而AB是给定球的直径；

因此，KG也等于给定球的直径。

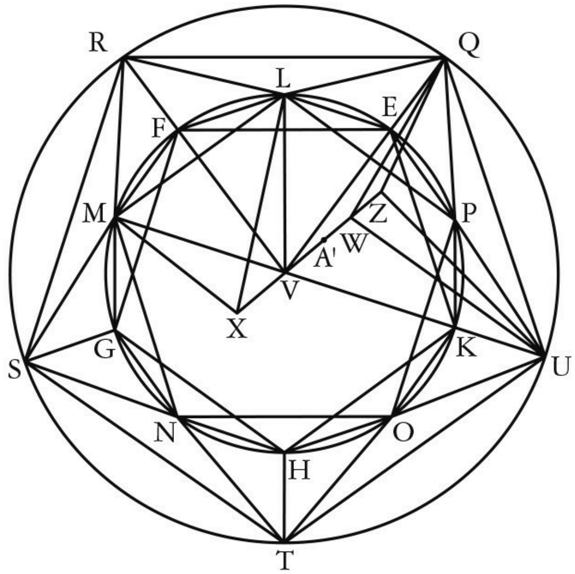
这样便作出了给定球的内接立方体；并且同时证明了球直径上的正方形是立方体边上的正方形的三倍。

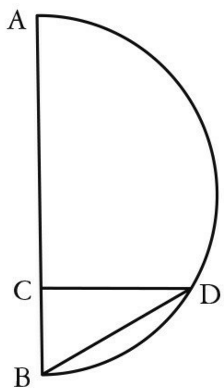
这就是所要证明的。

命题**16**

与前述图形一样，作一个球的内接二十面体；且证明该二十面体的边是被称为次线的无理直线。

To construct an icosahedron and comprehend it in a sphere, like the aforesaid figures; and to prove that the side of the icosahedron is the irrational straight line called minor.





作给定球的直径AB，

设它在点C被截，使AC是CB的四倍；

在AB上作半圆ADB，

从C作CD与AB成直角，

连接DB；

作圆EFGHK，设其半径等于DB，

作圆EFGHK的内接等边等角五边形EFGHK，

设圆周EF、FG、GH、HK、KE在点L、M、N、O、P被二等分。

连接LM、MN、NO、OP、PL、EP。

因此，五边形LMNOP也是等边的，

且直线EP属于一个十边形。

现在，从点E、F、G、H、K作直线EQ、FR、GS、HT、KU与圆的平面成直角，

且设它们等于圆EFGHK的半径，

连接QR、RS、ST、TU、UQ、QL、LR、RM、MS、SN、NT、TO、OU、UP、PQ。

现在，由于直线EQ、KU中的每一条都与同一平面成直角，

因此，EQ平行于KU。

[XI. 6]

但EQ也等于KU；

而在端点处沿相同方向分别连接相等且平行的直线，连成的直线自身也相等且平行。

[I. 33]

因此，QU等于且平行于EK。

但EK属于一个等边五边形；

因此，QU也属于圆EFGHK的内接等边五边形。

同理，

直线QR、RS、ST、TU中的每一条都属于圆QRSTU的内接等边五边形；

因此，五边形QRSTU是等边的。

又，由于QE属于一个六边形，

且EP属于一个十边形，

且角QEP是直角，

因此，QP属于一个五边形；

这是因为，内接于同一圆的五边形边上的正方形等于内接六边形边上的正方形与内接十边形边上的正方形之和。

[XIII. 10]

同理，

PU也是一个五边形的边。

但QU也属于一个五边形；

因此，三角形QPU是等边的。

同理，

三角形QLR、RMS、SNT、TOU中的每一个也是等边的。

又，由于已经证明，直线QL、QP中的每一条都属于一个五边形，

而LP也属于一个五边形，

因此，三角形QLP是等边的。

同理，

三角形LRM、MSN、NTO、OUP中的每一个也是等边的。

取圆EFGHK的圆心点V；

从V作VZ与圆的平面成直角。

沿另一方向延长它成VX，

截取VW为一个六边形的边，且直线VX、WZ中的每一条都是一个十边形的边。

连接QZ、QW、UZ、EV、LV、LX、XM。

现在，由于直线VW、QE中的每一条都与圆的平面成直角，

因此，VW平行QE。

[XI. 6]

但它们也相等；

因此，EV、QW相等且平行。

[I. 33]

但EV属于一个六边形；

因此，QW也属于一个六边形。

又，由于QW属于一个六边形，

而WZ属于一个十边形，

且角QWZ是直角，

因此，QZ属于一个五边形。

[XIII. 10]

同理，

UZ也属于一个五边形，

这是因为，如果连接VK、WU，则它们相等且相对，而作为半径的VK属于一个六边形；

[IV. 15，推论]

因此，WU也属于一个六边形。

但WZ属于一个十边形，

且角UWZ是直角；

因此，UZ属于一个五边形。

[XIII. 10]

但QU也属于一个五边形；

因此，三角形QUZ是等边的。

同理，

其余的以直线QR、RS、ST、TU为底且以点Z为顶点的三角形也是等边的。

又，由于VL属于一个六边形，

而VX属于一个十边形，

且角LVX是直角，

因此，LX属于一个五边形。

[XIII. 10]

同理，

如果连接MV，它属于一个六边形，则可推出，

MX也属于一个五边形。

但LM也属于一个五边形；

因此，三角形LMX是等边的。

类似地，可以证明，其余的以直线MN、NO、OP、PL为底且以点X为顶点的三角形也都是等边的。

这样便作出了由二十个等边三角形所构成的一个二十面体。

其次，要求作给定球的内接二十面体，且证明该二十面体的边是被称为次线的无理直线。

这是因为，由于VW属于一个六边形，

且WZ属于一个十边形，

因此，VZ在 W被分成中外比，

且VW是其较大段；

[XIII. 9]

因此，ZV比VW如同VW比WZ。

但VW等于VE，且WZ等于VX；

因此，ZV比VE如同EV比VX。

而角ZVE、EVX是直角；

因此，如果连接直线EZ、XZ，则角XEZ是直角，因为三角形XEZ与VEZ相似。

同理，

由于ZV比VW如同VW比WZ，

且ZV等于XW，VW等于WQ，

因此，XW比WQ如同QW比WZ。

又，同理，

如果连接QX，则Q处的角是直角；

[VI. 8]

因此，在XZ上所作的半圆也经过Q。

[III. 31]

又，如果XZ保持固定，旋转半圆到开始运动的同一位置，则它也过点Q和二十面体的其余顶点，

且该二十面体内接于一个球。

其次我说，它也内接于给定的球。

这是因为，设VW在A'被二等分。

于是，由于直线VZ在 W被分成中外比，且ZW是其较小段，

因此，ZW加较大段的一半即WA'上的正方形是较大段一半上的正方形的五倍；

[XIII. 3]

因此，ZA'上的正方形是A' W上的正方形的五倍。

而ZX是ZA'的二倍，且VW是A' W的二倍；

因此，ZX上的正方形是WV上的正方形的五倍。

又，由于AC是CB的四倍，

因此，AB是BC的五倍。

但AB比BC如同AB上的正方形比BD上的正方形；

[VI. 8，V. 定义9]

因此，AB上的正方形是BD上的正方形的五倍。

但已证明，ZX上的正方形也是VW上的正方形的五倍。

且DB等于VW，

这是因为，它们中的每一个都等于圆EFGHK的半径；

因此，AB也等于XZ。

而AB是给定球的直径；

因此，XZ也等于给定球的直径。

因此，该二十面体内接于给定的球。

其次我说，该二十面体的边是被称为次线的无理直线。

这是因为，由于球的直径是有理的，

且它上的正方形是圆EFGHK半径上的正方形的五倍，

因此，圆EFGHK的半径也是有理的；

因此，它的直径也是有理的。

但若一个等边五边形内接于一个有理直径的圆，则五边形的边是被称为次线的无理直线。

[XIII. 11]

且五边形EFGHK的边是这个二十面体的边。

因此，二十面体的边是被称为次线的无理直线。

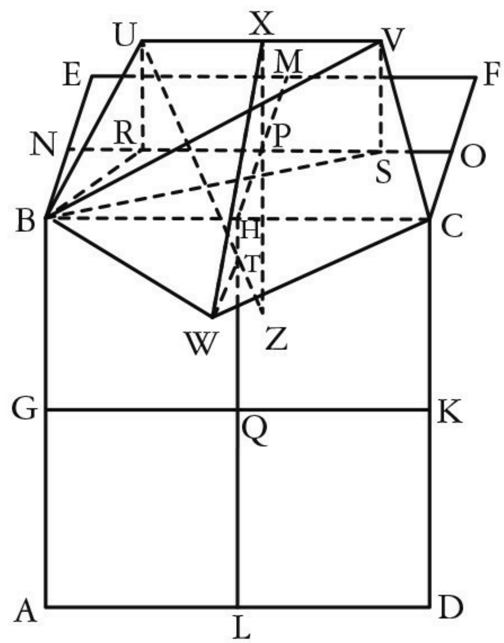
这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，该球直径上的正方形是二十面体所由以作出的圆半径上的正方形的五倍，且球的直径是同一圆的内接六边形的边与内接十边形的两边之和。

命题**17**

与前述图形一样，作一个球的内接十二面体，且证明该十二面体的边是被称为余线的无理直线。

To construct a dodecahedron and comprehend it in a sphere, like the aforesaid figures, and to prove that the side of the dodecahedron is the irrational straight line called apotome.



作前述立方体的彼此垂直的两个平面ABCD、CBEF，

设边AB、BC、CD、DA、EF、EB、FC分别在G、H、K、L、M、N、O被二等分，

连接GK、HL、MH、NO，

设直线NP、PO、HQ分别在点R、S、T被分成中外比，

且设RP、PS、TQ是其较大段；

从点R、S、T向立方体外作RU、SV、TW与立方体的平面成直角，

取它们等于RP、PS、TQ，

并连接UB、BW、WC、CV、VU。

我说，五边形UBWCV是在同一平面上的等边且等角的五边形。

这是因为，连接RB、SB、VB。

于是，由于直线NP在R被分成中外比，

且RP是较大段，

因此，PN、NR上的正方形之和是PR 上的正方形的三倍。

[XIII. 4]

但PN等于NB，且PR等于RU；

因此，BN、NR上的正方形之和是RU上的正方形的三倍。

但BR上的正方形等于BN、NR上的正方形之和；

[I. 47]

因此，BR上的正方形是RU上的正方形的三倍；

因此，BR、RU上的正方形之和是RU上的正方形的四倍。

但BU上的正方形等于BR、RU上的正方形之和；

因此，BU上的正方形是RU上的正方形的四倍；

因此，BU是RU的二倍。

但VU也是UR的二倍，

这是因为SR也是PR的二倍，即RU的二倍；

因此，BU等于UV。

类似地，可以证明，直线BW、WC、CV中的每一条等于直线BU、UV中的每一条。

因此，五边形BUVCW是等边的。

其次我说，它也在同一平面上。

从P向立方体外作PX平行于直线RU、SV中的每一条，连接XH、HW；

我说，XHW是一条直线。

这是因为，由于HQ在T被分成中外比，且QT是较大段，

因此，HQ比QT如同QT比TH。

但HQ等于HP，且QT等于直线TW、PX中的每一条；

因此，HP比PX如同WT比TH。

又，HP平行于TW，

这是因为，它们中的每一条都与平面BD成直角；

[XI. 6]

且TH平行于PX，

这是因为，它们中的每一条都与平面BF成直角。

[XI. 6]

但如果把两边与两边成比例的两个三角形XPH、HTW在一个角放在一起，使其对应的边也平行，则其余直线在同一直线上；

[VI. 32]

因此，XH与HW在同一直线上。

但每条直线都在同一平面上；

[XI. 1]

因此，五边形UBWCV在同一平面上。

其次我说，它也是等角的。

这是因为，由于直线NP在R被分成中外比，且PR是较大段，

而PR等于PS，

因此，NS也在P被分成中外比，

而NP是较大段；

[XIII. 5]

因此，NS、SP上的正方形之和是NP 上的正方形的三倍。

[XIII. 4]

但NP等于NB，且PS等于SV；

因此，NS、SV上的正方形之和是NB上的正方形的三倍；

因此，VS、SN、NB上的正方形之和是NB上的正方形的四倍。

但SB上的正方形等于SN、NB上的正方形之和；

因此，BS、SV上的正方形之和，即BV上的正方形——这是因为角VSB是直角——是NB上的正方形的四倍；

因此，VB是BN的二倍。

但BC也是BN的二倍；

因此，BV等于BC。

又，由于两边BU、UV等于两边BW、WC，

且底BV等于底BC，

因此，角BUV等于角BWC。

[I. 8]

类似地，可以证明，角UVC也等于角BWC；

因此，三个角BWC、BUV、UVC彼此相等。

但若一等边五边形有三个角相等，则该五边形是等角的，

[XIII. 7]

因此，五边形BUVCW是等角的。

而已经证明它是等边的；

因此，五边形BUVCW是等边且等角的，它在立方体的一边BC上。

因此，如果在立方体的十二条边中的每一条上都作同样的图，则可作出一个由十二个等边且等角的五边形所构成的立体形，它被称为十二面体。

然后，要求将它内接于给定的球，且证明该十二面体的边是被称为余线的无理直线。

延长XP成直线XZ；

因此，PZ与正方体的直径相交，且它们彼此二等分，

这是因为，这已在第十一卷的倒数第二个命题中得到证明。

[XI. 38]

设它们交于Z；

因此，Z是立方体外接球的球心，

且ZP是立方体边的一半。

连接UZ。

现在，由于直线NS在P被分成中外比，

且NP是其较大段，

因此，NS、SP上的正方形之和是NP上的正方形的三倍。

[XIII. 4]

但NS等于XZ，

这是因为NP也等于PZ，且XP等于PS。

但PS也等于XU，

这是因为它也等于RP；

因此，ZX、XU上的正方形之和是NP上的正方形的三倍。

但UZ上的正方形等于ZX、XU上的正方形之和；

因此，UZ上的正方形是NP上的正方形的三倍。

但正方体外接球半径上的正方形也是立方体边的一半上的正方形的三倍，

这是因为，前已表明如何作一个球的内接立方体，且已证明球直径上的正方形是立方体边上的正方形的三倍。

[XIII. 15]

但如果整个与整个有这个比，则半个与半个也有这个比，

且NP是立方体边的一半；

因此，UZ等于立方体外接球的半径。

而Z是立方体外接球的球心；

因此，点U在球面上。

类似地，可以证明，十二面体其余角中的每一个也在球面上；

因此，十二面体内接于给定的球。

其次我说，十二面体的边是被称为余线的无理直线。

这是因为，由于当NP被分成中外比时，RP是较大段，

且当PO被分成中外比时，PS是较大段，

因此，当整个NO被分成中外比时，RS是较大段。

[于是，由于NP比PR如同PR比RN，所以

这对二倍量也是正确的，

这是因为部分与部分之比如同其等倍量之比；

[V. 15]

因此，NO比RS如同RS比NR、SO之和。

但NO大于RS；

因此，RS也大于NR、SO之和；

因此，NO被分成中外比，且RS是其较大段。][1]

但RS等于UV；

因此，当NO被分成中外比时，UV是较大段。

又，由于球的直径是有理的，

且它上的正方形是正方体边上的正方形的三倍，

因此，作为立方体一边的NO是有理的。

<但若一有理直线被分成中外比，则每一段都是无理的余线。>

因此，作为十二面体一边的UV是一条无理余线。

[XIII. 6]

这就是所要证明的。

推论　由此显然可得，当立方体的边被分成中外比时，较大段是十二面体的边。

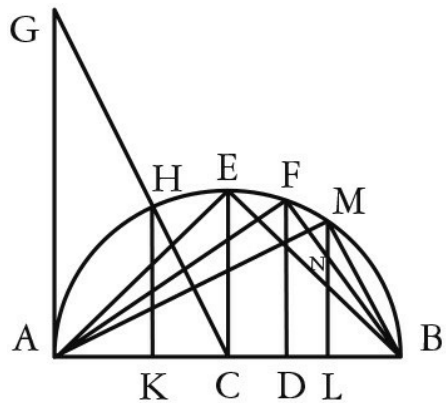
---

[1]希思将这段文字括了起来，也许是因为它显得多余。（译者注）

命题**18**

作五种立体形的边并相互比较。

To set out the sides of the five figures and to compare them with one another.



作给定球的直径AB，

设它在C被截，使AC等CB，

又设它在D被截，使AD是DB的二倍；

在AB上作半圆ADB，

从C、D作CE、DF与AB成直角，

连接AF、FB、EB。

于是，由于AD是DB的二倍，

因此，AB是BD的三倍。

因此，取换比例，BA是AD的一倍半。

但BA比AD如同BA上的正方形比AF上的正方形，

[V. 定义9，VI. 8]

这是因为，三角形AFB与三角形AFD是等角的；

因此，BA上的正方形是AF上的正方形的一倍半。

但球直径上的正方形也是棱锥边上的正方形的一倍半。

[XIII. 13]

而AB是球的直径；

因此，AF等于棱锥的边，

又，由于AD是DB的二倍，

因此，AB是BD的三倍。

但AB比BD如同AB上的正方形比BF上的正方形；

[VI. 8，V. 定义9]

因此，AB上的正方形是BF上的正方形的三倍。

但球直径上的正方形也是立方体边上的正方形的三倍。

[XIII. 15]

而AB是球的直径；

因此，BF是立方体的边。

又，由于AC等于CB，

因此，AB是BC的二倍。

但AB比BC如同AB上的正方形比BE上的正方形；

因此，AB上的正方形是BE上的正方形的二倍。

但球直径上的正方形也是八面体边上的正方形的二倍。

[XIII. 14]

而AB是给定球的直径；

因此，BE是八面体的边。

其次，从点A作AG与直线AB成直角，

取AG等于AB，

连接GC，

从H作HK垂直于AB。

于是，由于GA是AC的二倍，

这是因为GA等于AB，

且GA比AC如同HK比KC，

因此，HK也是KC的二倍。

因此，HK上的正方形是KC上的正方形的四倍；

因此，HK、KC上的正方形之和，即HG上的正方形，是KC上的正方形的五倍。

但HC等于CB；

因此，BC上的正方形是CK上的正方形的五倍。

又，由于AB是CB的二倍，

且在它们中，AD是DB的二倍，

因此，余量BD是余量DC的二倍。

因此，BC是CD的三倍；

因此，BC上的正方形是CD上的正方形的九倍。

但BC上的正方形是CK上的正方形的五倍；

因此，CK上的正方形大于CD上的正方形；

因此，CK大于CD。

取CL等于CK，

从L作LM与AB成直角，

连接MB。

现在，由于BC上的正方形是CK上的正方形的五倍，

且AB是BC的二倍，KL是CK的二倍，

因此，AB上的正方形是KL上的正方形的五倍。

但球直径上的正方形也是二十面体所由以作出的圆半径上的正方形的五倍。

[XIII. 16，推论]

而AB是球的直径；

因此，KL是二十面体所作出的圆的半径；

因此，KL是所说的圆的内接六边形的 一边。

[IV. 15，推论]

又，由于球的直径由同一圆的内接六边形的边与内接十边形的两边所构成，

[XIII. 16，推论]

且AB是球的直径，

而KL是六边形的一边，

且AK等于LB，

因此，直线AK、LB中的每一条都是二十面体所由以作出的圆内接十边形的一边。

又，由于LB属于一个十边形，且ML属于一个六边形，

这是因为ML等于KL，它也等于HK，它们与圆心距离相等，且直线HK、KL中的每一条都是KC的二倍，

因此，MB属于一个五边形。

[XIII. 10]

但五边形的边是二十面体的边；

[XIII. 16]

因此，MB属于这个二十面体，

现在，由于FB是立方体的一边，

设它在N被分成中外比，

且设NB是较大段；

因此，NB是十二面体的一边。

[XIII. 17，推论]

现在，由于已经证明，球直径上的正方形是棱锥边AF上的正方形的一倍半，也是八面体边BE上的正方形的二倍和立方体边FB的三倍，

因此，球直径上的正方形包含六部分，棱锥边上的正方形包含四部分，八面体边上的正方形包含三部分，立方体边上的正方形包含两部分。

因此，棱锥边上的正方形是八面体边上的正方形的三分之四，是立方体边上的正方形的二倍；

且八面体边上的正方形是立方体边上的正方形的一倍半。

因此，棱锥、八面体和立方体这三种立体形的所说的边彼此成有理比。

但其余两种立体形的边，即二十面体的边和十二面体的边，彼此不成有理比，与前面所说的边也不成有理比。

这是因为，它们是无理的，一个是次线[XIII. 16]，另一个是余线[XIII. 17]。

于是可以证明，二十面体的边MB大于十二面体的边NB。

这是因为，由于三角形FDB与三角形FAB是等角的，

[VI. 8]

所以有比例，DB比BF如同BF比BA。

[VI. 4]

又，由于三条直线成比例，所以

第一条比第三条如同第一条上的正方形比第二条上的正方形；

[V. 定义9，VI. 20，推论]

因此，DB比BA如同DB上的正方形比BF上的正方形；

因此，取反比例，AB比BD如同FB上的正方形比BD上的正方形。

但AB是BD的三倍；

因此，FB上的正方形是BD上的正方形的三倍。

但AD上的正方形也是DB上的正方形的四倍，

这是因为AD是DB的二倍；

因此，AD上的正方形大于FB上的正方形；

因此，AD大于FB；

因此，AL更大于FB。

又，当AL被分成中外比时，KL是较大段，

这是因为LK属于一个六边形，且KA属于一个十边形；

[XIII. 9]

且当FB被分成中外比时，NB是较大段；

因此，KL也大于NB。

但KL等于LM；

因此，LM大于NB。

因此，二十面体的一边MB更大于十二面体的一边NB。

这就是所要证明的。

其次我说，除上述五种立体形以外，再也构不成其他由等边等角且彼此相等的图形所围成的立体形。

这是因为，一个立体角不能由两个三角形或者事实上是两个平面所构成。

棱锥的角由三个三角形所构成，八面体的角由四个三角形所构成，二十面体的角由五个三角形所构成；

但一个立体角不能通过把六个等边三角形在一点上放在一起而构成，

这是因为，等边三角形的一个角是一个直角的三分之二，六个角将等于四个直角：

这是不可能的，因为任何立体角都是由其和小于四直角的角所围成的。

同理，一个立体角也不能由六个以上的平面角所构成。

立方体的角由三个正方形所围成，但一个立体角不可能由四个正方形所围成，

这是因为它们之和同样是四个直角。

十二面体的角由三个等边且等角的五边形所围成；

但任何立体角不可能由四个这样的五边形所围成。

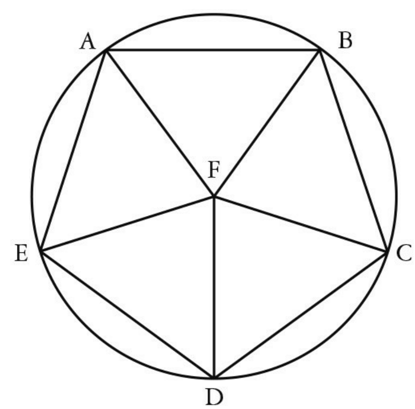
这是因为，等边五边形的角是一直角加五分之一直角，四个角之和将大于四个直角：

这是不可能的。

由于同样的荒谬性，立体角也不可能由其他多边形所围成。

这就是所要证明的。

引理　但我们必须证明，等边且等角的五边形的角是一直角加五分之一直角。



设ABCDE是一个等边且等角的五边形，

设圆ABCDE是它的外接圆，

取它的圆心F，

连接FA、FB、FC、FD、FE。

因此，它们在A、B、C、D、E将五边形的各角二等分。

又，由于F处的各角之和等于四直角且彼此相等，

因此，它们中的每一个，如角AFB，是一个直角减五分之一直角；

因此，其余的角FAB、ABF之和为一直角加五分之一直角。

但角FAB等于角FBC；

因此，五边形的整个角ABC是一直角加五分之一直角。

这就是所要证明的。

译后记

欧几里得（Εὐκλείδης，Euclid，活跃于公元前300年左右）是埃及托勒密王朝亚历山大城的古希腊数学家，其生活年代介于柏拉图（Plato，前427-前347）和阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约前262-约前190）之间。他的主要著作《几何原本》（Στοιχεῖα，*Elements*）[一译《原本》]是人类历史上最伟大的著作之一，对数学、自然科学乃至一切人类文化领域都产生了极其深远的影响。从1482年第一个印刷版本问世一直到19世纪末，《几何原本》一直是主要的数学（尤其是几何学）教科书，印刷了1000多个版本，数量仅次于《圣经》，“欧几里得”也几乎成为“几何学”的同义词。2400年来，它从希腊文先后被译成阿拉伯文、拉丁文和各种现代语言，无数人对它做过研究。

古往今来，《几何原本》一直被视为纯粹数学的公理化演绎结构的典范，其逻辑公理化方法和严格的证明仍然是数学的基石。它从几个简单的定义以及几条看起来自明的公理、公设出发，竟然能够推导出大量根本无法直观且不可错的复杂结论。在很大程度上，这种数学演绎也因此成为西方思想中最能体现理性的清晰性和确定性的思维方式。哥白尼、开普勒、伽利略和牛顿等许多科学家都曾受到《几何原本》的影响，并把他们对《几何原本》的理解运用到自己的研究中。霍布斯、斯宾诺莎、怀特海和罗素等哲学家也都尝试在自己的作品中采用《几何原本》所引入的公理化演绎结构。爱因斯坦回忆说，《几何原本》曾使儿

时的他大为震撼，并把《几何原本》称为“那本神圣的几何学小书”。

目前通行的《几何原本》的内容概要

卷次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	
定义	23	2	11	7	18	4	22	-	-	16	28	-	-	131
公设	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
公理	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
命题	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465

《几何原本》在思想史上有双重意义。首先，它把新的严格性标准引入了数学推理，这种逻辑严格性直到19世纪才被超越；其次，它朝着数学的几何化迈出了决定性一步。欧几里得之前的毕达哥拉斯学派和阿基米德，以及欧几里得之后的丢番图都表明，希腊数学也可以沿着其他方向发展。正是《几何原本》确保了数学应当由几何形式的证明来主导。欧几里得的几何数学观的这种决定性影响反映在思想史上最伟大的两部名著——牛顿的《自然哲学的数学原理》和康德的《纯粹理性批判》中：牛顿的作品是以欧几里得的几何证明的形式写成的，康德则因为相信欧几里得几何的普遍有效性而提出了一种支配其整个知识理论的先验感性论。直到19世纪，欧几里得几何的魔咒才开始被打破。

《几何原本》的原希腊标题中本无与“几何”对应的词，中文的“几何”二字是1607年利玛窦（Matteo Ricci，1552-1610）和徐光启（1562-1633）合译出版《几何原本》前6卷时经过认真考量添加的。目前通行的《几何原本》包含13卷（另外两卷被认为是后人续写的），由若干定义、公设、公理、命题和对命题的数学证明所组成，其数目编号是后来的拉丁文译本所引入的。《几何原本》所涉及的范围超出了我们所理解的几何学，还扩展到比例论、数论和对不可公度量的处理等领域。学者们认为，《几何原本》在很大程度上是根据一些早期希腊数学家的著作

所作的命题汇编。

公元4世纪，亚历山大里亚的西翁（Theon of Alexandria，约335-约405）制作了一个《几何原本》的版本，它被广泛使用，在19世纪以前一直是唯一幸存的原始版本。公元800年左右，《几何原本》在阿拔斯王朝的第五任哈里发哈伦·拉希德（Harunal-Rashid，766-809）治下被译成阿拉伯文。1120年左右，英格兰自然哲学家巴斯的阿德拉德（Adelard of Bath，约1080-约1152）将《几何原本》从阿拉伯文译成拉丁文。第一个印刷版于1482年问世，它所依据的是1260年意大利数学家、天文学家诺瓦拉的坎帕努斯（Campanus of Novara，约1220-1296）从阿拉伯文译成的拉丁文本。西翁的希腊文版于1533年被重新发现。最早的英译本*The elements of geometrie of the most ancient philosopher Euclide of Megara* [1]于1570年出版，它是英格兰商人亨利·比林斯利（Henry Billingsley，？- 1606）从希腊文原文直接翻译的，而不是从广为人知的坎帕努斯拉丁文本转译。最早的汉译本是1607年利玛窦和徐光启合译出版的，他们所参照的底本是耶稣会数学家克拉维乌斯（Christopher Clavius，1538-1612）的拉丁文评注本《原本十五卷》（*Elementorum Libri XV*），但只译出了《几何原本》的前6卷。直到1857年，伟烈亚力（Alexander Wylie，1815-1887）和李善兰（1811-1882）才共同译出了《几何原本》的后9卷。1808年，法国数学家、教育学家弗朗索瓦·佩拉尔（François Peyrard，1760-1822）在梵蒂冈图书馆发现了一个并非源于西翁的抄本，它所给出的文本要更早。正是根据这个抄本，丹麦语文学家、历史学家海贝格（Johan Ludvig Heiberg，1854-1928）编辑了带有拉丁文评注的权威希腊文版《几何原本》。1908年，英国古典学家、数学史家托马斯·希思爵士（Sir Thomas L. Heath，1861-1940）基于海贝格的希腊文版，在剑桥大学出版社出版了权威的英译本*Thirteen Books of Euclid's Elements*，并且附上了大量英文评注，1926年又出版了第二版。目前市面上流行的Dover版三卷本（1956年）正是这个剑桥第二版的影印。

希思的英译本虽然距今已逾一个世纪，但仍然是最权威的标准译本。希思深厚的古典学修养和对古希腊数学的精当理解在他那个时代就已经世所公认，至今也是如此。重要的是，今天尚没有一位研究古希腊数学特别是欧几里得的学者能够更好地重新翻译《几何原本》。一些人觉得希思的语言过时了或者难以理解，便试图将《几何原本》的文本重新改写成更符合现代读者习惯的语言，特别是，没有古代数学史基础的人往往会有意无意地用今天的概念，而不是欧几里得所理解和使用的概念来重新表述《几何原本》中的定义、公设或命题，这是不可取的。如果只是想学习一些几何学知识，问题倒还不大，但如果想知道欧几里得究竟是如何思考和呈现其体系的，那么这样做只会加深误解，使我们更加远离希腊人对几何学的看法和做法。

目前市面上的《几何原本》中译本有近十种，但其中真正付出过严肃认真的学术努力的只有兰纪正和朱恩宽翻译的当代汉语版本（1990年在陕西科学技术出版社出版，2003年修订再版，后于译林出版社重新出版），其他译本则大多粗制滥造、无甚价值。兰、朱译本的底本正是希思的英译本，但并未把其中的大量评注译出。在这些评注中，希思对《几何原本》的源流和版本，每个定义、公理、公设、命题的来龙去脉，以及其中涉及的难以理解的关键术语都做了极为详细的解说，如能将这些内容全部译出，其重大的学术意义自不待言。但不译评注也并非没有好处：首先，希思的版本有3卷，1400多页，《几何原本》的不同卷次分散于三卷之中，非常不方便携带和查阅；其次，要想在希思版中从一条命题移到下一条命题，往往需要翻过若干页的评注，这使人很难找到欧几里得的原文在哪里继续，从而很难就欧几里得的原有体系形成清晰图像；此外，虽然希思的英译很好，但并非他的所有评注都恰当和正确。这些评注毕竟是在100多年前做出的，随着学术的发展，其中不少内容已经过时，而且希思在很多地方也不可避免会使用现代的数学概念来解释欧几里得，从而产生误导。

兰纪正、朱恩宽版的中译本虽几经打磨，但仍然包含着不少错误。

其中一些是难以避免的小错，比如字母的误抄和若干关键术语未统一，但也有一些错误是因为没有正确理解原文，这既包括对有些原文句子结构的错误理解，也包括前面所说的对《几何原本》做了过于现代的处理。仅以《几何原本》第一卷的定义1和定义3为例。定义1的原文是："A point is that which has no part."兰、朱版译为"点是没有部分的"，但其实应当译为"点是没有部分的东西"。"东西"二字的加与不加，反映了对"点"的本质定义和属性定义之别。欧几里得说的是，一个东西只要没有部分，那就是点。而根据兰、朱版译文，就好像"点"除了"没有部分"这个属性还有别的什么属性似的。定义3的原文是："The extremities of a line are points."兰、朱版译为"一线的两端是点"，但其实应当译为"线之端是点"，原文中并没有"两"。欧几里得说的是，"线"只要有"端"，那就是"点"，但并没有说"线"有"两"端，比如圆就是线，但圆并没有端。之所以有这样的误译，是因为天然把"线"理解成了现在的"直线段"。类似地，我也没有按照现代数学的理解把欧几里得所说的"直线"（straight line）译成"线段"，把"圆周"（circumference）译成"弧"，甚至没有把"二倍比"（duplicate ratio）、"三倍比"（triplicate ratio）译成"二次比""三次比"，因为在古希腊和中世纪，我们所说的"比的相乘或相除"被称为"比的相加或相减"，如果把"倍"译成"次"，虽然更符合现代的理解，但我们在阅读某些古代数学文献时就会一头雾水，事实上，这种误解在科学史上的确导致过严重后果。[2]

基于以上考虑，我以希思的英译本为底本，不揣冒昧地重新翻译了《几何原本》的正文，[3]力求清晰、简洁、忠实于原文，不做过分现代的解读。我还把《几何原本》各卷的定义、公设、公理、命题题干的希思英译文附上，以方便读者对照。虽然兰、朱译本仍有一定的改进余地，但如果没有这个译本先前付出的巨大努力，我是不敢接手《几何原本》的翻译工作的。即便如此，这项任务的艰巨和枯燥程度也大大超出了我的想象。我深知，改进一个译本永远要比从无到有的翻译容易许多，这里我要向兰纪正、朱恩宽两位先生的开拓性努力致以深深的敬

意！我并非研究古希腊数学和欧几里得的专家，对希腊语也只略知皮毛，翻译这部经典名著可谓诚惶诚恐，但也备感荣幸。真诚地期待广大专家和读者不吝指正！

张卜天

2019年8月19日

---

[1]请注意这个标题中出现了“几何”（geometrie），而且实际上应该是“亚历山大里亚的欧几里得”（Euclid of Alexandria），而不是“麦伽拉的欧几里得”（Euclide of Megara），这两位“欧几里得”在文艺复兴时期经常被混淆。（译者注）

[2]读者可参见拙著《质的量化与运动的量化——14世纪经院自然哲学的运动学初探》（商务印书馆，2019年）第七章第一节对布雷德沃丁定律含义的讨论。（译者注）

[3]在翻译过程中，我发现了美国绿狮出版社（Green Lion Press）2002年出版的广受好评的*Euclid's Elements*，该书也是只收录了希思的英译文而没有放评注，但做了一些精心编排。我在翻译时主要参考的是这个版本。（译者注）

几何原本

产品经理 | 曹曼 吴高林

营销经理 | 刘天洋　　技术编辑 | 刘世乐

Kindle电子书制作 | 李元沛

出品人 | 路金波